Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Vojtěch Jarník

Über die angenäherte Lösung der Gleichung $x_1 Theta_1 + cdots + x_n Theta_n + x_0 = 0$ in ganzen Zahlen

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 66 (1937), No. 3, 192--205

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122527`

Über die angenäherte Lösung der Gleichung $x_1 \Theta_1 + \ldots + x_n \Theta_n + x_0 = 0$ in ganzen Zahlen.

Vojtěch Jarník, Praha.

(Eingegangen am 21. Jänner 1937.)

Herrn Prof. Dr. Edmund Landau zu seinem 60. Geburtstag am 14. Februar 1937 in Dankbarkeit gewidmet.

Kleine lateinische Buchstaben (ausser e) bedeuten ganze, griechische Buchst. bedeuten reelle Zahlen. Sind $\Theta_1, \ldots, \Theta_n$ $(n > 0)$ gegeben, so gelten bekanntlich folgende Sätze:

I. Für jedes $t > 0$ sind die Ungleichungen

$$0 < \operatorname{Max}(|x_1|, \ldots, |x_n|) \leqq t, \quad \left|\sum_{i=1}^{n} x_i \Theta_i + x_0\right| < t^{-n} \qquad (1)$$

lösbar.

Also umsomehr:

II. Für unendlichviele $t > 0$ sind die Ungleichungen (1) lösbar.

I. und II. sind in folgendem Sinn scharf:

III. Zu jedem $n > 0$ gibt es ein $\gamma > 0$ und n Zahlen $\Theta_1, \ldots, \Theta_n$, sodass aus

$$0 < \operatorname{Max}(|x_1|, \ldots, |x_n|) \leqq t$$

folgt

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i \Theta_i + x_0\right| > \gamma t^{-n}.$$

In (1) wird verlangt, dass *mindestens eine* von den Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ von Null verschieden ist; wir wollen im folgenden die Frage beantworten, wie die Sätze I, II, III zu modifizieren sind, wenn man verlangt, dass *mindestens* k $(1 < k \leqq n)$ von den Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ von Null verschieden sind. Dabei wollen wir uns auf solche Systeme $\Theta_1, \ldots, \Theta_n$ beschränken, für welche aus $x_1\Theta_1 + \ldots + x_n\Theta_n + x_0 = 0$ folgt: $x_0 = x_1 = \ldots = x_n = 0$. Solche Systeme wollen wir zur Abkürzung „eigentliche Systeme" nennen.

Wir führen noch folgende Benennung ein: ist $0 < l \leqq m$ und ist $x_0, x_1, \ldots, x_m$ ein geordnetes System von $m + 1$ Zahlen, so nennen wir dieses System ein l-System, wenn mindestens l von den Zahlen $x_1, \ldots, x_m$ von Null verschieden sind. Die Antwort auf unsere Frage ist in folgenden Sätzen enthalten:

Satz 1. *Es sei* $1 < k \leqq n$; $\Theta_1, \ldots, \Theta_n$ *sei ein eigentliches System. Dann gibt es zu jedem* $t > 0$ *ein* k-*System* $x_0 = x_0(t)$, $x_1 = x_1(t), \ldots, x_n = x_n(t)$ *mit*

$$\operatorname{Max}(|x_1|, \ldots, |x_n|) \leqq t, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \Theta_i + x_0 = o\left(\frac{1}{t^{n-k+1}}\right)$$

(man beachte, dass die linke Seite eine Funktion von t ist).

Satz 2.[1]) *Es sei* $1 < k \leqq n$; *für* $\tau > 0$ *sei* $\varphi(\tau)$ *positiv und wachsend,* $\varphi(\tau) \to \infty$ *für* $\tau \to \infty$. *Dann gibt es ein eigentliches System* $\Theta_1, \ldots, \Theta_n$ *und eine wachsende Folge* $t_1, t_2, \ldots$ *mit folgender Eigenschaft: ist* $l > 0$, *so gibt es kein* k-*System* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *mit*

$$\operatorname{Max}(|x_1|, \ldots, |x_n|) \leqq t_l, \quad \left|\sum_{i=1}^{n} x_i \Theta_i + x_0\right| < \frac{1}{t_l^{n-k+1}\varphi(t_l)}. \tag{2}$$

Satz 3. *Es sei* $1 < k \leqq n$, $a(k, n) = (k + 2)(k + 1)^{n-k+2}$; $\Theta_1, \ldots, \Theta_n$ *sei ein eigentliches System. Dann gibt es eine wachsende Folge* $t_1, t_2, \ldots$ *mit folgender Eigenschaft: zu jedem* $l > 0$ *gibt es ein* k-*System* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *mit*

$$\operatorname{Max}(|x_1|, \ldots, |x_n|) \leqq t_l, \quad \left|\sum_{i=1}^{n} x_i \Theta_i + x_0\right| < \frac{a(k, n)}{t_l^{n-k+2}}. \tag{3}$$

Für $k = 2$ ist $n - k + 2 = n$; nach III ist also der Satz 3 für $k = 2$ scharf. Aber auch für $k > 2$ ist der Satz 3 mindestens in dem Sinne scharf, dass der Exponent $n - k + 2$ nicht vergrössert werden darf. Es gilt nämlich

Satz 4. *Es sei*

$$2 < k \leqq n; \quad b = b(k, n) = (n - k + 3)(k - 1) + 3.$$

Dann gibt es ein eigentliches System $\Theta_1, \ldots, \Theta_n$ *und ein* $t_0 > 0$ *mit folgender Eigenschaft: ist* $t > t_0$ *und ist* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *ein* k-*System mit* $\operatorname{Max}(|x_1|, \ldots, |x_n|) \leqq t$, *so ist*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i \Theta_i + x_0\right| > \frac{1}{t^{n-k+2}\log^b t}.$$

Man beachte folgenden Unterschied zwischen den Sätzen I, II einerseits und den Sätzen 1, 3 andererseits: in den beiden Sätzen I, II hat man denselben scharfen Exponenten n; in den analogen Sätzen 1, 3 hat man zwei verschiedene scharfe Exponenten $n - k + 1$,

[1]) Satz 2. zeigt die Schärfe des Satzes 1.

