Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Vojtěch Jarník
Poznámka k methodě postupných approximací

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 52 (1923), No. 1-2, 51--55

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123252

construction des courbes représentant les fonctions $y = f(x)\, g(x)$ et $y = g(x) : f(x)$ est la suivante: Menons par l'originela droite (ζ), choisissons sur (ζ) le pôle à l'ordonnée δ et projetons les points M, N des courbes f et g, sur la droite (ζ) et sur l'axe des (η) suivant les points M', N'. La parallèle $M'\,S'$ à la droite $\overline{PN'}$ détermine sur l'axe des (η) le point S' qui, projeté sur l'ordonnée des points M et N, donne un point S de la courbe fg, représentant la fonction $y = f(x)\, g(x)$. Le module pour les ordonnées de la courbe fg est $\frac{\beta\gamma}{\delta}$. La parallèle $\overline{PQ'}$ à la droite $\overline{M'N'}$ détermine le point Q', lequel, projeté sur l'ordonnée des points M et N, donne un point Q de la courbe $g:f$, représentant la fonction $y = g(x) : f(x)$; le module des ordonnées est $\delta\frac{\gamma}{\beta}$.

On peut se servir de cette construction dans beaucoup de cas, p. ex. pour calculer graphiquement les moments statiques S et les moments d'inertie T (n^0 3). Il suffit de trouver les aires des courbes qui représentent les fonctions $y^2 = y \,.\, y$ et $y^3 = y^2 \,.\, y$. Un autre exemple est donné dans la fig. 2. (n^0 4), où la résolution purement graphique de l'équation intégrale (1) est indiquée; c'est l'équation considérée par M. d'Ocagne dans son „Cours de géométrie pure et appliquée". En modifiant légèrement le procédé, on peut construire de la même facon les courbes représentant les fonctions $f(x) \cos i\, x$ et $f(x) \sin i\, x$, la courbe f étant donnée (fig. 3). On en peut faire usage dans l'analyse harmonique.

Poznámka k methodě postupných approximací.

Napsal *V. Jarník.*

Lalesco*) řešil methodou postupných approximací integrální rovnici nelineární 2. druhu

$$\varphi(x) + \int_0^x \Phi[x, s, \varphi(s)]\, ds = F(x);$$

v následujícím ukáži, jak lze této methody užíti i na rovnici nelineární 1. druhu

$$\int_0^x \Psi[x, s, \varphi(s)]\, ds = 0.$$

I.

Hledejme funkci $\varphi(x)$, spojitou v okolí bodu $x = 0$, jež hoví rovnici

*) Journal de mathém. 1908.

$$(1) \qquad \Phi_1(x, \varphi(x)) = \int_0^x \Psi_1(x, s, \varphi(s))\, ds;$$

bez újmy na obecnosti předpokládejme $\varphi(0) = 0$.

Zaveďme tyto předpoklady:

$$a) \qquad \Phi_1(x, t),\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial t},\ \Psi_1(x, s, t)$$

jsou spojité funkce v oborech

$$(2) \qquad |x| < a,\ |t| < b$$

resp. $(2') \qquad |x| < a,\ |s| < a,\ |t| < b.$

Za těchto předpokladů musí býti ovšem $\Phi_1(0, 0) = 0$, má-li rovnice (1) vůbec míti spojité řešení, redukující se na 0 pro $x = 0$; učiňme tento předpoklad.

b) Existuje číslo K' takové, že pro všechna

$$|x| < a,\ |s| < a,\ |t| < b,\ |t'| < b$$

platí $\qquad |\Psi_1(x, s, t) - \Psi_1(x, s, t')| < h K' |t - t'|$.

$$c) \qquad \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} = h \neq 0 \qquad \text{pro } x = 0,\ t = 0.$$

Potom, píšeme-li

$\Phi_1(x, t) = ht - [ht - \Phi_1(x, t)] = ht - h\Phi(x, t)$, $\Psi_1(x, s, t) = h\,\Psi(x, s, t)$

změní se rovnice (1) v rovnici

$$(3) \qquad \varphi(x) - \Phi[x, \varphi(x)] = \int_0^x \Psi[x, s, \varphi(s)]\, ds,$$

kde funkce Φ, Ψ splňují opět podmínky *a)* a dále podmínky

$$b') \quad |\Psi(x, s, t) - \Psi(x, s, t')| < K' |t - t'|$$

$$c') \quad \Phi = 0,\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad \text{pro } x = 0,\ t = 0.$$

Buďtež dáte a a b již tak malé, že v oboru (2) je $\left|\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right| < K$, kde K je jisté číslo menší než 1; budiž dále $|\Psi(x, s, t)| < M$ v oboru (2').

