Ludvík Frank

Spor Matyáše Lercha s Alfredem Pringsheimem

In: Otakar Borůvka (editor): Dílo Matyáše Lercha v oboru matematické analýzy. (Czech). Praha: Nakladatelství československé akademie věd, 1957. pp. 532–538.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401322

LUDVÍK FRANK

# SPOR MATYÁŠE LERCHA S ALFREDEM PRINGSHEIMEM

## I. *Seznam Lerchových prací týkajících se sporu*

Tento seznam je vypsán z úplného Seznamu prací prof. Matyáše LERCHA od Josefa ŠKRÁŠKA (*Čas. pro pěst. mat.*, 78 [1953], 139—148)

[13] Příspěvky k theorii řad nekonečných, *Zpr. KČSN*, 1885, 174—179.
[19] O soustavách bodů a jejich významu v analysi, *Čas.* 15 (1886), 211—218.
[21] Remarque sur la théorie des séries, *Jorn. de Teix.* 7 (1886), 79—80.
[44] Über Funktionen mit beschränktem Existenzbereiche, *Abh. KČSN* (7), 2 (1888), 1—20.
[56] Bemerkung zur Reihentheorie, *Zpr. KČSN* 1890, 219—221.
[70] Zur Theorie der unendlichen Reihen, *Zpr. KČSN* 1891, 250—254.
[136] Über die analytische Natur einer von P. DuBois-Reymond betrachteten Funktion, *Monatsh.* 8 (1897), 377—382.
[157] Sur la nature analytique d'une fonction considerée par P. Du Bois-Reymond, *Acta* 22 (1899), 371—378.

## II. *Úvod*

V devadesátých letech minulého století probíhal v řadě matematických časopisů spor mezi Matyášem LERCHEM a mnichovským matematikem Alfredem PRINGSHEIMEM. Byl to spor nejen vleklý, nýbrž i dosti ostrý a měl dvě fáze: napřed byl v obraně LERCH, kdežto ve druhé fázi se role vyměnily a v obraně se ocitl PRINGSHEIM.

Tento článek podává přehled o průběhu konfliktu. Citáty uvádím v českém překladu, neboť jsou časté a dlouhé, takže by v jinojazyčném znění rušivě působily na ucelenost pojednání. Spor byl totiž veden — s výjimkou jednoho článku francouzského — v jazyku německém.

## III. *Spor o nekonečnou řadu* $\sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k-[\lg k]} \cdot g^{\frac{1}{2}[\lg k](\lg k+1)}$

1. Dne 13. března 1885 předložil F. J. STUDNIČKA v zasedání Královské české společnosti nauk LERCHOVU práci [13], jež byla v tomtéž roce uveřejněna ve Zprávách společnosti a v níž je pojednáno o zobecnění kriterií CAUCHYOVA odmocninového, d'ALEMBERTOVA podílového a RAABEOVA. LERCH dosahuje jejich zobecnění pomocí pojmu aritmetické derivace soustavy čísel $a_1, a_2, \ldots$, který se od CANTOROVY derivace množiny liší tím, že mimo hromadné body zahrnuje též čísla, jež se v posloupnosti $a_1, a_2, \ldots$ nekonečně mnohokrát opakují. Aritmetickou derivaci označuje $\underset{n=\infty}{D}(a_n)$.

Na př. podílové kriterium vyslovuje LERCH takto: Jsou-li veškery prvky soustavy $\underset{n=\infty}{D}\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ menší jednotky, konverguje řada kladných členů $\sum_0^\infty u_n$. Poznamenává k tomu, že nejčastěji však přicházejí konvergentní řady, v nichž soustava $\underset{n=\infty}{D}\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ obsahuje čísla menší i větší než jedna. Jako jeden z příkladů uvádí na konci citované práce tento: Značí-li $[\lambda k]$ celky (charakteristiku) obecného logaritmu čísla $k$, je-li $\delta$ libovolné kladné číslo menší jednotky, $g$ větší jednotky, ale tak, aby $\delta \sqrt{g} < 1$, bude řada s obecným členem

$$u_k = \delta^{k - [\lambda k]} \cdot g^{[\lambda k] \cdot \frac{1 + [\lambda k]}{2}}$$

konvergovati, při čemž $\underset{n=\infty}{D}\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ sestává z bodů $\delta$ a $\infty$.

