Dá sa ukázať najmä to, že predchádzajúca veta je správna v celom rozsahu aj vtedy, ak nie je dĺžka intervalu $[\alpha, \beta]$ väčšia než koreň algebraickej rovnice

$$1 - M_1 t - \frac{1}{2} \sum_{\nu=2}^{n} M_\nu t^\nu = 0$$

16. Lineárna diferenciálna rovnica 2. rádu

85. Ú v o d

Diferenciálne lineárne rovnice 2. rádu sú významné preto, že sú najjednoduchším (netriviálnym) prípadom d. lineárnych rovníc vyšších rádov a ich vlastnosti sú vzorom pri štúdiu týchto všeobecnejších d. rovníc. Najmä však preto, že majú dôležité aplikácie v otázkach fyzikálnych a technických. Od najjednoduchších úvah klasickej mechaniky, ako je analýza harmonického pohybu, k omnoho zložitejším otázkam týkajúcim sa napr. vedenia tepla, chvenia tyčí a membrán alebo v problémoch nebeskej mechaniky, stretávame sa s d. lineárnymi rovnicami 2. rádu ako s ústrednými miestami obsahujúcimi spravidla úplné riešenie predložených otázok. K tomu pristupuje, že teória d. lineárnych rovníc 2. rádu je ovládaná neveľkým počtom pomerne jednoduchých teorém, takže je jednoduchá a prehľadná a pritom obsahove bohatá.

V ďalšom kvôli stručnosti obmedzíme sa na štúdium d. lineárnych rovníc 2. rádu homogénnych, t.j. tvaru

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad \text{(a)}$$

pričom koeficienty d. rovnice (a) p, q sú funkcie definované v nejakom intervale j. Predpokladáme, že sú v intervale j spojité.

86. E l e m e n t á r n e t r a n s f o r m á c i e d. r o v n i c e (a)

K danej d. rovnici (a) môžeme priradiť ďalšie d. lineárne rovnice 2. rádu, ktorých integrály sú integrálmi d. rovnice (a) v známych vzťahoch. Také priradenie d. rovníc k d. rovnici (a) sa nazýva transformácia d. rovnice (a). Štúdium týchto transformácií tvorí dôležitú časť teórie d. lineárnych rovníc 2. rádu. Je účelné všimnúť si hneď na začiatku našej úvahy niektorých elementárnych transformácií, pretože potom sa môžeme obmedziť na štúdium d. rovníc, ktoré sú v niektorom smere vhodnejšie, napr. kratšie a prehľadné, bez toho, že by sme porušili všeobecnú platnosť výsledkov.

Najjednoduchšie transformácie d. rovnice (a) sú založené na násobení d. rovnice (a) alebo jej integrálov vhodnou funkciou alebo na novej voľbe nezávisle premennej.

Nech $x_0 \in j$ značí ľubovoľné číslo.

1. Násobme d. rovnicu (a) funkciou

$$P(x) = \exp \int_{x_0}^{x} p(t)\,dt \qquad (x \in j)$$

a označme

$$P(x) \cdot q(x) = - Q(x)$$

Všimnime si, že funkcia P je v intervale j kladná a má v ňom spojitú deriváciu. Dostaneme transformovanú d. rovnicu

$$[P(x)\, y']' - Q(x)\, y = 0 \qquad (a')$$

Touto transformáciou sa integrály d. rovnice (a) nemenia, t.j. každý integrál jednej d. rovnice (a), (a') je súčasne integrálom druhej.

2. Predpokladajme, že koeficient p má v intervale spojitú deriváciu p'. Nech $y(x)$ značí ľubovoľný integrál d. rovnice (a) a označme

$$Y(x) = y(x) \exp \left[\frac{1}{2} \int_{x_0}^{x} p(t)\,dt\right] \qquad (1)$$

Jednoduchým výpočtom zistíme, že funkcia Y je riešením d. rovnice

$$Y'' - Q(x)\, Y = 0 \qquad (a'')$$

v ktorej značí $Q(x) = \frac{1}{2} p'(x) + \frac{1}{4} p^2(x) - q(x)$

Vidíme, že nová d. rovnica (a") je jednoduchšia než d. rovnica (a) v tom zmysle, že jej koeficient pri Y' je nulový. Obidve d. rovnice (a), (a") sú definované v tomže intervale j a ich integrály súvisia podľa vzorca (1).