$n - k + 2$. Ich bemerke noch, dass man sehr leicht folgenden Satz beweisen kann: fast alle[2]) Systeme $\Theta_1, \ldots, \Theta_n$ haben folgende Eigenschaft: ist t hinreichend gross, so ist jedes System $x_0, x_1, \ldots, x_n$, welches den Ungleichungen (1) genügt, ein n-System (also auch ein k-System für jedes k mit $1 \leqq k \leqq n$). Also: diejenigen Systeme $\Theta_1, \ldots, \Theta_n$, die uns zwingen, den Exponenten n aus I, II in den Sätzen 1, 3, durch einen kleineren[3]) zu ersetzen, bilden nur eine Menge vom Mass Null.

Es folgen jetzt die (leichten) Beweise der Sätze 1 bis 4.

Beweis des Satzes 1.

Da $\Theta_1, \ldots, \Theta_n$ ein eigentliches System ist, so gibt es eine für $v > 0$ positive und wachsende Funktion $\varphi(v)$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\varphi(v) \to \infty$ für $v \to \infty$.
2. Aus

$$v > 0, \ \mathrm{Max}\,(|x_1|, \ldots, |x_n|) > 0, \ \left|\sum_{i=1}^{n} x_i\,\Theta_i + x_0\right| < \frac{1}{v^{n-k+1}}$$

folgt

$$\mathrm{Max}\,(|x_1|, \ldots, |x_n|) > \varphi(v).$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $v^{-1}\,\varphi(v) \to 0$ für $v \to \infty$.

Es sei nun ein hinreichend grosses t gegeben. $\mathfrak{A}$ sei die Menge aller Systeme $(y_0, y_1, \ldots, y_n)$ mit

$$0 \leqq y_i \leqq t \ (i = 1, 2, \ldots, n), \ 0 \leqq \sum_{i=1}^{n} y_i\,\Theta_i + y_0 < 1.$$

Da die Anzahl der Elemente von $\mathfrak{A}$ gleich $(t+1)^n$ ist, so gibt es (Schubfachprinzip!) ein Intervall von der Länge $[t^{n-k+1}\varphi^{\frac{1}{2}}(t)]^{-1}$, in welchem mindestens $t^{k-1}\,\varphi^{-\frac{1}{2}}(t)$ von den Zahlen $y_1\Theta_1 + \ldots + y_n\Theta_n + y_0$ liegen; subtrahiert man eine von diesen Zahlen von den übrigen, so bekommt man eine Menge $\mathfrak{B}$ von mindestens $t^{k-1}\,\varphi^{-\frac{1}{2}}(t) - 1 > \frac{1}{2}t^{k-1}\,\varphi^{-\frac{1}{2}}(t)$ Systemen $x_0, x_1, \ldots, x_n$ mit

$$0 < \mathrm{Max}\,(|x_1|, \ldots, |x_n|) \leqq t, \quad \left|\sum_{i=1}^{n} x_i\,\Theta_i + x_0\right| < \frac{2}{t^{n-k+1}\,\varphi^{\frac{1}{2}}(t)}. \tag{4}$$

Für $1 \leqq i_1 < i_2 < \ldots < i_{k-1} \leqq n$ sei $\mathfrak{C}\,(i_1, \ldots, i_{k-1})$ die Menge derjenigen Systeme $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ mit (4), für welche alle x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ausser $x_{i_1}, \ldots, x_{i_{k-1}}$ verschwinden (wobei aber auch einige von den letzgenannten $k-1$ Zahlen verschwinden können). Weiter sei $\mathfrak{C}$ die Menge aller Systeme $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ mit (4), welche *keine* k-Systeme sind, also

[2]) Im Sinne der Lebesgueschen Masstheorie.

[3]) Im Satz 3 tritt diese Verkleinerung nur für $k > 2$ auf.

$$\mathfrak{C} = \sum_{1 \leqq i_1 < i_2 \dots < i_{k-1} \leqq n} \mathfrak{C}(i_1, \dots, i_{k-1}).$$

Ist also $c(i_1, \dots, i_{k-1})$ bzw. c die Anzahl der Elemente von $\mathfrak{C}(i_1, \dots, i_{k-1})$ bzw. von $\mathfrak{C}$, so ist

$$c \leqq \sum_{1 \leqq i_1 < i_2 < \dots < i_{k-1} \leqq n} c(i_1, \dots, i_{k-1}). \tag{5}$$

Gesetzt, für geeignet gewählte $i_1, i_2, \dots, i_{k-1}$ sei

$$c(i_1, \dots, i_{k-1}) > t^{k-1} \varphi^{-\frac{2}{3}}(t). \tag{6}$$

Setzt man $\Theta_{i_l} = \eta_l$, so ist $c(i_1, \dots, i_{k-1})$ die Anzahl aller Systeme $(y_0, y_1, \dots, y_{k-1})$ mit

$$0 < \operatorname{Max}(|y_1|, \dots, |y_{k-1}|) \leqq t, \quad \left|\sum_{i=1}^{k-1} y_i \eta_i + y_0\right| < \frac{2}{t^{n-k+1} \varphi^{\frac{1}{3}}(t)}.$$ [4])

Daraus und aus (6) schliesst man (Schubfachschluss): unter diesen Systemen $(y_0, \dots, y_{k-1})$ gibt es zwei verschiedene $(y'_0, \dots, y'_{k-1})$, $(y''_0, \dots, y''_{k-1})$ mit

$$\operatorname*{Max}_{i=1,\dots,k-1} |y'_i - y''_i| < \frac{3t}{t(\varphi(t))^{-\frac{2}{3(k-1)}}}.$$

Durch Differenzenbildung erhält man ein System $(x_0, x_1, \dots, x_{k-1})$ mit

$$0 < \operatorname{Max}(|x_1|, \dots, |x_{k-1}|) < 3(\varphi(t))^{\frac{2}{3(k-1)}} < \varphi(t),$$

$$\left|\sum_{i=1}^{k-1} x_i \eta_i + x_0\right| < \frac{4}{t^{n-k+1} \varphi^{\frac{1}{3}}(t)} < \frac{1}{t^{n-k+1}},$$

was der Definition von $\varphi(v)$ widerspricht. Also ist (6) falsch und aus (5) folgt

$$c \leqq \binom{n}{k-1} t^{k-1} \varphi^{-\frac{2}{3}}(t) < \tfrac{1}{2} t^{k-1} \varphi^{-\frac{1}{2}}(t).$$

Es gibt also ein System $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ aus $\mathfrak{B}$, welches nicht zu $\mathfrak{C}$ gehört, d. h. es gibt ein k-System $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ mit (4).

