Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Milan Mikan

Kruhová geometrie v P_3 a přímková v P_4

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 64 (1935), No. 6, 195--196

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123589

Über einige Abbildungsmöglichkeiten der Punkte des R_3 auf Kegelschnitte.

Dr. *R. Kreutzinger*, Brünn.

Herr L. Eckhart stellte kurz die allgemeine Bedingung für jene Gruppe von Abbildungsmöglichkeiten auf, die einem reellen Punkte des R_3 eine in der Bildebene π liegende Kurve zuordnen. (Siehe Sitzungsber. Akadem. Wien, 1923, Bd. 132.) Von den hierher gehörigen Möglichkeiten wurde einzig die „Zyklographie" durch E. Müller gründlichst ausgebaut, auf deren Verallgemeinerungsfähigkeit dieser auch hingewiesen hat. (Siehe u. a. obige Arbeit von L. Eckhart, S. 129.)

Im folgenden sollen einige hierher gehörige Abbildungsmöglichkeiten kurz behandelt werden, deren Fruchtbarkeit als Übertragungsprinzip zwischen räumlicher und ebener Geometrie an diesem oder jenem charakteristischen Beispiel klargelegt werden soll.

In der durch Abbildung der Polarität an einer festen Kugelfläche erzeugbaren „Verallgemeinerten Stereogr. Projektion" wird jedem Raumpunkt ein Kreis ein-eindeutig zugeordnet. Diese Abbildung gestattet u. a. Sätze über Raumkurven in solche über krumme Kreisreihen in der Bildebene zu übertragen.

Wenig bekannt ist auch die Abbildung der Raumpunkte auf die dreidimensionale Manigfaltigkeit monofokaler Kegelschnitte.

Ferner soll die Abbildung von Raumpunkten auf in der Bildebene liegende homothetische Parabeln, Ellipsen bzw. Hyperbeln behandelt werden, welche Abbildungsmöglichkeiten auch E. Müller andeutungsweise erwähnt. Doch sollen diese auf ganz anderem Wege abgeleitet werden.

Kruhová geometrie v P_3 a přímková v P_4.

Dr. *Milan Mikan*, Praha.

Buďtež $x_i, i_0^4|$ pentasférické souřadnice pl. kulové v P_3 a $\begin{Bmatrix}\bar{x}_i\\ \overset{\simeq}{x}_i\end{Bmatrix}$ homog. souřadnice $\begin{Bmatrix}\text{bodu}\\ \text{prostoru}\end{Bmatrix}$ v P_4, $\bar{x}_i = x_i$, $\overset{\simeq}{x}_0 = -x_0$, $\overset{\simeq}{x}_k = x_k$, $k_4^1|$. Kružnice (bodová dvojice) o souřadnicích a_{ij} A_{klm} zobrazuje $\begin{Bmatrix}\text{přímku}\\ \text{rovinu}\end{Bmatrix}$ v P_4 o souřadnicích $\begin{Bmatrix}\bar{a}_{ij} = a_{ij}, & \overset{\simeq}{\bar{A}}_{0lm} = -A_{0lm},\\ \overset{\simeq}{a}_{0j} = -a_{0j}, & \overset{\simeq}{a}_{ij} = a_{ij},\end{Bmatrix}$

$$\left.\begin{matrix}\overset{\simeq}{A}_{klm} = A_{klm}\ k_1^4|,\ i, j, l, m_0^4|, & \bar{a}_{ij} = \varrho \overset{\simeq}{\bar{A}}_{klm}\\ \bar{A}_{klm} = A_{klm},\ i_1^4|\ i_1^4|,\ j, k, l, m_0^4|, & \overset{\simeq}{a}_{ij} = \sigma \bar{A}_{klm}\end{matrix}\right\},\ i < j \neq k < l < m.^{1)}$$

---

1) Toliko $\begin{Bmatrix}\text{bodům}\\ \text{prostorům}\end{Bmatrix}$ pro něž $\begin{Bmatrix}(\bar{x}\bar{x}) > 0\\ (\overset{\simeq}{x}\overset{\simeq}{x}) > 0\end{Bmatrix}$ přísluší v P_3 reál. pl.

