Jan Schuster

Poznámky o trojúhelníku. [II.]

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 61 (1932), No. 7, R130--R136

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121848

Poznámky o trojúhelníku.

Dr. *Jan Schuster.*

(Dokončení.)

Stejné rovnice platí pro průseky antiparalel s ostatními stranami a jejich kolineárnost vyžaduje podle Menelaovy věty splnění rovnice

$$\frac{b^2(m+n)-nc^2}{c^2(m+p)-pb^2}\cdot\frac{c^2(n+p)-pa^2}{a^2(n+m)-mc^2}\cdot\frac{a^2(p+m)-mb^2}{b^2(p+n)-na^2}=1.$$

Při znásobení se zruší součiny prvních členů a podobně všech druhých členů a zbude

$$-\Sigma\, c^4a^2n\,(n+p)\,(p+m)+\Sigma\, b^4a^2mp\,(m+n)=$$
$$-\Sigma\, a^2b^4p\,(n+m)\,(p+n)+\Sigma\, c^4a^2mn\,(m+p),$$

kde Σ znamená, že třeba vytvořiti pokaždé tři členy cyklickou substitucí mezi prvky a, b, c resp. m, n, p.

Zaveďme nyní $m+n+p=s$, čímž vznikne

$$(n+p)\,(p+m)=ps+mn,\quad m+n=s-p,$$

takže

$$-\Sigma\, c^4a^2n\,(ps+mn)+\Sigma\, b^4a^2mp\,(s-p)=$$
$$=-\Sigma\, a^2b^4p\,(ns+pm)+\Sigma\, c^4a^2mn\,(s-n).$$

Členy obsahující s spojme:

$$s\,\Sigma\,(b^4a^2mp-c^4a^2pn+b^4a^2np-c^4a^2nm)=$$
$$=\Sigma\,(c^4a^2mn^2+b^4a^2mp^2-b^4a^2mp^2-c^4a^2mn^2).$$

Ježto pravá strana rovnice se anuluje, rozpadá se rovnice hledaného geometrického místa na přímku v nekonečnu $m+n+$ $+p=0$, a na kuželosečku, kterou ještě přeřaděním členů uvedeme na tvar přehlednější tím, že z každé trojiny vybereme členy se stejnými souřadnicemi. Tím vznikne

$$\Sigma\,(a^4c^2-c^4a^2+b^4a^2-a^4b^2)\,np=0.$$

Výraz v závorce lze přepsat na $a^4(c^2-b^2)-a^2(c^4-b^4)=$ $=a^2(b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)$, takže kuželosečka přejde v

$$\Sigma\, a^2(b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)\,np=0.$$

Vidíme tedy, že křivka prochází všemi vrcholy základního trojúhelníka, bodem Lemoineovým (a^2, b^2, c^2) a bodem reciprokým k ortickému středu $(b^2+c^2-a^2,\ c^2+a^2-b^2,\ a^2+b^2-c^2)$. Tedy jde o hyperbolu.

Kdybychom po vzoru odstavce 2. hledali přímku stop na stranách základního trojúhelníka vyťatých antiparalelami jdoucími bodem

$$m : n : p = -a^2 + b^2 + c^2 : a^2 - b^2 + c^2 : a^2 + b^2 - c^2,$$

obdrželi bychom pro průsek na straně a

$$y\,[c^2(-a^2 + b^2 + c^2 + a^2 + b^2 - c^2) - b^2(a^2 + b^2 - c^2)] +$$
$$+ z\,[b^2(-a^2 + b^2 + c^2 + a^2 - b^2 + c^2) - (-a^2 + b^2 + c^2)\,c^2] =$$
$$= 0, \quad \text{t. j.}$$
$$yb^2(3c^2 - a^2 - b^2) + zc^2(3b^2 - a^2 - c^2) = 0.$$

Odtud rovnice hledané přímky

$$\frac{x}{a^2}(3a^2 - b^2 - c^2) + \frac{y}{b^2}(3b^2 - a^2 - c^2) + \frac{z}{c^2}(3c^2 - a^2 - b^2) = 0$$

nebo

$$4(x + y + z) - (a^2 + b^2 + c^2)\left(\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2} + \frac{z}{c^2}\right) = 0.$$

To zase ukazuje, že bodu $-a^2 + b^2 + c^2 : a^2 + b^2 + c^2 : a^2 + b^2 - c^2$ odpovídající spojnice stop antiparalel je rovnoběžná s přímkou Lemoineovou.