Beweis des Satzes 3.

Es sei $1 < k \leqq n$; $\Theta_1, \dots, \Theta_n$ sei ein eigentliches System. Nach I (für $k = 2$) bzw. nach Satz 1 (für $k > 2$) gibt es zu jedem $t > t_0$ ein $(k-1)$-System $x_0, x_1, \dots, x_n$ mit

$$\operatorname{Max}(|x_1|, \dots, |x_n|) \leqq t, \quad \left|\sum_{i=1}^{n} x_i \Theta_i + x_0\right| < \frac{1}{t^{n-k+2}}.$$

[4]) Man beachte, dass y_0 durch $y_1, \dots, y_{k-1}$ eindeutig bestimmt ist.

Wir unterscheiden zwei Fälle:

Erster Fall. Es gibt $k-1$ Zahlen $i_1, \ldots, i_{k-1}$ ($1 \leqq i_1 < i_2 < \ldots < i_{k-1} \leqq n$), so dass es zu jedem hinreichend grossen t ein System $x_0, x_1, \ldots, x_n$ gibt mit

$$\left.\begin{aligned} & x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_{k-1}} \neq 0, \ \operatorname{Max}(|x_1|, \ldots, |x_n|) \leqq t, \\ & \left| \sum_{i=1}^{n} x_i \Theta_i + x_0 \right| < \frac{1}{t^{n-k+2}}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Zweiter Fall. Der erste Fall liegt nicht vor.

Wir behandeln zunächst den ersten Fall, wobei wir durch Umnumerierung erreichen, dass

$$i_1 = 1, \ i_2 = 2, \ \ldots, \ i_{k-1} = k-1 \tag{8}$$

ist. Es seien $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots$ die (irreduziblen) Näherungsbrüche der regelmässigen Kettenbruchentwicklung der Zahl Θ_1 ($q_l > 0$). Bekanntlich gilt:

1. ist $|x\Theta_1 - y| < \frac{1}{2|x|}$, $|x| \neq 0$, so ist $\frac{y}{x}$ einem $\frac{p_l}{q_l}$ gleich;

2. $\frac{1}{2q_{s+1}} < |q_s \Theta_1 - p_s| < \frac{1}{q_{s+1}}$.

Man setze $t = q_{s+1} - 1$; ist s hinreichend gross, so gibt es erstens Zahlen $x_0, x_1, \ldots, x_n$ mit (7), (8). Zweitens gibt es nach I $n-k+3$ Zahlen $y_0, y_1, y_k, y_{k+1}, \ldots, y_n$ mit

$$0 < \operatorname{Max}(|y_1|, |y_k|, |y_{k+1}|, \ldots, |y_n|) \leqq t,$$
$$\left| \Theta_1 y_1 + \sum_{i=k}^{n} \Theta_i y_i + y_0 \right| < \frac{1}{t^{n-k+2}}.$$

Wäre $y_k = y_{k+1} = \ldots = y_n = 0$, so wäre

$$y_1 \neq 0, \ |\Theta_1 y_1 + y_0| < \frac{1}{t^{n-k+2}} \leqq \frac{1}{|y_1| \, t^{n-k+1}} < \frac{1}{2|y_1|},$$

also $\frac{y_0}{y_1} = -\frac{p_l}{q_l}$ für ein $l \leqq s$, also

$$|\Theta_1 y_1 + y_0| \geqq |\Theta_1 q_l - p_l| > \frac{1}{2q_{l+1}} \geqq \frac{1}{2q_{s+1}} > \frac{1}{3t} > \frac{1}{t^{n-k+2}}$$

— Widerspruch; also ist mindestens eine von den Zahlen $y_k, y_{k+1}, \ldots, y_n$ von Null verschieden.

Zu unserem t gibt es ein System $x_0, x_1, \ldots, x_n$ mit (7), (8). Ist $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ein k-System, so sind wir fertig. Sonst ist $x_k = x_{k+1} = \ldots = x_n = 0$; in diesem Falle bilde man den Ausdruck

$$\Theta_1 x_1 + \ldots + \Theta_n x_n + x_0 \pm (\Theta_1 y_1 + \Theta_k y_k + \ldots + \Theta_n y_n + y_0),$$

wobei das Vorzeichen so gewählt werde, dass $x_1 \pm y_1 \neq 0$ ist.

Wird noch $t' = 2t$ gesetzt, so bekommt man auf diese Weise offenbar ein k-System $z_0, z_1, \ldots, z_n$ mit

$$\mathrm{Max}\,(|z_1|, \ldots, |z_n|) \leqq t', \left|\sum_{i=1}^{n} \Theta_i z_i + z_0\right| < \frac{2}{t^{n-k+2}} < \frac{a(k, n)}{t'^{n-k+2}},$$

womit der erste Fall erledigt ist.