Projektivní grupa v P_4 je v P_3 zobrazena grupou Π, v níž je invariantní kružnice a ortogonálnost pl. kulových, ne však dotyk, tato grupa není Lie-ova. Desetičlenná Möbiova grupa v P_3 (společná podgrupa Lie-ovy grupy a Π-grupy) zobrazuje hyperbolické pohyby v P_4 o absol. sféře $(\overline{x}\overline{x}) = 0$. Möbiovy invarianty kružnic a, b jsou:

$$K = \frac{S^2}{M\,.\,N}, \quad S = -\,{}_i\sum_1^4 a_{0i}b_{0i} + {}_{j,\,k}\sum_1^4 a_{jk}b_{jk}, \quad M = -\,\Sigma a_{0i}{}^2 + \Sigma a_{jk}{}^2,$$

$$N = -\,\Sigma b_{0i}{}^2 + \Sigma b_{jk}{}^2, \; j < k; \; H = {}_i\sum_0^4 \big({}_k\sum_0^4 a_{ik}b_{ik}\big)^2;$$

1. $K = S = 0$, 2. $H = 0$ vyjadřují $\left\{\begin{matrix}\text{v } P_3\\ \text{v } P_4\end{matrix}\right\}$ že 1. $\left\{\begin{matrix}\text{kružnicí } a\\ \text{přímka } a\end{matrix}\right\}$

$\left\{\begin{matrix}\text{lze proložiti pl. kulovou } \perp \text{ k } b\text{, že bodová dvojice } b \text{ leží s kružnicí}\\ \text{protíná rovinu } b\text{, že polární prostor jednoho bodu přímky } a \text{ vzhle-}\end{matrix}\right\}$

$\left\{\begin{matrix}a \text{ na téže pl. kulové.}\\ \text{dem k sféře prochází přímkou } b.\end{matrix}\right.$

2. $\left\{\begin{matrix}\text{Všechny pl. kulové proložené kružnicí } a \text{ jsou } \perp \text{ k } b\text{, že}\\ \text{Přímka } a \text{ leží v rovině } b\text{, že přímky } a, b \text{ jsou polárně}\end{matrix}\right\}$

$\left\{\begin{matrix}\text{bodová dvojice } b \text{ leží na kružnici } a.\\ \text{sdružené vzhledem k sféře.}\end{matrix}\right.$

Z vět přímkové geometrie v P_4 vyplývají věty kruhové geometrie v P_3 a naopak. Na př. jsou-li dány a_{ij} jakožto analytické funkce parametru t a značí-li čárky derivace podle t, podmínka aby přímková plocha v P_4 ležela v témž Q_3 jest: $\dfrac{d\Sigma^{(m)}a'_{ij}{}^{(m)}a'_{kl}}{dt} = 0$;[2]) je to též podmínka, aby povrchové kružnice cyklické plochy v P_3 byly $\perp$ k téže pl. kulové (reál. nebo imag.).

Další věty vyplývají též na př. pro víceparametrové soustavy kruhové v P_4.

Tyto úvahy lze rozšířiti na geometrii přímek a prostorů P_{n-1} v P_n v souvislosti s geometrií $\left\{\begin{matrix}(n-2)\text{-rozměrných sfér}\\ \text{bodových dvojic}\end{matrix}\right\}$ v P_{n-1}.

---

kulové, $\left\{\begin{matrix}\text{bodům } (\overline{x}\overline{x}) = 0\\ \text{prostorům } (\overline{\overline{x}}\overline{\overline{x}}) = 0\end{matrix}\right\}$ body, přímkám-nesečnám sféry reál. kružnice, atd.

[2]) ${}^{(m)}a_{ij} = a_{ij}$, $i \neq j \neq k \neq l \neq m$, $i, j, k, l, m\,{}_0^4|$; (pro i vždy konst., j, k, l cyklickou záměnou) Σ je skalární součin o třech členech.