Kdybychom místo antiparalel uvažovali rovnoběžky k ose vnějšího úhlu a jejich průseky se stranou ležící proti témuž úhlu, opakovaly by se předchozí rovnice až na to, že by bylo nyní $q = \dfrac{nc + pb}{m + n + p}$, pro průsek se stranou $x = 0$ platí pak $-\dfrac{y}{z} = \dfrac{b(m + n) - cn}{c(p + m) - bp}$, takže podle Menelaovy věty bude

$$\frac{b(m + n) - cn}{c(p + m) - bp} \cdot \frac{c(n + p) - ap}{a(n + m) - cm} \cdot \frac{a(p + m) - bm}{b(p + n) - na} = 1.$$

Postup výše naznačený by pak vedl na rovnici geometrického místa bodů (m, n, p) tvaru

$$\Sigma\, a(b - c)(b + c - a)\,np = 0.$$

Tedy je to zase hyperbola, jež jde všemi vrcholy základního trojúhelníka, nadto bodem (a, b, c), t. j. středem kružnice vepsané, a bodem

$$(b + c - a,\ c + a - b,\ a + b - c) \equiv (s - a,\ s - b,\ s - c).$$

Tomuto bodu odpovídající spojnice stop rovnoběžek k vnějším osám je

$$\frac{x}{a}(3a - b - c) + \frac{y}{b}(3b - c - a) + \frac{z}{c}(3c - a - b) = 0,$$

nebo

$$4(x + y + z) - (a + b + c)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) = 0,$$

je tedy rovnoběžná s harmonikálou středu vepsané kružnice.

Středu vepsané kružnice odpovídá spojnice

$$(a + b + c)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) - 2(x + y + z) = 0,$$

tedy zase rovnoběžka k harmonikále středu vepsané kružnice.

Celou úvahu možno zobecnit. Pevná přímka $ex + fy + gz = 0$ patří třem svazkům tvaru

$$a_i x + b_i y + c_i z + \lambda_i (ex + fy + gz) = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Zvolme z každého svazku po jedné přímce, takže se protínají tyto tři v jednom bodě (m, n, p) a při tom jejich průseky se stranami základního trojúhelníka jsou kolineární.

Laméův parametr λ_i se vyloučí, když dosadíme souřadnice m n, p, takže

$$\frac{a_i x + b_i y + c_i z}{a_i m + b_i n + c_i p} = \frac{ex + fy + gz}{em + fn + gp}.$$

Průsek se stranou $x = 0$ dá pro $i = 1$

$$\frac{b_1 y + c_1 z}{fy + gz} = \frac{a_1 m + b_1 m + c_1 p}{em + fn + gp}.$$

Označíme-li $a_i m + b_i : n + c_i p = A_i$, $em + fn + gp = s$, bude

$$\frac{y}{z} = -\frac{A_1 g - c_1 s}{A_1 f - b_1 s},$$

a tedy podmínka kolineárnosti

$$\frac{A_1 g - c_1 s}{A_1 f - b_1 s} \cdot \frac{A_2 e - a_2 s}{A_2 g - c_2 s} \cdot \frac{A_3 f - b_3 s}{A_3 e - a_3 s} = 1.$$

Po provedení se odštěpí činitel $s = 0$, t. j. přímka společná všem třem svazkům, a zbude

$$(c_1 a_2 b_3 - b_1 c_2 a_3) s^2 - s \, \Sigma \, (c_1 a_2 f - b_1 c_2 e) A_3 + \Sigma \, A_1 A_2 \, g \, (eb_3 - fa_3) = 0$$

jako geometrické místo bodů (m, n, p), tedy kuželosečka.