Úvahami o posloupnosti $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ zabýval se LERCH za svého pobytu v Berlíně ve studijním roce 1884—85. Když objevil zobecněné podílové kriterium, t. j. ve tvaru nikoliv limitním, domníval se, že má prioritu. V uvedené práci píše na str. 5: „Zdá se, že analysté považovali za samozřejmou a nevyhnutelnou podmínku, aby hodnota $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$ existovala. Nechť tomu však jakkoli, případ, kdy se $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ pro nekonečně rostoucí $n$ žádné určité hodnotě neblíží, nebyl dosud uvažován, ačkoli není nesnadno zobecniti známá kriteria i pro tento případ."

2. Nežli přikročíme k vlastnímu sporu, všimněme si blíže této zajímavé otázky priority. Vyjíti můžeme od poznámky, kterou o této věci učinil K. PETR v nekrologu nazvaném „Matyáš Lerch" (*Almanach Akademie*, 1922). V souvislosti s pracemi [13] a [19] píše PETR na str. 9 o LERCHOVI toto:

„Odvozuje v nich kriteria pro konvergenci řad nekonečných s kladnými členy, a to kriteria již dávno známá a v plné obecnosti odvozená." Pod čarou pak uvádí: „Viz ku př. Cauchyovu učebnici Analyse algébrique (1821)." Na str. 10 čteme dále: „Není pro mne pochyby, že Lerchovi nebyly tehdy úplně známy elementy nauky o nekonečných řadách s kladnými členy (což však tenkrát bylo možno říci i o mnohém spisovateli učebnic analysy), avšak v tom právě (a ovšem také ve způsobu podání), že uveřejňuje autor pojednání z oboru, s jehož počátky není náležitě obeznámen, vidím známku nemírného sebevědomí, o němž jsem se svrchu zmínil." V poznámce pod čarou k tomu připisuje: „Jest však zároveň míti na mysli, že Lerchovi v tu dobu bylo 25 let."

Volí tedy PETR slova dosti příkrá. Máme-li však na mysli především onu prioritní otázku, není bez zajímavosti, že odkaz na CAUCHYOVU učebnici není správný. Kriterium odmocninové je v ní sice formulováno pomocí $\limsup\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{u_n}$, avšak kriterium podílové pouze ve tvaru limitním, jak CAUCHYMU vyplynulo z věty (str. 59 l. c.), že v posloupnosti kladných čísel $u_n$ platí

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \to \infty} u_n^{\frac{1}{n}},$$

jestliže levá strana existuje.

Sledujme tedy alespoň ve stručnosti vývoj theorie řad s kladnými členy v následujících desetiletích. Odhlédneme-li od autorů dalších speciálních limitních kriterií (RAABE, DUHAMEL, MORGAN, BERTRAND, BONNET, PAUCKER), pokročili v této nauce matematikové KUMMER[1],) DINI[2]) a DU BOIS REYMOND. Časově poslední z nich je PAUL du BOIS REYMOND, který ve své práci „Neue Theorie der Convergenz u. Divergenz von Reihen mit positiven Gliedern"[3]) uvádí kriterium: Je-li

$$\lim_{n \to \infty} \left[\varphi(n) - \varphi(n+1) \cdot \frac{u_{n+1}}{u_n}\right] > 0, \quad \varphi(n) > 0,$$
$$\infty$$

pak řada s kladnými členy $\Sigma u_n$ konverguje. ($\varphi(n)$ probíhá libovolnou posloupnost kladných čísel.) Toto kriterium pochází od KUMMERA, který však připojoval nadbytečnou podmínku $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(n)\cdot u_n = 0$ a podílové limitní kriterium je v něm zřejmě obsaženo jako speciální případ pro $\varphi(n) = 1$. KUMMEROVO kriterium má nejobecnější tvar, jakého bylo dosaženo u kriterií druhého druhu (v nichž se používá podílu $u_{n+1} : u_n$), avšak od limitní formulace ustupuje teprve OTTO STOLZ v r. 1885 ve své knize „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik", kde na str. 259 uvádí KUMMEROVO kriterium takto: Je-li $\varphi(n) > 0$ a pro $n \geqq m$