Es liege nun der zweite Fall vor. Dann gibt es ein System $i_1, \ldots, i_{k-1}$ $(1 \leqq i_1 < i_2 < \ldots < i_{k-1} \leqq n)$ so, dass (7) für unendlichviele $t > 0$ lösbar und auch für unendlichviele $t > 0$ unlösbar ist; ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte (8). Es gibt also unendlichviele $t' > t_0$, sodass (7), (8) für $t = t'$ lösbar, für $t = t' + 1$ unlösbar ist. Es sei t' eine solche Zahl. Gibt es ein k-System $x_0, x_1, \ldots, x_n$, sodass (7), (8) mit $t = t'$ erfüllt ist, so sind wir fertig. Sonst gibt es k Zahlen $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ mit

$$x_1 x_2 \ldots x_{k-1} \neq 0, \mathrm{Max}\,(|x_1|, \ldots, |x_{k-1}|) \leqq t',$$
$$\left|\sum_{i=1}^{k-1} x_i \Theta_i + x_0\right| < \frac{1}{t'^{n-k+2}}.$$

Es gibt weiter ein $(k - 1)$-System $y_0, y_1, \ldots, y_n$ mit

$$\mathrm{Max}\,(|y_1|, \ldots, |y_n|) \leqq t' + 1, \quad \left|\sum_{i=1}^{n} y_i \Theta_i + y_0\right| < \frac{1}{(t' + 1)^{n-k+2}}.$$

Nach der Wahl von t' ist $y_1 y_2 \ldots y_{k-1} = 0$, also gibt es ein l mit $k \leqq l \leqq n$, $y_l \neq 0$. Für jedes i $(i = 1, 2, \ldots, k - 1)$ gibt es wegen $x_i \neq 0$ höchstens ein a_i mit $x_i + a_i y_i = 0$; also kann man ein b mit $1 \leqq b \leqq k$ so finden, dass $x_i + b y_i \neq 0$ für $i = 1, 2, \ldots, k - 1$. Dann ist also, $z_i = x_i + b y_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n; x_k = \ldots = x_n = 0)$ und $T = (k + 1)(t' + 1)$ gesetzt, für hinreichend grosse t'

$$\mathrm{Max}\,(|z_1|, \ldots, |z_n|) \leqq T,$$
$$\left|\sum_{i=1}^{n} \Theta_i z_i + z_0\right| < \frac{k + 1}{t'^{n-k+2}} < \frac{a(k, n)}{T^{n-k+2}}$$

und $z_0, z_1, \ldots, z_n$ ist wegen $z_1 z_2 \ldots z_{k-1} z_l \neq 0$ ein k-System.

Beweis des Satzes 2.

Es sei $1 < k \leqq n$; $\varphi(\tau)$ sei positiv und wachsend für $\tau > 0$, für $\tau \to \infty$ sei $\varphi(\tau) \to \infty$. Man wähle unendlichviele Brüche

$$\frac{p_{s,l}}{q_{s,l}} \; (s = 1, 2, \ldots, n; l = 1, 2, \ldots)$$

mit folgenden Eigenschaften: die $q_{s,l}$ sind Primzahlen,

$$2 < q_{1,l} < q_{2,l} < \ldots < q_{n,l} < q_{1,l+1} \; (l = 1, 2, \ldots);$$
$$q_{s,l+1} > 2q_{s,l}; \; q_{1,l+1} > 4nq_{1,l}\, q_{2,l} \ldots q_{n,l} \cdot q_{k,l}; \; q_{n,l} < 2q_{k,l};$$

$$\varphi(\tfrac{1}{2}q_{k,l}) > 2^{2(n-k+1)+1} \cdot q_{1,l}q_{2,l} \dots q_{k-1,l};$$

$$p_{s,l} \not\equiv 0 \pmod{q_{s,l}}; \quad \left| \frac{p_{s,l}}{q_{s,l}} - \frac{p_{s,l+1}}{q_{s,l+1}} \right| \leqq \frac{1}{q_{s,l+1}}.$$

Die Möglichkeit einer solchen Wahl ist klar, wenn man bedenkt, dass zwischen x und $2x$ für hinreichend grosse x mehr als $n - k$ Primzahlen liegen. Dann setze man für $s = 1, 2, \dots, n$

$$\Theta_s = \lim_{l=\infty} \frac{p_{s,l}}{q_{s,l}}, \text{ also } \left| \Theta_s - \frac{p_{s,l}}{q_{s,l}} \right| < \frac{2}{q_{s,l+1}}. \tag{9}$$

$\Theta_1, \dots, \Theta_n$ ist ein eigentliches System; denn aus $x_1\Theta_1 + \dots + x_n\Theta_n + x_0 = 0$ folgt für wachsendes l

$$x_0 + x_1 \frac{p_{1,l}}{q_{1,l}} + \dots + x_n \frac{p_{n,l}}{q_{n,l}} = O\left(\frac{1}{q_{1,l+1}}\right) = o\left(\frac{1}{q_{1,l} \dots q_{n,l}}\right).$$

Für grosse l ist also die linke Seite gleich Null und durch Multiplikation mit $q_{1,l}q_{2,l} \dots q_{n,l}$ bekommt man für $s = 1, \dots, n$

$$x_s p_{s,l} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^{n} q_{i,l} \equiv 0 \pmod{q_{s,l}}, \text{ also } x_s \equiv 0 \pmod{q_{s,l}};$$

für hinreichend grosse l ist aber $q_{s,l} > |x_s|$, also $x_s = 0$ für $s = 1, \dots, n$, also auch $x_0 = 0$.