3. Ale aj v prípade, že koeficient p nespĺňa predpoklad z predchádzajúceho ods. 2., môžeme d. rovnicu (a) transformovať na tvar (a"), avšak s tým rozdielom, že interval, v ktorom je definovaný koeficient novej d. rovnice, nie je nutne ten istý interval j.

Nech $x_0 \in j$, c sú ľubovoľné čísla. Označme pre každé $x \in j$:

$$\xi(x) = c + \int_{x_0}^{x} \exp\left[- \int_{x_0}^{x} p(\tau)\, d\tau\right] dt \qquad (1)$$

Zrejme funkcia ξ v intervale j rastie a v čísle x_0 má hodnotu c. Jej hodnoty tvoria istý interval J. Nech y(x) značí ľubovoľný integrál d. rovnice (a), definovaný v nejakom intervale $i \subset j$ a $Y(\xi)$ funkciu definovanú v príslušnom intervale $I \subset J$ vzorcom

$$Y(\xi) = y(x) \tag{2}$$

Podľa vety o derivovaní zložených funkcií platia v každých dvoch číslach $x \in i$, $\xi \in I$, ktoré spolu súvisia podľa (1), vzťahy (označujeme $dY/d\xi = \dot{Y}$, $d^2Y/d\xi^2 = \ddot{Y}$):

$$y'(x) = \dot{Y}(\xi) \exp\left[- \int_{x_0}^{x} p(\tau)\, d\tau\right]$$

$$y''(x) = \ddot{Y}(\xi) \exp\left[- 2 \int_{x_0}^{x} p(\tau)\, d\tau\right] - \dot{Y}(\xi)\, p(x) \exp\left[- \int_{x_0}^{x} p(\tau)\, d\tau\right]$$

Z nich vidíme, že funkcia Y je integrálom d. rovnice

$$\ddot{Y} - Q(\xi)\, \dot{Y} = 0 \qquad (a''')$$

v ktorej Q značí funkciu definovanú v intervale J vzorcom

$$Q(\xi) = - q(x) \exp\left[2 \int_{x_0}^{x} p(\tau)\, d\tau\right]$$

D. rovnica (a) je definovaná v intervale j, avšak (a''') v intervale J; integrály týchto d. rovníc súvisia podľa vzorca (2) a teda majú v odpovedajúcich bodoch x, ξ rovnaké hodnoty.

Z týchto úvah vidíme, že neubudne v ďalšom štúdiu na všeobecnosti, ak budeme študovať d. rovnice tvaru (a), alebo (a') alebo (a'').

87. Existenčná teoréma v prípade cauchyovských počiatočných podmienok

Pre d. rovnicu

$$y'' = q(x)y \qquad (a)$$

znie takto: (pozri ods. 81).

Nech v d. rovnici (a) je funkcia q spojitá v intervale j. Nech $x_0 \in j$, y_0, y_0' sú ľubovoľné čísla. Potom existuje práve jeden integrál $y(x)$ d. rovnice (a), definovaný v intervale j, ktorý má v čísle x_0 hodnotu y_0 a jeho derivácia hodnotu y_0', takže je $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$.

V ďalšom sa obmedzíme na štúdium d. rovnice tvaru (a) a budeme predpokladať, že koeficient q je v intervale j spojitý. Integrálom d. rovnice (a) budeme v ďalšom rozumieť (pokiaľ nie je nič iné povedané) integrál úplný, t.j. definovaný v celom intervale j.