$$\varphi(n) - \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}}\,\varphi(n+1) > \alpha > 0,$$

pak řada s kladnými členy $\sum\limits_1^\infty a_n$ konverguje. STOLZOVA kniha vyšla později než LERCHOVA práce „Příspěvky k theorii řad nekonečných", neboť její předmluva byla napsána v květnu 1885.

Vše, co bylo dosud uvedeno, by svědčilo pro správnost LERCHOVA mínění o stavu zkoumání posloupnosti $u_{n+1} : u_n$ před rokem 1885. A přece bylo podílové kriterium ve tvaru nikoliv limitním známo již dříve. Je ovšem nesnadné říci, co všechno LERCH přečetl a se kterými matematiky hovořil, než dospěl ke svému názoru. Jisté však je, že v mylné domněnce nebyl osamocen. Svědčí o tom i poznámka v „Encyklopädie der Mathem. Wissenschaften", sv. I/1 (1898 až 1904), kde PRINGSHEIM na str. 81 píše, že se zčásti vytvořilo mínění, že třemi předpoklady $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \lesseqgtr 1$ jsou všechny možnosti vyčerpány anebo při nejmenším že se konvergence řady $\overset{\infty}{\Sigma} u_n$ v případě divergence posloupnosti $u_{n+1} : u_n$ jevila jako zvláštní pozoruhodnost.

Svůj omyl konstatoval LERCH v článku [70], v němž uvádí, že německý matematik WORPITZKY ve své učebnici[4]) z roku 1880 upozornil na nesprávný názor pokud se týče podílového kriteria.

Avšak ani WORPITZKÉMU nepřísluší priorita, neboť M. A. STERN uvádí obecné kriterium podílové již v r. 1860[5]) a J. HERR dokonce roku 1857.[6])

Popsaný případ není ojedinělým příkladem toho, že někdy i poznatek základní povahy upadne na čas v zapomenutí anebo se mu nedostane v přiměřeném čase dostatečného rozšíření. Tak na př. citovaná již práce DINIHO z r. 1867 nebyla známa v Německu ani po šesti letech, takže P. DU BOIS REYMOND znovu objevil některé fundamentální myšlenky a výsledky, ke kterým dospěl již DINI.[7]) Ještě pozoruhodnější je případ CAUCHYOVA vzorce pro poloměr konvergence mocninné řady $\sum\limits_0^\infty a_n x^n$

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}}\ ^{8)}.$$

Tento důležitý vztah byl do té míry přehlížen či upadl v zapomenutí, že r. 1892 byl znovu objeven HADAMARDEM a byl pak často označován jako HADAMARDOVA věta.[9])

Při zobecňování konvergenčních kriterií odvodil tedy LERCH výsledky již dříve známé. Po bližším prozkoumání věci a s ohledem na analogické případy lze však o tomto nedopatření míti jistě příznivější mínění, než je vyjádřeno v citované poznámce PETROVĚ.

3. Příklad řady $\sum_{1}^{\infty} \delta^{k-[\lg k]} \cdot g^{\frac{1}{2}[\lg k].([\lg k]+1)}$, jenž jest obsažen v obou již uvedených pracích LERCHOVÝCH, byl pak ještě dvakrát uveřejněn v portugalském časopise „Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas“.[10]) Tam si ho všiml A. PRINGSHEIM a ostrým způsobem jej odmítl. Učinil tak ve své významné práci „Allgemeine Theorie der Divergenz und Convergenz von Reihen mit positiven Gliedern“.[11]) Na str. 308 píše o vztahu mezi kriterii prvního druhu (jež spočívají na vlastnostech obecného členu řady $a_n$) a kriterii druhého druhu. Praví, že jest a priori jasné, že kriteria druhého druhu nedají výsledek v nekonečně mnoha případech, kdy kriteria prvního druhu pomohou: členy posloupnosti $a_n$ mohou totiž býti vesměs větší nebo vesměs menší než odpovídající členy posloupnosti $b_n$, aniž by existoval nějaký pevný vztah mezi podíly $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, $\frac{b_{n+1}}{b_n}$. K tomu připojuje tuto poznámku pod čarou:

„To zní v podstatě tak triviálně, že mnohý by to sotva považoval za hodno zmínky: přece se mi však zdá, že v tomto směru není dosud všeobecně dosti jasno. Jinak by bylo při nejmenším zcela nepochopitelné, že před časem nepříliš dávným uveřejnil pan M. Lerch zvláštní poznámku (TEIXEIRA, *Jornal de Sciencias Mathematicas*, T. VII, p. 79), jedině proto, aby upozornil, že $\Sigma a_n$ může *konvergovati*, když $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ *neexistuje*, po případě též libovolně velikých hodnot nabývá (týká se výrazu $a_{n+1} : a_n$, pozn.); a že pouze pro utvrzení této, jak bylo řečeno, vlastně zcela samozřejmé, ostatně *četnými jednoduchými* příklady doložené skutečnosti, konstruuje tento přímo obludný (*geradezu monströse*) příklad ...“ a uvádí nám již známou nekonečnou řadu. Poznámka pak pokračuje takto: „A když pan CESARO objevem pana LERCHA jest tak překvapen, že jej od nynějška zařadí do svých přednášek, ostatně však poznamenává: *existují jednodušší příklady* takových řad, tu se mi zdá, že to nevystihuje vlastní jádro věci. Nejen že existují *jednodušší příklady* konvergentních řad s libovolně oscilujícími hodnotami $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, tyto se daleko spíše musejí chápat jako *pravidlo*, zatím co řady, pro něž $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ existuje, představují jen zcela speciální skupinu. Existence $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ závisí především podstatně na uspořádání veličin $a_n$ a nemá v důsledku toho s konvergencí nebo divergencí řady $\Sigma a_n$ vůbec nic společného.

Za zmínku stojí, že PRINGSHEIM neudělil při tom lekci též berlínskému matematikovi GUTZMEROVI, který v dopise TEIXEIROVI (Journal VIII) píše o LERCHOVĚ příkladu velmi pochvalně, mimo jiné toto:

„Pan Lerch a já jsme nalezli ještě mnoho jiných řad této vlastnosti, jejichž počet je nekonečný. Avšak řada uvedená nahoře je nejpozoruhodnější ze všech, které M. Lerch, E. Cesaro (ve svém zajímavém článku, Jornal, sv. VII, str. 171—177) a já jsme objevili, protože členy, pro něž podíl $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ jest větší než jedna jsou postupně méně časté.“

Jest totiž

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \delta^{1-[\lg(n+1)]+[\lg n]} \cdot g^{\frac{1}{2}\left\{[\log(n+1)]+[\lg(n+1)]^2-[\lg n]-\lg n]^2\right\}};$$

odtud pro $n \neq 10^{\mu} - 1$, vzhledem k tomu, že $[\lg(n+1)] = [\lg n]$, obdržíme $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \delta < 1$; pro $n = 10^{\mu} - 1$ jest $[\lg(n+1)] - [\lg n] = 1$ a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = g^{[\lg n]+1} > 1$.

Lze si představit, že ani GUTZMER neměl z PRINGSHEIMOVY poznámky radost, i když v ní nebyl jmenován.

Na PRINGSHEIMOVU kritiku reagoval LERCH celkem dvakrát, a to v Sitzungsberichten der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. Po prvé tak učinil r. 1890, kdy v článku [56] píše, že považoval za vhodné uveřejniti příklad konvergentní řady s kladnými členy, v níž podíl $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ nabývá pro nekonečně mnoho $n$ hodnoty větší než libovolně zvolené číslo, protože je takový příklad pedagogicky užitečný a protože některé učebnice tvrdí v této věci přímo opak. O příkladu samotném pak sděluje, že podmínka $\delta \sqrt{g} < 1$ se ukazuje býti zbytečnou a dále, že řadu možno voliti v jednodušší formě $\Sigma\, \delta^n\, g^{(n^2)}$, kde $(n)$ značí počet cifer čísla $n$. Článek končí větou, že i v původním tvaru patří řada k nejjednodušším příkladům, které onu věc ilustrují a jež mohou býti použity i v elementárních přednáškách.