Man setze nun $t_l = q_{k,l} - 1 > \frac{1}{2}q_{k,l}$ für $l = 1, 2, \dots$ und man setze voraus, dass es zu einem $l > 0$ ein k-System $x_0, x_1, \dots, x_n$ mit (2) gibt. Nach (2), (9) wäre

$$\left| x_1 \frac{p_{1,l}}{q_{1,l}} + \dots + x_n \frac{p_{n,l}}{q_{n,l}} + x_0 \right| < \frac{2nq_{k,l}}{q_{1,l+1}} + \frac{1}{(\frac{1}{2}q_{k,l})^{n-k+1}\, \varphi(\frac{1}{2}q_{k,l})} <$$

$$< \frac{1}{2q_{1,l} \dots q_{n,l}} + \frac{1}{2 \cdot (2q_{k,l})^{n-k+1}\, q_{1,l} \dots q_{k-1,l}} < \frac{1}{q_{1,l} \dots q_{n,l}},$$

also

$$x_1 \frac{p_{1,l}}{q_{1,l}} + \dots + x_n \frac{p_{n,l}}{q_{n,l}} + x_0 = 0.$$

Es sei c der grösste Index $s \leqq n$ mit $x_s \neq 0$; dann wäre also $c \geqq k$ und

$$x_1 \frac{p_{1,l}}{q_{1,l}} + \dots + x_c \frac{p_{c,l}}{q_{c,l}}$$

eine ganze Zahl, also

$$x_c p_{c,l}\, q_{1,l}q_{2,l} \dots q_{c-1,l} \equiv 0 \pmod{q_{c,l}}, \text{ also } x_c \equiv 0 \pmod{q_{c,l}};$$

andererseits aber $0 < |x_c| \leqq t_l < q_{k,l} \leqq q_{c,l}$ — Widerspruch.

Hilfssätze.

Zum Beweis des Satzes 4. brauchen wir drei Hilfssätze, die jetzt bewiesen werden sollen. Ich bemerke aber gleich, dass diese Hilfssätze nicht neu sind: Hilfssatz 1. ist trivial, Hilfssatz 2. kommt im Wesentlichen in einer Arbeit des Herrn A. Khintchine[5]) vor, und den Hilfssatz 3. habe ich schon in einer anderen Arbeit[6]) bewiesen und angewendet.

Hilfssatz 1. *Es sei gegeben*:

1. *eine Zahl* $s > 1$;
2. *eine Zahl* $h > 0$;
3. *ein Punkt*[7]) $P = [\eta_1, \ldots, \eta_s]$ *mit rationalen Koordinaten*;
4. *ein endliches System*

$$H_1, \ldots, H_m \tag{10}$$

von $(s - 1)$*-dimensionalen Hyperebenen.*

Dann gibt es eine Gerade G *mit folgenden Eigenschaften*:

A) G *enthält den Punkt* P; G *liegt in keiner Hyperebene des Systems* (10).

B) *Die Gleichungen von* G *lassen sich in der Form*

$$y_i\Theta_1 + z_i\Theta_i + u_i = 0 \ (i = 2, 3, \ldots, s)$$

schreiben, wobei für jedes i $(i = 2, 3, \ldots, s)$

$$(y_i, z_i, u_i) = 1, \ y_i > h, \ z_i \neq 0$$

gilt.

Beweis. Es gibt offenbar $s - 1$ Zahlen $\lambda_i \neq 0$ $(i = 2, \ldots, s)$, sodass die Gerade

$$(\Theta_1 - \eta_1) + \lambda_i (\Theta_i - \eta_i) = 0, \quad (i = 2, \ldots, s)$$

die Eigenschaft A besitzt. Man kann dann zu jedem i $(i = 2, \ldots, s)$ zwei Zahlen p_i, q_i mit $p_i \neq 0$, $q_i > h$, $(p_i, q_i) = 1$ so wählen, dass auch die Gerade G mit den Gleichungen

$$(\Theta_1 - \eta_1) + \frac{p_i}{q_i} (\Theta_i - \eta_i) = 0 \ \ (i = 2, \ldots, s)$$

die Eigenschaft A besitzt. Ist $\eta_i = \dfrac{a_i}{b}$ $(b > 0)$ für $i = 1, \ldots, s$ so lassen sich die Gleichungen von G auch in der Gestalt

[5]) A. Khintchine, Über eine Klasse linearer Diophantischer Approximationen, Palermo Rendiconti **50** (1926), 170—195, Hilfssatz 1.

[6]) V. Jarník, Über einen Satz von A. Khintchine, Prace Mathem.—Fizyczne **43** (1936), 151—166, Hilfssatz 2.

[7]) Im folgenden werden oft Zahlensysteme wie $[\eta_1, \ldots, \eta_s]$ als Punkte des s-dimensionalen Cartesischen Raumes betrachtet. Ein „Würfel" bedeutet stets einen achsenparallelen Würfel. μM bedeutet das äussere Lebesguesche Mass der Menge M.

$$bq_i\Theta_1 + bp_i\Theta_i + v_i = 0 \quad (i = 2, \ldots, s)$$

schreiben; beachtet man, dass $q_i > h$, $bp_i \neq 0$, $(bq_i, bp_i, v_i) \leqq \leqq (bq_i, bp_i) = b$, so sieht man, dass G auch die Eigenschaft B besitzt.

Hilfssatz 2. *Es sei* $s > 1$; $\varphi(\tau)$ *sei für* $\tau \geqq 0$ *wachsend und stetig,* $\varphi(0) = 0$; $\varphi(\tau) \to \infty$ *für* $\tau \to \infty$. *Dann gibt es ein eigentliches System* $\Theta_1, \ldots, \Theta_s$ *mit folgender Eigenschaft: zu jedem hinreichend grossen* τ *gibt es* $3(s-1)$ *Zahlen* y_i, z_i, u_i $(i = 2, \ldots, s)$ *mit folgenden Eigenschaften:*

$$y_i > 0,\ z_i \neq 0,\ (y_i, z_i, u_i) = 1,\ |\, y_i\Theta_1 + z_i\Theta_i + u_i \,| < \frac{1}{\tau},\quad (i = 2, \ldots, s)$$

$$\operatorname{Max}\,(|\, y_2 \,|, |\, y_3 \,|, \ldots, |\, y_s \,|, |\, z_2 \,|, |\, z_3 \,|, \ldots, |\, z_s \,|) \leqq \varphi(\tau).$$

Beweis.[8]) Wir betrachten zunächst alle $(s-1)$-dimensionalen Hyperebenen, welche mindestens einen Punkt des Würfels

$$E : 0 \leqq \Theta_i < 1 \qquad (i = 1, \ldots, s)$$

enthalten und deren Gleichungen sich in der Form

$$\sum_{i=1}^{s} a_i\Theta_i + a_0 = 0,\ (a_0, a_1, \ldots, a_s) = 1 \tag{11}$$

schreiben lassen. Die ganze positive Zahl $\operatorname{Max}\,(|\, a_1 \,|, \ldots, |\, a_s \,|)$ heisse der Rang der Hyperebene (11). Offenbar gibt es zu jedem $n > 0$ höchstens endlichviele Hyperebenen vom Rang n (da sie den Würfel E schneiden müssen). Es sei ψ die zu φ inverse Funktion.