Přímka stop výše jmenovaných přímek určena dvěma stopami, na př. máme

$$\begin{vmatrix} 0, & -(A_1 g - c_1 s), & A_1 f - b_1 s \\ A_2 g - c_2 s, & 0, & -(A_2 e - a_2 s) \\ x, & y, & z \end{vmatrix} = 0$$

nebo

$$x (A_1 g - c_1 s)(A_2 e - a_2 s) + y (A_2 g - c_2 s)(A_1 f - b_1 s) + \\ + z (A_2 g - c_2 s)(A_1 g - c_1 s) = 0$$

nebo

$$A_1A_2g\,(ex + fy + gz) - s\,\{x(c_1A_2e + a_2A_1g - c_1a_2s) -$$
$$- y(c_2A_1f + b_1A_2\,g - c_2b_1s) - z\,(c_1A_2g + c_2A_1g - c_1c_2s)\} = 0.$$

Kdybychom stranu $x = 0$ proťali přímkou indexu $r = 2$ nebo $r = 3$, vyniklaly pokaždé nová kuželosečka, která by se s poslední rovnice odvodila cyklickou permutací indexů 1, 2, 3.

Posléze vytčený úkol se při šachovnici všech formulí dá přiložit do výroků korelativních takto: Pevný bod $en + fv + gw = 0$ patří třem řadám bodovým. Zvolme na každé řadě po bodě tak, aby leželi v jedné přímce (m, n, p), při čemž jejich spojnice s vrcholy základního trojúhelníka jdou jedním bodem. Pak zahalí přímky (m, n, p) křivku druhé třídy.

4. Úkol uvažovaný ve druhém odstavci můžeme zobecnit požadujíce, aby strany vepsaného trojúhelníka svíraly daný úhel φ se stranami daného. K určení poměru ξ podobnosti vepsaného trojúhelníka k danému slouží zase identita

$$AB_1 + B_1B = AB \quad \text{nebo} \quad c\xi\frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\sin\alpha} + a\xi\frac{\sin\varphi}{\sin\beta} = c,$$

z čehož

$$\xi\sin\varphi\left(\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\varphi + \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma\sin\beta}\right) = 1,$$

tedy

$$\xi\sin\varphi\,(\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\gamma + \operatorname{cotg}\varphi) = 1.$$

Ježto plyne z $\Delta\ A_1CC_1$

$$CA_1 = b\xi\frac{\sin(\gamma + \varphi)}{\sin\gamma}$$

a z $\Delta\ C_2B_2C_1$

$$CB_2 = a\xi\frac{\sin(\gamma + \varphi)}{\sin\gamma},$$

máme $\dfrac{CA_1}{CB_2} = \dfrac{b}{a}$, nebo $A_1B_2 \parallel AB$, vzájemná vzdálenost $c\xi\sin\varphi$.

Když tedy od vnitřní strany úsečky AB naneseme v B úhel φ ve směru rotace z BA do BC, naneseme-li na vzniklé rameno délku $A_1B_2 = c\xi$, obdržíme bod ležící na přímce AF, neboť platí

$$\frac{A_1B_2\sin\varphi}{c - A_1B_2\cos\varphi} = \frac{c\xi\sin\varphi}{c - c\xi\cos\varphi} =$$
$$= \frac{1}{\xi^{-1}\sin^{-1}\varphi - \operatorname{cotg}\varphi} = \frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\gamma} = \operatorname{tg}\omega.$$

Tohoto poznatku možno zase užít ke zpětné konstrukci úhlu φ, když protneme AF jinou rovnoběžkou se stranou AB než je FF_1, průsek spojíme s B, obdržíme hned příslušný úhel φ a potom k bodu A_1 nebo B_2 dokreslíme odpovídající trojúhelník $A_1B_1C_1$ nebo $A_2B_2C_2$.

Stejně platí $CC_2 = a\xi \dfrac{\sin\varphi}{\sin\gamma}$, $CC_1 = b\xi \dfrac{\sin\varphi}{\sin\gamma}$, tedy $\dfrac{CC_2}{CC_1} = \dfrac{a}{b}$ a proto jsou C_1C_2 a AB antiparalelní, čtyřúhelníky $A_1B_2C_1C$ a ABC_1C_2 jsou tětivové.

Ježto jsou trojúhelníky CC_2C_1 a ABC podobny sobě v poměru

$$\frac{CC_2}{a} = \frac{a\xi\sin\varphi}{a\sin\gamma} = \frac{\xi\sin\varphi}{\sin\gamma},$$

a dále $\Delta\ B_1B_2B \backsim \Delta\ ABC$ v poměru

$$\frac{B_1B_2}{a} = \frac{c\xi\sin\varphi}{c\sin\beta} = \frac{\xi\sin\varphi}{\sin\beta}$$

máme

$$C_1C_2 = c\frac{\xi\sin\varphi}{\sin\gamma} = 2r\xi\sin\varphi, \quad B_2B_1 = b\frac{\xi\sin\varphi}{\sin\beta} = 2r\xi\sin\varphi,$$

a proto

$$C_1C_2 = B_1B_2.$$

Je tedy $C_2C_1B_2B_1$ rovnoramenný lichoběžník, tedy zase tětivový.