V následujícím roce vrátil se LERCH k této záležitosti ještě jednou v článku [70]. Zmiňuje se tam, že již několik let před rokem 1885 WORPITZKY ve své znamenité učebnici upozornil na to, že v mnohých učebnicích německých se vyskytují chybné názory o podílovém kriteriu a že je vyvrátil speciálním příkladem. Píše dále, že v roce 1885 onu učebnici neznal a že měl tedy za to, že nemůže škodit, když z příkladů, které mu byly známy, jeden uveřejnil v cizí řeči, a to ten, který se mu zdál nejzajímavějším.

## IV. *Spor prioritní*

V roce 1897 vzplanul spor mezi LERCHEM a PRINGSHEIMEM znovu, avšak nyní se jednalo o záležitost zcela jinou. LERCH totiž ve svém pojednání [136] zaútočil na PRINGSHEIMA výtkou, že publikoval některé věci z jeho práce [44], aniž uvedl pramen. Uvádí přitom čtyři místa z PRINGSHEIMOVY studie „Zur Theorie der Taylor'schen Reihe und der analytischen Functionen mit beschränktem Existenzbereich",[12]) jichž se týká výtka, kterou stylisuje takto:

„Ze jmenovaného pojednání bylo leccos nově publikováno panem A. Pringsheimem v Mathematische Annalen sv. 42 a 44, tak na př. zobecnění, o němž se zmiňuje ve sv. 42 na str. 166 v poznámce, dále princip důkazu užitý na str. 50 a 51 svazku 44. Ode mne pochází rovněž poznámka, že lze vytvořiti výrazy tvaru $\sum\limits_0^\infty \frac{c_n}{x - a_n}$, jejichž absolutní hodnota je ohraničená, je-li $x$ omezeno na oblast, která neobsahuje žádný z bodů $a_n$, stejně tak i její hranice, i když všechny body této hranice jsou hromadnými body množiny $a_n$. Na str. 7 onoho pojednání jsem to ilustroval pomocí příkladu

$$\sum_0^\infty \frac{c_n\,(e^{\frac{1}{n}} - 1)}{x - e^{\frac{1}{n} + 2n\alpha\pi i}}\,, \ |x| \leqq 1,$$

kde $\alpha$ značí iracionální reálné číslo. O takových výrazech pojednává pan Pringsheim ve 42. svazku Mathem. Annalen na mnoha místech."

Svoje pojednání zakončuje LERCH zmínkou o chybě, kterou učinil PRINGSHEIM ve svých úvahách o funkci $f(x) = \sum\limits_0^\infty \frac{c_n}{x - a_n}$:

„Pan Pringsheim chtěl však v této otázce jíti dále a tvrdí, že výraz

$$f(x) = \sum_0^\infty \frac{c_n}{x - a_n}\,, \quad \Sigma\,|c_n|\ \text{konverguje},$$

nemá analytického pokračování mimo oblast $(C)$, leží-li sice všechny body $a_n$ vně $(C)$, avšak tak, že jejich hromadné body vytvořují hranici oblasti $(C)$, při čemž se předpokládá, že $a_n$ nevyplňují hustě žádnou část roviny. V roce 1887 nechtěl jsem jíti tak daleko jako pan Pringsheim a ponechal jsem tuto otázku nerozhodnutou, neboť se mi důkaz zdál býti těžký a ještě dnes těžký zdá, takže pro zodpovědění této otázky ani nyní nemohu nic poskytnouti. Domnívá-li se pan Pringsheim, že tuto otázku rozřešil svým teorémem na str. 168 sv. 42, pak se mýlí, neboť jeho důkaz je nesprávný a platnost teorému zůstává nepotvrzená."