Man konstruiere nun vier Folgen

$$G_1, G_2, \ldots;\ m_1, m_2, \ldots;\ P_1, P_2, \ldots;\ W_1, W_2, \ldots$$

mit folgenden Eigenschaften:

1. G_j ist eine Gerade, deren Gleichungen lauten:

$$y_{i,j}\Theta_1 + z_{i,j}\Theta_i + u_{i,j} = 0 \quad (i = 2, \ldots, s);$$

dabei ist

$$y_{i,j} > 0,\ z_{i,j} \neq 0,\ (y_{i,j}, z_{i,j}, u_{i,j}) = 1 \quad (i = 2, \ldots, s).$$

Ist $j > 1$, so liegt G_j in keiner Hyperebene vom Rang $< j$.

2. $m_j = \underset{i=2,\ldots,s}{\operatorname{Max}}\ (y_{i,j}, |\, z_{i,j} \,|)$;

$$y_{i,j+1} > m_j \text{ für } i = 2, \ldots, s; \text{ also } m_{j+1} > m_j.$$

3. P_j ist ein Punkt mit rationalen Koordinaten, der sowohl auf G_j als auch auf G_{j+1} liegt.

4. W_j ist ein abgeschlossener Würfel mit dem Mittelpunkt P_j, dessen Kante kleiner als

[8]) Die Systeme $[\Theta_1, \ldots, \Theta_s]$ werden als Punkte eines s-dimensionalen Raumes gedeutet.

$$\frac{1}{m_j\psi(m_{j+1})}$$

ist; ist $j > 1$, so enthält W_j keinen Punkt keiner Hyperebene vom Rang $< j$. Weiter ist $W_1 \subset E$, $W_{j+1} \subset W_j$.

Die Möglichkeit einer solchen Konstruktion sieht man durch Induktion ein:

G_1 sei die Gerade $\Theta_1 - \Theta_i = 0$ $(i = 2, \ldots, s)$, also $m_1 = 1$; $P_1 = [\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}]$. G_2 sei eine Gerade mit den Gleichungen

$$y_{i,2}\,\Theta_1 + z_{i,2}\,\Theta_i + u_{i,2} = 0 \quad (i = 2, \ldots, s),$$
$$y_{i,2} > m_1,\ z_{i,2} \neq 0,\ (y_{i,2}, z_{i,2}, u_{i,2}) = 1 \quad (i = 2, \ldots, s);$$

weiter möge G_2 den Punkt P_1 enthalten, aber in keiner Hyperebene vom Rang < 2 enthalten sein; das geht nach Hilfssatz 1. Dadurch ist $m_2 > m_1$ definiert. Endlich sei W_1 ein abgeschlossener Würfel mit dem Mittelpunkt P_1 und mit der Kantenlänge $< \frac{1}{m_1\,\psi(m_2)}$, $W_1 \subset E$.

Gesetzt nun, für ein $n > 0$ seien $G_1, \ldots, G_{n+1}$; $m_1, \ldots, m_{n+1}$; $P_1, \ldots, P_n$; $W_1, \ldots, W_n$ den aufgezählten Bedingungen gemäss konstruiert; dann konstruiert man G_{n+2}, m_{n+2}, P_{n+1}, W_{n+1} folgendermassen: Man wähle einen Punkt P_{n+1} mit rationalen Koordinaten auf G_{n+1} und innerhalb W_n, der in keiner Hyperebene vom Rang $< n+1$ liegt (das geht nach den Eigenschaften von G_{n+1}). Dann wähle man nach Hilfssatz 1 eine Gerade G_{n+2} durch den Punkt P_{n+1}, die ein keiner Hyperbene vom Rang $< n+2$ liegt und folgende Gleichungen hat:

$$y_{i,n+2}\Theta_1 + z_{i,n+2}\Theta_i + u_{i,n+2} = 0 \quad (i = 2, \ldots, s),$$
$$y_{i,n+2} > m_{n+1},\ z_{i,n+2} \neq 0,\ (y_{i,n+2}, z_{i,n+2}, u_{i,n+2}) = 1 \quad (i = 2, \ldots, s).$$

Dadurch ist $m_{n+2} > m_{n+1}$ definiert. Schliesslich wähle man um den Mittelpunkt P_{n+1} einen abgeschlossenen Würfel $W_{n+1} \subset W_n$, dessen Kante $< \frac{1}{m_{n+1}\,\psi(m_{n+2})}$ ist und der keinen Punkt keiner Hyperebene vom Rang $< n+1$ enthält (das geht nach der Wahl von P_{n+1}). Damit ist die Möglichkeit der Konstruktion bewiesen.

Es sei $P = [\Theta_1, \ldots, \Theta_s]$ der (eindeutig bestimmte) Punkt, der in allen W_j, also auch in E liegt. $\Theta_1, \ldots, \Theta_s$ ist ein eigentliches System; denn sonst müsste P in einer Hyperebene von irgendeinem Rang j liegen und das geht nicht, da P in W_{j+1} liegt. Es sei weiter τ eine positive Zahl mit $\varphi(\tau) \geqq 1 = m_1$; es gibt also ein $j > 0$ mit $m_j \leqq \varphi(\tau) < m_{j+1}$, also $\tau < \psi(m_{j+1})$.