88. Základné vlastnosti integrálov d. rovnice (a)

Medzi integrálmi d. rovnice (a) je zrejme integrál tzv. nulový, ktorý má v ľubovoľnom čísle $x_0 \in j$ hodnotu 0. Z existenčnej teorémy vyplýva, že ak nejaký integrál d. rovnice (a) a jeho (prvá) derivácia majú v niektorom čísle $\alpha \in j$ hodnotu 0, potom je ten integrál nulový. Vidíme, že každý nenulový integrál d. rovnice (a) má v integrále j nanajvýš jednoduché korene.

Ak integrál y má v čísle $\alpha \in j$, ktoré je vnútri intervalu j, hodnotu 0, teda $y(\alpha) = 0$, avšak $y'(\alpha) \neq 0$, potom mení v čísle α znamienko. Ak $y'(\alpha) > 0$, sú hodnoty funkcie y záporné vľavo a kladné vpravo od α a ak $y'(\alpha) < 0$ sú kladné vľavo a záporné vpravo od α. To vyplýva jednoducho z vety o prírastku.

Ak integrál y má v intervale j nekonečne mnoho koreňov, ktoré majú v intervale j čísla zhustenia (bod zhustenia), potom je nulový. Vskutku, ak sú splnené predpoklady a $\alpha \in j$ je bod zhustenia koreňov integrálu y, existuje postupnosť koreňov $x_1, x_2, \ldots$ integrálu y, ktoré sú od α rôzne a k tomuto číslu konvergujú. Vidíme, že platia vzťahy:

$$0 = y(x_1) = y(x_2) = \ \ldots \rightarrow y(\alpha) = 0$$

$$0 = \frac{y(x_1) - y(\alpha)}{x_1 - \alpha} = \frac{y(x_2) - y(\alpha)}{x_2 - \alpha} = \ldots \longrightarrow y'(\alpha) = 0$$

a odtiaľ vychádza $y(x) \equiv 0$.

Všimnime si, že ak interval j je napr. zľava otvorený, môže existovať nenulový integrál, ktorý má v intervale j nekonečne mnoho koreňov, ktorých bodom zhustenia je ľavý koniec intervalu j. Príkladom je d. rovnica

$$y'' = -\frac{5}{2}\,\frac{1}{x^2}\,y$$

v intervale $j = (0, \infty)$. Táto d. rovnica má (nenulový) integrál

$$y = \sqrt{x}\ \sin \log \frac{1}{x}$$

ktorý má v intervale j nekonečne mnoho koreňov

$$1, e^{\pi}, \quad e^{-\pi} \quad e^{2\pi}, \quad e^{-2\pi}, \ldots$$

a ľavý koniec 0 intervalu j je číslom zhustenia množiny týchto koreňov.

89. Závislé a nezávislé integrály

Dva integrály u, v d. rovnice (a) sa nazývajú lineárne závislé, stručne: závislé (pozri ods. 75), ak sa odlišujú len multiplikatívnou konštantou; t.j. ak existuje konštanta c taká, že v intervale j je buď $u = Cu$. Najmä sú teda integrály u, v závislé, ak jeden z nich je nulový. V opačnom prípade sa nazývajú lineárne nezávislé, stručne: nezávislé.

Ukážeme, že integrály u, v sú závislé vtedy a len vtedy, ak v intervale j platí identicky

$$uv' = vu' \tag{1}$$

a) Nech integrály u, v sú závislé, takže existuje konštanta c napr. taká, že v intervale j je $v = cu$ a teda tiež $v' = c\,u'$. Potom máme v intervale j identicky: $uv' = u\,c\,u' = c\,u\,u' = v\,u'$.

b) Nech v intervale j platí identicky rovnica (1). Ak je jeden z integrálov u, v nulový, sú integrály u, v závislé. Predpokladajme teda, že žiaden z nich nie je nulový. Pretože integrál u nie je nulový, je v istom intervale $i \subset j : u \neq 0$. Ak je v niektorom čísle intervalu $i : v = 0$, je v ňom (vzhľadom na platnosť rovnice (1)) tiež $v' = 0$, čo je nemožné. V intervale i je teda tiež $v \neq 0$ a z rovnice (1) vidíme, že v nom platí vzťah

$$\frac{v'}{v} = \frac{u'}{u}$$

a teda tiež vzťahy

$$v = c\,u, \quad v' = c\,u' \tag{2}$$

pričom c značí vhodnú konštantu $\neq 0$.