Zevrubná PRINGSHEIMOVA odpověď LERCHOVI vyšla pod názvem „Über eine besondere Gattung von singulären Stellen analytischer Functionen" v Math. Annalen 50 (1898), str. 442—461, zatím co v Monatshefte IX 1898 bylo otištěno na str. 46 stručné prohlášení, jehož jádro zní v překladu takto:

„Pan Lerch uveřejnil v VIII. roč. tohoto časopisu poznámku, která obsahuje různé útoky proti mým dvěma dřívějším pracem. Poněvadž tyto práce byly uveřejněny v Mathematische Annalen, považuji za vhodné tam odpověděti na tyto útoky, pokud mají věcnou povahu. Přitom rovněž dokáži, že prioritní nároky pana Lercha se vesměs týkají věcí, které nejen že jsou samy o sobě významu podřízeného, ale které zejména neměly na mé úvahy nijakého rozhodujícího (bestimmend) vlivu."

V Math. Annalen 50 zahajuje PRINGSHEIM podrobné vypsání svého stanoviska tím, že přiznává svůj omyl s funkcí $f(x) = \sum_{0}^{\infty}{}' \frac{c_n}{x - a_n}$ a píše, že tuto chybu konstatoval již E. BOREL, který na ni upozornil ve svém pojednání „Sur quelques points de la théorie des fonctions",[13]) aniž by se mu však podařilo důkaz opraviti, po případě správnost tvrzení vyvrátiti. Na adresu LERCHOVU pak praví:

„Jestliže však nyní pan Lerch na konci právě se objevivší poznámky příležitosti se chápe, aby panem Borelem učiněnou připomínku o nepostačitelnosti dotyčného důkazu jednoduše opakoval, aniž by ostatně k objasnění věci přispěl, mohl jsem v tom pouze spatřovati snahu dáti účinné zakončení útokům, *věcně neoprávněným a pokud se formy týče neslýchaným,* jež v oné poznámce proti mně jsou vedeny."

Ke stížnosti PRINGSHEIMOVĚ pokud se formy LERCHOVY výtky týče je zajisté možno připomenouti, že jeho poznámka z roku 1890 o LERCHOVĚ příkladu se rovněž nevyznačovala mírností. Je v tom i jistý humor, že PRINGSHEIM sám poskytl LERCHOVI příležitost k vyrovnání účtu.

Všimněme si nyní PRINGSHEIMOVY odpovědi na ony čtyři prioritní nároky LERCHOVY. První z nich se týká zobecnění vyjádřeného v poznámce PRINGSHEIMOVĚ:[14])

„Poznamenávám, že následující úvahy podrží svou platnost pro řady poněkud obecnějšího tvaru $\sum{}' \frac{c_n}{(a_n - x)^{m_n}}$, kde $m_n$ značí záporná lomená nebo libovolná racionální kladná čísla."

Jakožto odůvodnění, proč na tomto místě necitoval LERCHA, vysvětluje PRINGSHEIM, že jeho poznámka se v onom místě, kde se v textu neustále hovoří o řadách $\sum{}' \frac{c_n}{a_n - x}$, jeví tak nasnadě jsoucí a přitom současně tak elementární, že se přímo sama nabízí. A podstatně závažnější prý je, že v celé práci zabírající dva tiskové archy jí není ani v nejmenším využito, takže by mohla býti bez jakékoliv škody z pojednání prostě škrtnuta.

Druhý LERCHŮV prioritní nárok se vztahuje na základní myšlenku důkazu, jíž je užito v *Math. Annalen* 44 (1894) na str. 50 a 51. Podle slov PRINGSHEIMOVÝCH jedná se o dosti nepatrné zobecnění t. zv. kondensačního principu, jenž byl objeven WEIERSTRASSEM.

Třetí LERCHOVU výtku odmítá PRINGSHEIM naprosto s tím, že ohraničenost funkce $f(x) = \sum_{0}^{\infty} \frac{c_n}{x - a_n}$ v uzavřené oblasti, v jejímž vnitřku je regulární, nepředstavuje nic pozoruhodného. Praví, že v podstatě jde o dávno známou skutečnost, že mocninná řada může konvergovati i v každém bodě své konvergenční kružnice.