Da P in W_j liegt, so ist, $P_j = [\eta_1, \ldots, \eta_s]$ gesetzt,

$$|\eta_i - \Theta_i| < \frac{1}{2m_j\,\psi(m_{j+1})} \quad (i = 1, \ldots, s),$$

$$y_{i,j}\,\eta_1 + z_{i,j}\,\eta_i + u_{i,j} = 0 \quad (i = 2, \ldots, s),$$

$$m_j \geqq y_{i,j} > 0, \; m_j \geqq | z_{i,j} | \neq 0, \quad (y_{i,j}, z_{i,j}, u_{i,j}) = 1 \quad (i = 2, \ldots, s),$$

also

$$| y_{i,j}\Theta_1 + z_{i,j}\Theta_i + u_{i,j} | < \frac{1}{\psi(m_{j+1})} < \frac{1}{\tau} \qquad (i = 2, \ldots, s)$$

und

$$| y_{i,j} | \leqq \varphi(\tau), \; | z_{i,j} | \leqq \varphi(\tau), \; y_{i,j} > 0, \; | z_{i,j}| \neq 0 \quad (i = 2, \ldots, s),$$

womit Hilfssatz 2 bewiesen ist.

Hilfssatz 3. *Gegeben seien zwei Zahlen: $s > 1$ und Θ_1. Es sei A die Menge derjenigen Punkte $[\Theta_2, \ldots, \Theta_s]$*[9]) *aus dem Einheitswürfel*

$$W\colon \quad 0 \leqq \Theta_i < 1 \quad (i = 2, \ldots, s),$$

welche folgende Eigenschaft haben: es gibt unendlichviele Systeme $x_0, x_1, \ldots, x_s$ mit

$$\operatorname*{Max}_{i=2,3\ldots,s} | x_i | > 0, \; \left|\sum_{i=1}^{s} x_i\Theta_i + x_0\right| < \frac{1}{\operatorname*{Max}\limits_{i=1,2\ldots,s} (| x_i |^s \log^2 (| x_i | + 3))}. \quad (12)$$

Behauptung: $\mu A = 0$.

Beweis. Bei gegebenen $x_0, x_1, \ldots, x_s$ mit $x' = \operatorname*{Max}\limits_{i=2,3,\ldots,s} | x_i | > 0$ sei $E\,(x_0, x_1, \ldots, x_s)$ die Menge aller Punkte $[\Theta_2, \ldots, \Theta_s]$ aus W mit (12); wird $x = \operatorname*{Max}\limits_{i=1,2,\ldots,s} | x_i |$ gesetzt, so ist offenbar

$$\mu E\,(x_0, x_1, \ldots, x_s) \leqq \frac{2}{x' x^s \log^2(x+3)}.$$

Bei gegebenen $x_1, x_2, \ldots, x_s$ gibt es höchstens $(2s + 1)\,x'$ Werte von x_0 mit $E\,(x_0, x_1, \ldots, x_s) \neq 0$. Die Reihe

$$\sum_{\substack{x_0, x_1, \ldots, x_s \\ x' > 0}} \mu E\,(x_0, x_1, \ldots, x_s) \quad (x' = \operatorname*{Max}_{i=2,3,\ldots,s} | x_i |) \qquad (13)$$

wird also konvergent sein, wenn die Reihe

$$\sum_{\substack{x_1, \ldots, x_s \\ x > 0}} \frac{2\,(2s + 1)}{x^s \log^2(x + 3)} \quad (x = \operatorname*{Max}_{i=1,2,\ldots,s} | x_i |)$$

konvergiert; und diese Reihe konvergiert tatsächlich; denn jedem Wert von x entsprechen $O(x^{s-1})$ Glieder der Reihe. Aus der Konvergenz der Reihe (13) folgt aber, dass diejenigen Punkte $[\Theta_2, \ldots,$

[9]) Wir arbeiten hier also im $(s - 1)$-dimensionalen Raum der Punkte $[\Theta_2, \Theta_3, \ldots, \Theta_s]$.

$\Theta_s]$, die in unendlichvielen Mengen $E(x_0, x_1, \ldots, x_s)$ mit $x' > 0$ liegen, eine Menge vom Mass Null bilden.[10])

Beweis des Satzes 4.

Es sei $2 < k \leqq n$. Man wähle die Funktion $\varphi(\tau)$ des Hilfssatzes 2 so, dass $\varphi(\tau) = \log\log\tau$ für hinreichend grosse τ ist und man wende Hilfssatz 2 mit $s = k - 1$ an. Es gibt also ein eigentliches System $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_{k-1}$ mit folgender Eigenschaft: zu jedem hinreichend grossen τ gibt es $3(k-2)$ Zahlen y_i, z_i, u_i $(i = 2, \ldots, k-1)$ mit

$$\left.\begin{array}{l} y_i > 0,\ z_i \neq 0,\ (y_i, z_i, u_i) = 1,\ |\, y_i\Theta_1 + z_i\Theta_i + u_i \,| < 1/\tau \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (i=2, \ldots, k-1), \\ \operatorname{Max}(|\, y_2 \,|, \ldots, |\, y_{k-1} \,|, |\, z_2 \,|, \ldots, |\, z_{k-1} \,|) \leqq \log\log\tau. \end{array}\right\} \quad (14)$$