Hledejme nyní funkce spojité v okolí bodu $x = 0$, $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ hovící rovnicím

$$(4) \qquad \begin{cases} \varphi_0(x) = \Phi(x, \varphi_0(x)), \\ \varphi_n(x) = \Phi(x, \varphi_n(x)) + \displaystyle\int_0^x \Psi(x, s, \varphi_{n-1}(s))\, ds \end{cases}$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots),$$

pro něž $\varphi_0(0) = \varphi_1(0) = \ldots = 0$.

Dle známé věty o implic. funkcích platí:

Jsou-li $f(x, y)$, $f'_y(x, y)$ funkce spojité pro

$$|x| < a, \; |y| < b, \quad \text{je-li } f(0,0) = f'_y(0,0) = 0,$$

je-li dále v tomto oboru

$$|f'_y(x, y)| < K < 1 \quad \text{a} \quad |f(x, 0)| < (1-K)\, b;$$

potom existuje jedna a jen jedna funkce $y(x)$, spojitá pro $|x| < a$, hovící rovnici $y = f(x, y)$ a taková, že $y(0) = 0$; platí pak $|y(x)| < b$ pro $|x| < a$.*)

Této věty použijeme při řešení rovnic (4). Volme si především $a' \leqq a$ tak, aby pro $|x| < a'$ platilo

$$|\Phi(x, 0)| + M a' < (1-K)\, b;$$

potom první z rovnic (4) má dle citované věty jediné řešení $\varphi_0(x)$, hovící našim podmínkám, spojité pro $|x| < a'$ a takové, že

$$|\varphi_0(x)| < b \quad \text{pro} \quad |x| < a'.$$

Tedy platí pro $|x| < a'$:

$$\left| \Phi(x, 0) + \int_0^x \Psi(x, s, \varphi_0(s))\, ds \right| < (1-K)\, b,$$

a tedy dostáváme opět řešení $\varphi_1(x)$, které je spojité pro $|x| < a'$ a pro něž $|\varphi_1(x)| < b$ pro $|x| < a'$. Postupujíce tak, dostáváme posloupnost funkcí $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$, hovících rovnicím (4), spojitých pro $|x| < a'$ a takových, že $|\varphi_i(x)| < b$ pro $|x| < a'$, $\varphi_i(0) = 0$.

Dokáži nyní: funkce $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \ldots$ konvergují v intervalu $|x| < a'$ stejnoměrně k jisté funkci $\varphi(x)$. Tato funkce pak ovšem — jak snadno lze nahlédnouti — bude hledaným řešením rovnice (3) a tedy i rovnice (1).

Platí totiž dle (4) pro $n \geqq 2$

$$\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x) = \Phi(x, \varphi_n(x)) - \Phi(x, \varphi_{n-1}(x))$$
$$+ \int_0^x \left[\Psi(x, s, \varphi_{n-1}(s)) - \Psi(x, s, \varphi_{n-2}(s)) \right] ds,$$

z čehož vzhledem k $|\varphi_i(x)| < b$ plyne pro $|x| < a'$

$$|\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)| < K\, |\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)|$$
$$+ \left| \int_0^x K' \, |\varphi_{n-1}(s) - \varphi_{n-2}(s)|\, ds \right|.$$

*) *Goursat*, Bull. de la Soc. math. 1903; nebo Cours d'Analyse, T. 1., deuxième éd.

Čtenář snadno dokáže tuto větu, položí-li

$$y_0 = f(x, o), \; y_1 = f(x, y_0), \; y_2 = f(x, y_1), \ldots \text{ a } y = \lim_{n=\infty} y_n.$$

Z této nerovniny pak — ježto $| \varphi_1(x) - \varphi_0(x) | < 2b$ — snadno odvodíme nerovninu

$$| \varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x) | < \frac{2b\, K'^{n-1}\, | x |^{n-1}}{(1-K)^{n-1}\, (n-1)!},$$

z níž stejnoměrná konvergence snadno plyne.