Ak je v intervale j všade $u \neq 0$, je tvrdenie dokázané. Nech integrál u má vnútri intervalu j koreň α, takže $u(\alpha) = 0$, avšak $u'(\alpha) \neq 0$. Potom je v istom ľavom rýdzom okolí i_1 čísla α a tiež v istom pravom rýdzom okolí i_2 čísla α rôzny od nuly. Platia teda vzťahy

$$v = c_1\,u, \quad v' = c_1\,u' \qquad \text{pre} \quad x \in i_1$$

$$v = c_2\,u, \quad v' = c_2\,u' \qquad \text{pre} \quad x \in i_2$$

pričom $c_1 \neq 0 \neq c_2$ značia vhodné konštanty. Zo spojitosti funkcií u, v v čísle α usudzujeme, že rovnosti $v = c_1 u$ a $v = c_2 u$ platia aj v čísle α a zo spojitosti funkcií u', v' v čísle α usudzujeme na platnosť vzorcov

$$v'(\alpha) = \lim_{x \to \alpha -} v'(x) = c_1 \lim_{x \to \alpha -} u'(x) = c_1 u'(\alpha)$$

$$v'(\alpha) = \lim_{x \to \alpha +} v'(x) = c_2 \lim_{x \to \alpha +} u'(x) = c_2 u'(\alpha)$$

a z nich vychádza, vzhľadom na nerovnosť $u'(\alpha) \neq 0$, $c_1 = c_2$. Tým je ukázané, že vnútri intervalu j platia vzorce (2). Ak je interval j zľava (sprava) uzavretý, platia tieto vzťahy zrejme aj v jeho ľavom (pravom) koncovom čísle. Tým je tvrdenie dokázané.

90. Wronského determinant

K usporiadanej dvojici integrálov u, v môžeme jednoznačne priradiť funkciu

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} u(x), & v(x) \\ u'(x), & v'(x) \end{vmatrix} = u(x) \,.\, v'(x) - v(x) \,.\, u'(x), \quad (x \in j)$$

ktorá sa nazýva <u>Wronského determinant</u> alebo <u>wronskián</u>. Vidíme, že wronskián opačne usporiadanej dvojice v, u je $-\Delta(x)$. Podľa predchádzajúcej vety sú integrály u, v závislé vtedy a len vtedy, ak pri nejakom ich usporiadaní je príslušný wronskián identicky nula.

Zrejme je

$$\Delta'(x) = u(x)\, v''(x) - v(x)\, u''(x) = u(x)\, q(x)\, v(x) - v(x)\, q(x)\, u(x) = 0$$

takže funkcia $\Delta(x)$ má konštantnú hodnotu: $\Delta(x) = w =$ konšt.

Vidíme, že k závislosti integrálov u, v stačí platnosť vzťahu $uv' = vu'$ v jednom čísle intervalu j. Najmä vidíme, že integrály u, v sú závislé, ak majú spoločný koreň, alebo ich derivácie majú spoločný koreň.

91. Nech u, v sú ľubovoľné integrály d. rovnice (a). Potom pre ľubovoľné konštanty c_1, c_2 je funkcia

$$y = c_1 u + c_2 v \qquad (1)$$

opäť integrálom d. rovnice (a), čo je zrejmé.

Naopak platí:

Ak sú integrály u, v nezávislé, potom každý integrál y d. rovnice (a) je ich lineárnou kombináciou s konštantnými koeficientami, t.j. dá sa vyjadriť vzorcom (1) s vhodnými konštantami c_1, c_2.

