Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Karel Dusl

O větě Brillově-Nötherově pro funkce Prymovy

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 58 (1929), No. 3-4, 264--267

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/124028

O větě Brillově-Nötherově pro funkce Prymovy.

Napsal *Karel Dusl.*

Budiž funkce multiplikativní[1]) F s místy singulárními $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ $\ldots \gamma_k$, jimž přísluší $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$ jako multiplikátory. Vedle toho mějž systém multiplikátorů $h_1, h_2, \ldots h_p$; $g_1, g_2, \ldots g_p$ na obou systémech řezů a, b příslušné Riemannovy plochy. Nulové body funkce F buďtež $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_N$ a póly $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_M$, takže

$$N - M = \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu. \tag{1}$$

Jsou-li póly $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_M$ dány, bude tato funkce obsahovati podle věty Riemann-Rochovy

$$q + 1 = N - p + 1 + h + 1 \tag{2}$$

konstant libovolných, lineárně nezávislých, z nichž jedna je multiplikativní. Číslo $h + 1$ udává pak počet Abelových diferenciálů prvního druhu, které vymizejí v N nulových bodech $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_N$ funkce F.

Jestliže je toto číslo $h + 1 > 0$, jsou funkce F funkcemi „speciálními" a poskytují úplnou obdobu „speciálním" funkcím racionálním na ploše Riemannově. Nulové body $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_N$ vyhovují pak $h + 1$ rovnicím tvaru

$$\Phi_r(\beta_k) = \frac{dv_1(\beta_k)}{dx} - A_{1,r} \frac{dv_{h+2}(\beta_k)}{dx} - \ldots - A_{p-(h+1),r} \frac{dv_p(\beta_k)}{dx} = 0$$
$$r = 1, 2, \ldots h + 1 \qquad k = 1, 2, \ldots N \tag{3}$$

Této funkci F můžeme přiřaditi multiplikativní funkci druhého systému multiplikátorů tvaru

$$P' = \frac{R}{K}, \quad \sigma' + 1 > 0$$

[1]) *Appell*: „Sur les intégrales des fonctions à multiplicateurs" J. Liouv. 1884. *Prym-Rost*: „Theorie der Prymschen Functionen". Jubilejní spis 1911. *Forsyth*: Theory of functions. 531. *Baker*: „Abels Theorem" 406. *Autor*: Věstník II. třídy XXX. č. 50 XXXII. č. 27.

$$R = \frac{c_1\Phi_1 + c_2\Phi_2 + \ldots + c_{h+1}\Phi_{h+1}}{c_1\Phi_1}. \qquad \text{(I)}$$

R jest racionální funkce na ploše Riemannově. K jest všude konečná (vyjma míst $c_1, c_2, \ldots c_k$) multiplikativní funkce téhož systému multiplikátorů jako funkce F, což ovšem předpokládá, že počet takových funkcí $\sigma' + 1 > 0$. Funkce P' náleží pak systému multiplikátorů

$$\lambda' + 1,\ g',\ h'$$

při čemž

$$\lambda + \lambda' + 1 = 0, \quad g + g' = 0, \quad h + h' = 0. \qquad (4)$$

Póly racionální funkce R jsou v nulových bodech funkce Φ_1 a těch jest $2p - 2$, avšak N z nich, t. j. $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_N$ nejsou podle (3) póly funkce R a tedy zbývá

$$N' = 2p - 2 - N \qquad \text{(II)}$$

pólů. Nazývejme je

$$\beta'_1, \beta'_2, \ldots \beta'_{N'}.$$

Nulové body funkce R označme $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots \alpha'_{N'}$; $N' - h$ jich lze podle věty Riemann-Rochovy libovolně zvoliti, což odpovídá volbě konstant $c_1, c_2, \ldots c_{h+1}$. Multiplikativní funkce K nemá pólů, počet jejích nulových bodů jest $\Sigma\lambda$. Má tudíž funkce P': $N' + \Sigma\lambda$ pólů a N' bodů nulových, takže jest $N' - \Sigma\lambda - N' = \Sigma(\lambda + 1)$ podle rovnice (4).

Podle věty Riemann-Rochovy bude funkce multiplikativní P' obsahovati

$$N' - p + 1 + h' + 1$$

libovolných konstant a tudíž musí

$$h + 1 \leq N' - p + 1 + h' + 1, \qquad \text{(III)}$$

při čemž číslo $h' + 1$ udává, kolik lineárních forem z funkcí $\Phi_1(x), \Phi_2(x), \ldots \Phi_p(x)$ vymizí v místech $\beta'_1, \beta'_2, \ldots \beta'_{N'}$. Označme tyto funkce

$$\Phi'_1, \Phi'_2, \ldots \Phi'_{h'+1}.$$

Utvořme pak funkci multiplikativní

$$P = R'K, \quad \sigma + 1 = 0^{2)} \qquad \text{(IV)}$$

obdobně, jako jsme utvořili funkci P'. Tato funkce náleží systému multiplikátorů

$$\lambda_\mu,\ g_\nu\ h_\nu,$$

a racionální funkce R' bude míti tvar

$$R' = \frac{c'_1\Phi'_1 + c'_2\Phi'_2 + \ldots + c'_{h'+1}\Phi'_{h'+1}}{c'_1\Phi'_1} \qquad (5)$$

s póly v místech $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_N$ a N nulovými body, které označme $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_N$, z nichž $N - h'$ lze zvoliti, což podle Riemann-Ro-