Řešení toto jest jediné; neboť kdyby existovalo jiné řešení $\overline{\varphi}(x)$, spojité v okolí $x = 0$ a takové, že $\overline{\varphi}(0) = 0$, bylo by pro každé $n \geqq 1$

$$\overline{\varphi}(x) - \varphi_n(x) = \Phi(x, \overline{\varphi}(x)) - \Phi(x, \varphi_n(x))$$

$$+ \int_0^x \left[\Psi(x, s, \overline{\varphi}(s)) - \Psi(x, s, \varphi_{n-1}(s)) \right] ds;$$

tedy by v jistém okolí $x = 0$, v němž $| \overline{\varphi}(x) | < b$, platilo

$$| \overline{\varphi}(x) - \varphi_n(x) | < K | \overline{\varphi}(x) - \varphi_n(x) |$$

$$+ \left| \int_0^x K' \, | \overline{\varphi}(s) - \varphi_{n-1}(s) | \, ds \right|;$$

z toho jako dříve

$$| \overline{\varphi}(x) - \varphi_n(x) | < \frac{2b\, K'^n\, | x |^n}{(1-K)^n\, n!},$$

takže vskutku $\overline{\varphi}(x) = \lim\limits_{n=\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$.

II.

Rovnici

$$\int_0^x \Psi[x, s, \varphi(s)]\, ds = 0$$

převedu derivováním na rovnici typu (1):

$$\Psi(x, x, \varphi(x)) + \int_0^x \frac{\partial \Psi(x, s, \varphi(s))}{\partial x}\, ds = 0.$$

Abychom mohli applikovati předešlou větu, musí býti splněny tyto podmínky:

a) $\Psi(x, x, t)$, $\dfrac{\partial \Psi(x, x, t)}{\partial t}$, $\dfrac{\partial \Psi(x, s, t)}{\partial x}$

musí býti spojité funkce pro x, s, t dosti malé;

b) $\Psi(0, 0, 0) = 0$;

c) $\left| \dfrac{\partial \Psi(x, s, t)}{\partial x} - \dfrac{\partial \Psi(x, s, t')}{\partial x} \right| < K' \, | t - t' |$

pro všechna x, s, t, t' jistého okolí počátku;

d) $\dfrac{\partial \Psi(x, x, t)}{\partial t} \neq 0$ pro $x = 0$, $t = 0$.

Pro rovnici lineární 1. druhu

$$\int_0^x K(x, s)\, \varphi(s)\, ds = F(x) \qquad (F(0) = 0)$$

je $\Psi(x, s, \varphi(s)) = K(x, s)\, \varphi(s) - F'(s)$,
a dostáváme známé podmínky:
spojitost $K(x, s)$, $\frac{\partial K(x, s)}{\partial x}$, $F'(s)$, podmínku $F'(0) = 0$ (souvisí s tím, že má býti $\varphi(0) = 0$) a podmínku $K(0, 0) \neq 0$.

*

Une remarque sur la méthode des approximations successives.

(Extrait de l'article précédent.)

Soit $\varphi(x)$ une fonction inconnue; M. Lalesco*) a résolu l'équation intégrale non linéaire

$$\varphi(x) + \int_0^x \Phi[x, s, \varphi(s)]\, ds = F(x)$$

par la méthode des approximations successives. J'envisage l'équation plus générale

$$\Phi[x, \varphi(x)] = \int_0^x \Psi[x, s, \varphi(s)]\, ds \tag{1}$$

et je trouve que les conditions suffisantes pour l'existence et l'unicité d'une solution continue dans le voisinage du point $x=O$ — en dehors de quelques conditions de continuité rélatives aux fonctions Φ et Ψ — sont exprimées par les relations

$$\Phi[0, \varphi(0)] = 0, \left[\frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial t}\right]_{\substack{x = o \\ t = \varphi(o)}} \neq 0.$$

L'équation de la première espèce non linéaire

$$\int_0^x \Psi[x, s, \varphi(s)]\, ds = 0 \tag{2}$$

peut être réduite à l'équation du type (1) par une dérivation, et les conditions précédentes deviennent

$$\Psi[0, 0, \varphi(0)] = 0, \left[\frac{\partial \Psi(x, x, t)}{\partial t}\right]_{\substack{x = o \\ t = \varphi(o)}} \neq 0.$$

L'équation de M. Lalesco et l'équation linéaire de la [ère] espèce rentrent, comme cas particulièrs, dans les types (1), resp. (2), et on retrouve pour elles les conditions connues.

*) Journal de Math. 1908.