Konečně odmítá PRINGSHEIM i čtvrtý LERCHŮV prioritní nárok, jehož předmětem je funkce $\sum_{0}^{\infty} \frac{c_n (e^{\frac{1}{n}} - 1)}{x - e^{\frac{1}{n} + 2n\alpha\pi i}}$, kde $\alpha$ značí iracionální reálné číslo. Tuto nekonečnou řadu sestavil LERCH jako speciální případ funkce $f(x) = \sum_{0}^{\infty} \frac{c_n}{x - a_n}$. Její singulární body $e^{\frac{1}{n} + 2n\alpha\pi i}$ leží vesměs mimo jednotkovou kružnici $|x| = 1$, zatím co hromadné body množiny těchto pólů onu jednotkovou kružnici vytvořují. PRINGSHEIM píše, že sestavení takové nekonečné řady spočívá na obecně známých skutečnostech, totiž že $|e^{2n\alpha\pi i}| = 1$, $e^{\frac{1}{n}} > 1$ pro $n > 0$, $\lim_{n \to \infty} e^{\frac{1}{n}} = 1$. Proto lze prý těžko považovati za výsadu jejich použití při konstrukci příkladů.

LERCH reagoval na PRINGSHEIMŮV výklad tím, že v následujícím roce, t. j. 1899, uveřejnil ve 22 svazku *Acta mathematica* ([157]) francouzský překlad onoho pojednání z *Monatshefte*, jímž druhá část sporu začala. Za dva roky nato bylo v *Acta mathematica* uveřejněno (sv. 24, 1901, str. 245) stručně PRINGSHEIMOVO prohlášení, jímž spor byl zakončen, nikoliv však smířlivě, jak z jeho průběhu se ostatně dalo čekat. PRINGSHEIM prioritní spor stručně připomíná, zvláště svou odpověď v *Mathem. Annalen* 50 (1898), o níž praví, že tam podrobně vyložil, že LERCH naprosto není oprávněn uplatňovati vůči němu nějaké prioritní nároky, které by stály za řeč, ani kdyby se to stalo v přiměřenější formě nežli LERCH volil.

Závěrem možno říci, že přes obšírnost a důkladnost PRINGSHEIMOVY odpovědi nenabývá čtenář přesvědčení, že právem nebylo LERCHOVO jméno ani v jednom případě uvedeno.

## Poznámky

[1]) E. E. KUMMER, Über die Convergenz und Divergenz der Unendlichen Reihen, *Journal für die reine u. angew. Math.* XIII (1835), 171—184.

[2]) U. DINI, Sulle serie e termini positivi, *Annali dell' Univ. Tosc.* IX (1867).

[3]) *Crelle Journal* 76 (1873), 61—91.

[4]) J. WORPITZKY, Lehrbuch der Differential- u. Integral-Rechnung, Berlin, 1880.

[5]) M. A. STERN, Lehrbuch der algebraischen Analysis, Lipsko, 1850, str. 71.

[6]) JOSEF Ph. HERR, Lehrbuch der höheren Mathematik, I. díl, 1. vyd., 1857, str. 29.

[7]) A. PRINGSHEIM, Allgemeine Theorie der Divergenz und Convergenz von Reihen mit positiven Gliedern, *Math. Ann.* 35 (1890), 297—298.

[8]) A. CAUCHY, Analyse algébrique 1821, str. 151.

[9]) Encyklopädie, I/1, 1898/1904, str. 81.

[10]) [21] a A. GUTZMER, Sur une série considérée par M. LERCH, *Jornal de Sciencias Math. e Astron.* VIII (1887), 33—36.

[11]) *Mathem. Ann.* 35 (1890), 297—394.

[12]) *Mathem. Ann.* 42 (1893), 153/184. Viz též *Mathem. Ann.* 44 (1894), 41—82.

[13]) *Annales de l'École normale* XII (1895).

[14]) *Mathem. Ann.* 42 (1893), str. 166.