Ježto mají $A_1B_2C_1C_2$ a $C_1C_2B_1B_2$ společné vrcholy C_1, C_2, B_2, patří body A_1, C_2, C_1, B_2, B_1 jedné kružnici. Podobná úvaha platí pro útvar vzniklý cyklickou substitucí z tohoto, a proto leží též bod A_2 na téže kružnici.

Její poloměr je zase $r\xi$ a vzdálenost středu K od strany c jest

$$d_c = r\xi\sin(90 - \gamma + \varphi) = r\xi\cos(\varphi - \gamma),$$

takže barycentrické souřadnice dány úměrami

$$x : y : z = \sin\alpha\cos(\varphi - \alpha) : \sin\beta\cos(\varphi - \beta) : \sin\gamma\cos(\varphi - \gamma).$$

Mění-li se φ, opisuje střed K přímku, jež plyne vyloučením φ z těchto úměr. Je-li ϱ neurčitý faktor, možno je přepsat na

$$\begin{aligned} \varrho x - \sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha\,\mathrm{tg}\,\varphi &= 0, \\ \varrho y - \sin\beta\cos\beta - \sin^2\beta\,\mathrm{tg}\,\varphi &= 0, \\ \varrho z - \sin\gamma\cos\gamma - \sin^2\gamma\,\mathrm{tg}\,\varphi &= 0, \end{aligned}$$

atyto dají

$$\begin{vmatrix} x, & \sin\alpha\cos\alpha, & \sin^2\alpha \\ y, & \sin\beta\cos\beta, & \sin^2\beta \\ z, & \sin\gamma\cos\gamma, & \sin^2\gamma \end{vmatrix} = 0.$$

Minor prvku x je $\sin\beta\sin\gamma\sin(\gamma-\beta)$, a podobně ostatní. Tím přejde rovnice přímky v

$$x\frac{\sin(\beta-\gamma)}{\sin\alpha}+y\frac{\sin(\gamma-\alpha)}{\sin\beta}+z\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\gamma}=0$$

nebo

$$x\frac{b^2-c^2}{a^2}+y\frac{c^2-a^2}{b^2}+z\frac{a^2-b^2}{c^2}=0.$$

Tato přímka jde Lemoineovým bodem $a^2:b^2:c^2$, bodem $a^4:b^4:c^4$, i středem opsaného kruhu, neboť se rovnice splní také pro bod $\sin 2\alpha:\sin 2\beta:\sin 2\gamma$. Tomuto středu odpovídající φ plyne srovnáním souřadnic z rovnic

$$\cos(\varphi-\alpha)=\pm\cos\alpha,\ \cos(\varphi-\beta)=\pm\cos\beta,$$
$$\cos(\varphi-\gamma)=\pm\cos\gamma$$

a splní se pro $\varphi=0^0$ a 180^0.

Další zájem mohou mít hodnoty φ, pro které přejde šestiúhelník v pětiúhelník. Neboť pak musí na př. $A_1\equiv C_2$, tedy

$$r\xi\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}+a\,\xi\frac{\sin\varphi}{\sin\gamma}=b,$$

$$\text{nebo } \xi\sin\varphi\left[\frac{\sin\gamma}{\sin(\alpha\sin\beta)}+\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma\sin\beta}\right]=1$$

a podle str. 110

$$\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{cotg}\gamma+2\operatorname{cotg}\beta=\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{cotg}\beta+\operatorname{cotg}\gamma+\operatorname{cotg}\varphi,$$

tedy $\operatorname{cotg}\beta=\operatorname{cotg}\varphi$, $\varphi=\beta$. Podobně bude $\varphi=\alpha$, $\varphi=\gamma$ při $B_1\equiv A_2$, $C_1\equiv B_2$.

