Bedřich Pospíšil
Eine Bemerkung über Funktionenfolgen

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 70 (1941), No. 3-4, 119--121

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122289`

Eine Bemerkung über Funktionenfolgen.

Bedřich Pospíšil, Brünn.

(Eingegangen am 12. April 1941.)

Zitierte Werke:

P. Alexandroff und H. Hopf, Topologie I, zitiert AH.
B. Pospíšil, Math. Annalen **117** (1940), S. 327ff., zitiert MF., und Časopis mat. fys. **70** (1940-41), S. 68ff., zitiert Bem.
M. H. Stone, Transactions Amer. Math. Soc. **41** (1937), S. 375ff., zitiert Sto.

Wir betrachten ausschließlich reelle beschränkte Funktionen und beschränkte stetige Verteilungen. Es gilt:

Zu je abzählbar vielen meßbaren Funktionen g_n gibt es eine meßbare Funktion g derart, daß jede g_n eine stetige Funktion von g ist.

Es handelt sich z. B. um die nach Lebesgue meßbaren oder um die Baireschen Funktionen. Allgemein sei ein σ-Körper $\mathfrak{K}$ aus Teilmengen von E gegeben, $E \epsilon \mathfrak{K}$. Eine Funktion g auf E ist (in $\mathfrak{K}$) meßbar, falls für jedes Intervall j die Menge $g^{-1}(j)$ zu $\mathfrak{K}$ gehört. In den Bezeichnungen von MF. beweise ich folgende Behauptung, aus der die obere unmittelbar folgt:

Zu je abzählbar vielen Verteilungen φ_n gibt es eine Verteilung φ derart, daß jede φ_n eine stetige Funktion von φ ist. φ kann noch folgender Bedingung unterworfen werden: Es gibt eine diskontinuierliche kompakte Zahlenmenge $\mathfrak{Z}$ derart, daß $\varphi(j)$ für jedes zu $\mathfrak{Z}$ fremde Intervall j verschwindet.

Dabei handelt es sich um Verteilungen auf einem Booleschen Ring A mit Einselement e, wobei der Raum Φ unserer Verteilungen vollständig ist. (Die Entfernung zweier Verteilungen wurde in Bem. S. 69 erklärt.) Z. B. kann man für A irgend einen σ-Ring nehmen (MF. S. 346 und VI Satz 4 auf S. 352).

Wir wollen uns des in Bem. S. 69f. oder in MF. S. 349f. beschriebenen Stoneschen Modells für A bedienen: e ist also ein bikompakter Hausdorffscher Raum, A der Ring (Mengenkörper) aller Bausteine in e. Unsere Verteilungen entsprechen laut Bem. 5 auf S. 70f. eineindeutig (und in allen Hinsichten isomorph) den stetigen Funktionen f_φ auf e.

j möge nun alle Intervalle mit rationalen Endpunkten durchlaufen. Dann sind die $\varphi_n(j)$ abzählbar viele Bausteine. Z sei der Zerlegungsraum von e (AH. S. 61ff.), der durch die kleinsten nicht leeren Durchschnitte von Mengen $\varphi_n(j)$ bestimmt ist. Z ist ein stetiges Bild von e: $Z = h^*e$, wobei $h^*\pi = z$ für $\pi \in z \in Z$. Und die Mengen $h^* \varphi_n(j)$ bilden eine abzählbare offene Basis von Z[1]) und sind in Z abgeschlossen. Daher ist Z mit einer diskontinuierlichen kompakten Zahlenmenge $\mathfrak{Z}$ homöomorph: $\mathfrak{Z} = hZ$. (Vgl. z. B. Sto. Theorem 10 auf S. 389 und Theorem 13 auf S. 393.) Wir haben so eine auf e stetige Funktion $f = hh^*$ vorhanden, der eine Verteilung φ zugeordnet ist: $f = f_\varphi$.

Und diese Verteilung hat schon die gewünschten Eigenschaften. In der Tat sei f_n die zu φ_n gehörige Funktion auf e: $f_n = f_{\varphi_n}$. z sei eine zur Zerlegung Z gehörige Menge, $\pi \in z$, $\varrho \in z$, j offen, $f_n(\pi) \in j$. Laut Konstruktion von e ist π ein Primideal in A, $f_n(\pi) = h_\pi \varphi_n$, also $\varphi_n(j)$ non $\in \pi$, d. h. $\pi \in \varphi_n(j)$. (Vgl. MF. S. 330.) Also ist $z \subset \varphi_n(j)$, d. h. $\varrho \in \varphi_n(j)$ für alle offenen j mit $f_n(\pi) \in j$, also $\varphi_n(j)$ non $\in \varrho$ (wobei ϱ ein Primideal in A ist), d. h. $f_n(\varrho) = h_\varrho \varphi_n = f_n(\pi)$. (Vgl. l. c.) Also ist f_n auf jeder Menge der Zerlegung Z konstant, also kann als eine auf dem Raume Z erklärte Funktion aufgefaßt werden. Und zwar als eine stetige. Denn ist F eine abgeschlossene Zahlenmenge, so ist die Menge $f_n^{-1}(F)$ in e abgeschlossen, also bikompakt, also auch die entsprechende Menge in Z abgeschlossen. Also ist $f_n(Z)$ ein stetiges Bild von $\mathfrak{Z}$: $f_n(Z) = f_n(h^{-1}\mathfrak{Z})$. Wir schreiben $h_n = f_n h^{-1}$. Dann gilt offenbar $f_n = f_n h^* = h_n f$.[2])

Aus der Isomorphie zwischen f_φ und φ folgt also $\varphi_n = h_n \varphi$, also ist φ_n eine stetige Funktion von φ. Die Funktion f und die Verteilung φ erfüllen MF. VI Satz 1 auf S. 349. (Vgl. Bem. S. 70 oben.) Da für jedes zu $\mathfrak{Z}$ fremde j die Menge $f^{-1}(j)$ leer ist, so ist nach dem zitierten Satz $\varphi(j)$ gleich Null, w. z. b. w.

Unsere erste Behauptung folgt daraus unmittelbar. Laut MF. S. 355 entsprechen sich nämlich Verteilungen mit meßbaren Funktionen eineindeutig.

*

---

[1]) In der Tat sei $z \in Z$, $z \subset U$, U offen in e. Wäre nun jede Menge $M = (e - U)\ \varphi_n(j)$ mit $z \subset \varphi_n(j)$ nicht leer, also auch jeder Durchschnitt endlich vieler M, der ja immer auch ein M ist, so wäre kraft der Bikompaktizität von e auch der Durchschnitt aller M nicht leer, was der Wahl von z widerspricht.

[2]) Die Funktionen h_n sind zwar nur auf $\mathfrak{Z}$ erklärt worden, können aber auf alle reellen Argumente stetig fortgesetzt werden. Auf ihre Erklärung außerhalb $\mathfrak{Z}$ kommt es gar nicht an.

Poznámka o posloupnostech funkcí.

(Obsah předešlého článku.)

Pro jisté druhy funkcí (na př. pro ohraničené funkce měřitelné podle Lebesgua nebo Bairovy) platí: Členy dané posloupnosti funkcí jsou spojitými obrazy jediné funkce. Obdobné tvrzení platí pro spojité distribuce.