Man wähle ein solches System $\Theta_1, \ldots, \Theta_{k-1}$. Diejenigen Punkte $[\Theta_k, \ldots, \Theta_n]$, für welche das System $\Theta_1, \ldots, \Theta_n$ *nicht* eigentlich ist, bilden im $(n - k + 1)$-dimensionalen Raume eine Menge vom Mass Null; denn aus $\sum_{i=1}^{n} a_i\Theta_i + a_0 = 0$, $\operatorname{Max}(|\, a_1 \,|, \ldots, |\, a_n \,|) > 0$ folgt, dass mindestens eine von den Zahlen $a_k, \ldots, a_n$ von Null verschieden ist (denn $\Theta_1, \ldots, \Theta_{k-1}$ ist ein eigentliches System); also sind die betrachteten Punkte $[\Theta_k, \ldots, \Theta_n]$ auf abzählbarviele $(n - k)$-dimensionalen Hyperebenen gebunden, bilden also tatsächlich eine Menge vom Mass Null. Nach Hilfssatz 3 (mit $s = n - k + 2$) kann man also $\Theta_k, \ldots, \Theta_n$ so wählen, dass erstens das System $\Theta_1, \ldots, \Theta_n$ eigentlich ist und dass zweitens die Ungleichungen

$$\operatorname*{Max}_{i=k,\ldots,n} |\, v_i \,| > 0, \quad |\, v_1\Theta_1 + \sum_{i=k}^{n} v_i\Theta_i + v_0 \,| < \frac{1}{\operatorname*{Max}\limits_{i=1,k,\ldots,n} (|v_i|^{n-k+2} \log^2(|v_i| + 3))}$$

höchstens endlichviele Lösungen in $v_0, v_1, v_k, \ldots, v_n$ haben. Daraus folgt, dass für hinreichend grosses λ die Ungleichungen

$$0 < \operatorname*{Max}_{i=k,\ldots,n} |\, v_i \,| \leqq \lambda, \quad |\, v_1 \,| \leqq \lambda, \quad |\, v_1\Theta_1 + \sum_{i=k}^{n} v_i\Theta_i + v_0 \,| < \frac{1}{2\lambda^{n-k+2}\log^2\lambda} \tag{15}$$

überhaupt keine Lösung in $v_0, v_1, v_k, \ldots, v_n$ besitzen. Um den

---

[10]) Beweis: Ist $\sum_{n=1}^{\infty} \mu N_n$ konvergent und ist N die Menge derjenigen Punkte, die in unendlichvielen Mengen N_n liegen, so ist $N \subset \sum_{n=k}^{\infty} N_n$, also $\mu N \leqq \sum_{n=k}^{\infty} \mu N_n$ für jedes $k > 0$, also $\mu N = 0$.

Satz 6 zu beweisen, genügt es zu zeigen: ist t hinreichend gross, so gibt es *kein* k-System $x_0, x_1, \ldots, x_n$ mit

$$\operatorname{Max}(|x_1|, \ldots, |x_n|) \leqq t, \quad \left| \sum_{i=1}^{n} x_i \Theta_i + x_0 \right| \leqq \frac{1}{t^{n-k+2} \log^b t}. \tag{16}$$

Gesetzt, (16) sei für ein k-System $x_0, x_1, \ldots, x_n$ wahr; daraus wollen wir für hinreichend grosses t einen Widerspruch herleiten. Nach Voraussetzung gäbe es ein l mit $k \leqq l \leqq n$, $x_l \neq 0$. Man wähle ein System y_i, z_i, u_i $(i = 2, \ldots, k-1)$, sodass (14) mit $\tau = e^t$, also $\log \log \tau = \log t$ gilt (alles für hinreichend grosse t). Man multipliziere (16) mit $z_2 z_3 \ldots z_{k-1}$ und benutze (14) (mit $\tau = e^t$); dadurch bekäme man

$$\left| \Theta_1 \left(x_1 \prod_{j=2}^{k-1} z_j - \sum_{i=2}^{k-1} x_i y_i \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^{k-1} z_j\right) + \sum_{i=k}^{n} \Theta_i x_i \prod_{j=2}^{k-1} z_j + v_0 \right|$$

$$< \frac{(k-2)\, t \log^{k-3} t}{e^t} + \frac{(\log t)^{k-2}}{t^{n-k+2} (\log t)^{(n-k+3)(k-1)+3}}$$

$$< \frac{1}{t^{n-k+2} (\log t)^{(n-k+2)(k-1)+3}}. \tag{17}$$

Setzt man also

$$\lambda = t \log^{k-1} t > (k-1)\, t \log^{k-2} t,$$

und setzt man v_i $(i = 1, k, \ldots, n)$ gleich dem Koeffizienten von Θ_i im Ausdruck (17), so wäre erstens $v_l \neq 0$, zweitens

$$0 < \operatorname*{Max}_{i=k,\ldots,n} |v_i| \leqq \lambda, \quad |v_1| \leqq \lambda, \quad \left| v_1 \Theta_1 + \sum_{i=k}^{n} v_i \Theta_i + v_0 \right| <$$

$$< \frac{1}{\lambda^{n-k+2} \log^3 t} < \frac{1}{2 \lambda^{n-k+2} \log^2 \lambda},$$

also wäre (15) wahr, was für hinreichend grosses t den gesuchten Widerspruch liefert.

*

O přibližném řešení rovnice $x_1 \Theta_1 + \ldots + x_n \Theta_n + x_0 = 0$ celými čísly.

(Obsah předešlého článku.)

Malá latinská písmena nechť znamenají celá čísla. Jsou-li $\Theta_1, \ldots, \Theta_n$ reálná čísla, potom platí, jak známo, tyto věty:

I. Pro každé $t > 0$ mají nerovnosti

$$0 < \operatorname{Max}(|x_1|, \ldots, |x_n|) \leqq t, \quad \left| \sum_{i=1}^{n} x_i \Theta_i + x_0 \right| < t^{-n} \tag{1}$$

řešení.

Tedy tím spíše:

II. Pro nekonečně mnoho $t > 0$ mají nerovnosti (1) řešení.

Je známo, že exponent $-n$ nelze ani ve větě I ani ve větě II snížiti.

V tomto článku vyšetřuji, jak je nutno modifikovati věty I, II, jestliže požadujeme, aby aspoň k čísel x_i $(1 \leqq i \leqq n)$ bylo od nuly různých. Pro $k = 1$ máme věty I, II. Je-li $1 < k \leqq n$, lze hlavní výsledek vysloviti zhruba asi takto: exponent $-n$ je nutno ve větě I nahraditi exponentem $-(n - k + 1)$ a ve větě II exponentem $-(n - k + 2)$; žádný z těchto exponentů nelze snížiti. (Přesně je výsledek vysloven ve větách 1. až 4.)