Opíšeme-li zase kružnici trojúhelníku CC_1C_2 a čtyřúhelníku C_1C_2AB, obdržíme pro vzdálenosti d_c resp. d'_c středů od $\overline{C_1C_2}$

$$d_c=r\,\xi\sin\varphi\operatorname{cotg}\gamma,\qquad d'_c=r\,\xi\sin\varphi(\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{cotg}\beta+\operatorname{cotg}\gamma).$$

Zase je tedy $S_cS'_c=d_c+d'_c=r$,

$$d'_c-d_a-d_b=r\,\xi\cos\varphi$$

nezávisle na zvolené straně, tedy pro všecky tři páry stejně.

Pro poloměry máme: $r_c^2=r^2\xi_1^2\sin^2\varphi\operatorname{cosec}^2\gamma$,

$$r'_c=r^2\xi^2\sin^2\varphi\,[1+(\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{cotg}\beta++\operatorname{cotg}\varphi)^2].$$

Odtud pak

$$\begin{aligned}r'^2-r_c^2&=r^2\xi^2\sin^2\varphi\,[1+(\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{cotg}\beta+\operatorname{cotg}\varphi)^2-\operatorname{cosec}^2\gamma]\\&=r^2\xi^2\sin^2\varphi\,[(\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{cotg}\beta+\operatorname{cotg}\varphi)^2-\operatorname{cotg}^2\gamma]\\&=r^2\xi\sin\varphi\,[\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{cotg}\beta+\operatorname{cotg}\varphi-\operatorname{cotg}\gamma].\end{aligned}$$

Když sečteme cyklicky tvořené výrazy, bude

$$r'^2_a + r'^2_b + r'^2_c - r_a^2 - r_b^2 - r_c^2 =$$
$$= r^2 \xi \sin\varphi [\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\gamma + 3 \operatorname{cotg}\varphi] = r^2 (1 + 2\xi \cos\varphi).$$

Ježto je $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ tětivový šestiúhelník, leží průseky protějších stran, na př. C_1C_2 a B_1B_2 na Pascalově přímce.

Určíme ji z dělicího poměru bodu F vzhledem na A a B. Je totiž

$$\frac{FA}{FB} = AC_2 \frac{\sin\beta}{\sin(\beta - \alpha)} : BC_1 \frac{\sin\alpha}{\sin(\beta - \alpha)} =$$
$$= \xi b \frac{\sin(\alpha + \varphi)\sin\beta}{\sin\alpha} : \xi a \frac{\sin(\beta + \varphi)\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{b^3 \sin(\alpha + \varphi)}{a^3 \sin(\beta + \varphi)}.$$

Když provedeme tuto úvahu pro stopu na straně BC, bude rovnice hledané přímky

$$\begin{vmatrix} x, & y, & z \\ -\dfrac{a^3}{\sin(\alpha + \varphi)}, & \dfrac{b^3}{\sin(\beta + \varphi)}, & 0 \\ 0, & -\dfrac{b^3}{\sin(\beta + \varphi)}, & \dfrac{c^3}{\sin(\gamma + \varphi)} \end{vmatrix} = 0$$

nebo

$$\frac{x}{a^3}\sin(\alpha + \varphi) + \frac{y}{b^3}\sin(\beta + \varphi) + \frac{z}{c^3}\sin(\gamma + \varphi) = 0.$$

Když rozvineme siny, vznikne rovnice

$$\frac{x}{a^3}\sin\alpha + \frac{y}{b^3}\sin\beta + \frac{z}{c^3}\sin\gamma +$$
$$+ \operatorname{tg}\varphi\left[\frac{x}{a^3}\cos\alpha + \frac{y}{b^3}\cos\beta + \frac{z}{c^3}\cos\gamma\right] = 0.$$

patří tedy uvažovaná přímka svazku určenému Lemoineovou Přímkou

$$\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2} + \frac{z}{c^2} = 0 \text{ a přímkou } \frac{x}{a^3}\cos\alpha + \frac{y}{b^3}\cos\beta + \frac{z}{c^3}\cos\gamma = 0.$$

Tato je přímka stop antiparalel Lemoineovým bodem vedených, na stranách základního trojúhelníku.

Průsek obou přímek je

$$a^3 \sin(\beta - \gamma) : b^3 \sin(\gamma - \alpha) : c^3 \sin(\alpha - \beta),$$

tedy trilineární pól geometrického místa středů kruhů opsaných šestiúhelníkům.