[2]) Jedno z čísel $\sigma + 1$, $\sigma' + 1$ jest vždy $= 0$ existují-li místa c_μ.

chovy věty odpovídá volbě konstant $c'_1, c'_2, \dots c'_{h'+1}$. Jelikož funkce K má $\Sigma\lambda$ nulových bodů, bude míti multiplikativní funkce P celkem N pólů a $N + \Sigma\lambda$ nul. bodů, takže opět ve shodě s (1)

$$N + \Sigma\lambda - N = \Sigma\lambda.$$

Podle Riemann-Rochovy věty musí opět

$$h' + 1 \leqq N - p + 1 + h + 1. \tag{V}$$

Jelikož

$$N + N' = 2p - 2, \tag{6}$$

t. j.

$$N - p + 1 = - N' + p - 1, \tag{7}$$

musí v obou nerovnostech (III) a (V) platiti dolní znamení rovnosti a tudíž

$$2(h - h') = N' - N. \tag{VI}$$

Platí tudíž věta Brill-Nötherova[3]) v následujícím znění:

„Mějtež dvě speciální multiplikativní funkce téhož systému multiplikátorů nulové body v místech $\beta_1, \beta_2, \dots \dots \beta_N; \beta'_1, \beta'_2, \dots \beta'_N$, takže

$$N + N' = 2p - 2,$$

pak jest

$$2(h - h') = N' - N,$$

při čemž přebytky $h + 1$, $h' + 1$ udávají počet multiplikativních („Prymových“) diferenciálů druhého systému multiplikátorů, které vymizejí v M (resp. M') pólech funkce F (resp. F'). To je úplná obdoba věty Brill-Nötherovy pro funkce racionální.

Jestliže pro daný systém multiplikátorů vychází $\sigma + 1 > 0$ a $\sigma' + 1 = 0$, zvolíme funkci $P' = RK'$ a funkci $P = \frac{R}{K}$, ostatní počet vychází stejně.

Geometricky lze vysloviti: Číslo $h + 1$ udává počet neurčených koeficientů v rovnici adjungované křivky stupně $n - 3$, předepíšeme-li, že křivka má procházeti všemi N: $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_N$ nulovými body funkce F. Všech lineárně nezávislých křivek adjungovaných stupně $n - 3$ jest p a $h + 1$ z nich prochází N body $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_N$. I jest podle Riemann-Rochovy věty

$$N - h' \leqq p - h + 1, \tag{VII}$$

při čemž $h' + 1$ jich prochází body N', takže opět

$$N' - h = p - h' + 1. \tag{VIII}$$

Obě rovnice (VII) a (VIII) poskytují Brill-Nötherovu větu (VI). Tím je patrna reciprocita obou čísel $N - h'$, $N' - h$.

[3]) *Brill-Nöther*: Math. Annalen. Sv. VII (1874) 283.

Lè théorème de Brill-Nöther pour les fonctions à multiplicateurs (de F. Prym).

(Extrait de l'article précédent.)

Par analogie aux fonctions rationelles sur une surface de Riemann, l'auteur considère des fonctions à multiplicateurs „speciales" (F) c'-est-à dire telles dont les zéros (simples) $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_N$ satisfont à $h + 1$ équations de la forme:

$$\Phi_r(\beta_k) = \frac{dv_r(\beta_k)}{dx} - A_{1,r}\frac{dv_{h+2}(\beta_k)}{dx} - \ldots - A_{p-(h+1)r}\frac{dv_p(\beta_k)}{dx} \quad \text{(I)}$$

$$r = 1, 2, \ldots h + 1$$
$$k = 1, 2, \ldots N$$

où $v_1, v_2 \ldots v_p$ signifient les p intégrales d'Abel de la première espèce.

Une fonctions F', appartenant au même système de multiplicateurs, dont les zéros (simples) $\beta_1', \beta'_2, \ldots \beta'_{N'}$ forment une suite à $N' = 2p - 2 - N$ termes, est une fonction „spéciale" et les zéros mentionnés ci-dessus rendent nuls les $h' + 1$ différentielles abéliennes de la forme (I).

L'auteur établit l'équation:

$$2(h - h') = N' - N \quad \text{(II)}$$

qui constitue une analogie parfaite du théorème de Brill-Nöther, bien connu pour les fonctions rationelles.

Ona tout simplement:

$$\begin{aligned} N - h' &= p - (h + 1) \\ N' - h &= p - (h' + 1) \end{aligned} \quad \text{(III)}$$

Sous cette forme du théorème de Brill-Nöther, la réciprocité parfaite des deux suites de zéros:

$$\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_N; \ \beta_1', \beta_2', \ldots \beta'_{N'}$$
$$N + N' = 2p - 2.$$

est évidente.