Vskutku, nech y je ľubovoľný integrál d. rovnice (a). Nech $x_0 \in j$ je ľubovoľné číslo a y_0, y_0' sú hodnoty integrálu y a jeho derivácie y' v čísle x_0. Predpokladajme, že integrály u, v sú nezávislé. Potom je

$$\Delta(x_0) = \begin{vmatrix} u(x_0), & v(x_0) \\ u'(x_0), & v'(x_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

a existujú (jednoznačne) konštanty c_1, c_2 spĺňajúce rovnice

$$c_1\, u(x_0) + c_2\, v(x_0) = y_0$$

$$c_1\, u'(x_0) + c_2\, v'(x_0) = y_0'$$

totiž

$$c_1 = \frac{y_0 v'(x_0) - y_0' v(x_0)}{\Delta(x_0)}, \quad c_2 = \frac{-y_0 u'(x_0) + y_0'\, u(x_0)}{\Delta(x_0)}$$

Funkcia $Y(x) = c_1 u + c_2 v$ je tiež integrálom d. rovnice (a) a obidva integrály y, Y majú v čísle x_0 tú istú hodnotu y_0 a ich derivácie y', Y' tú istú hodnotu y_0'. Odtiaľ vyplýva, že $y = Y$, alebo $y = c_1\, u + c_2\, v$, takže skutočne je integrál y lineárnou kombináciou integrálov u, v.

Vidíme, že každé dva nezávislé integrály d. rovnice (a) jednoznačne určujú množinu všetkých integrálov d. rovnice (a) v tom zmysle, že každý integrál d. rovnice (a) je ich lineárnou kombináciou s konštantnými koeficientami. Túto situáciu vyjadrujeme stručne tým, že <u>integrály d. rovnice (a) tvoria lineárny priestor</u>.

92. D i f e r e n c i á l n a r o v n i c a $y'' =$ konšt. y

Uvažujme o d. rovnici (a) v prípade, že funkcia $q(x)$ je konštantná. Predpokladajme, že $j = (-\infty, \infty)$ a budeme rozlišovať tri prípady podľa toho, či hodnota funkcie q je < 0 alebo > 0, alebo $= 0$.

1. Nech $q(x) = -m^2$ $(m > 0)$, takže máme d. rovnicu

$$y'' = -m^2\, y \qquad \text{(a)}$$

Elementárnymi metódami ľahko zistíme, že každý integrál d. rovnice (a) má tvar

$$y = C \sin m\,(x - \alpha)$$

pričom C, α značia vhodné konštanty; naopak, pri ľubovoľných hodnotách týchto konštánt predstavuje funkcia y integrál d. rovnice (a).

Nech y je ľubovoľný nenulový integrál d. rovnice (a) a $a < b$ sú ľubovoľné čísla. Jednoduchými úvahami zistíme, že v (uzavretom) intervale $[a, b]$ leží

$$\left[(b - a)\frac{m}{\pi}\right] \quad \text{alebo} \quad \left[(b - a)\frac{m}{\pi}\right] + 1$$

koreňov integrálu y. Pritom napr. symbol [ ] značí najväčšie celé číslo neprevyšujúce $(b - a)\dfrac{m}{\pi}$

2. Nech $q(x) = m^2$ $(m > 0)$, takže máme d. rovnicu

$$y'' = m^2 y \qquad \text{(a)}$$

Ľahko zistíme, že každý integrál d. rovnice (a) má tvar

$$y = C \sinh m(x - \alpha)$$

pričom C, α sú vhodné konštanty; naopak, pri ľubovoľných hodnotách týchto konštánt predstavuje funkcia y integrál d. rovnice (a). Vidíme, že v prípade $C \neq 0$ má integrál y jediný koreň $x = \alpha$. Vychádza, že v danom intervale $[a, b]$ má každý nenulový integrál d. rovnice (a) najviac jeden koreň.

93. Piconeova identita

V ďalšom budeme uvažovať len o nenulových integráloch príslušných d. rovníc.

Uvažujme o nasledovných d. rovniciach v intervale j:

$$y'' = q(x)y \qquad \text{(a)}$$

$$Y'' = Q(x)Y \qquad \text{(A)}$$

Nech y (Y) je ľubovoľný integrál prvej (druhej) d. rovnice. Potom v každom čísle $x \in j$, v ktorom $Y(x) \neq 0$ platí vzorec:

$$\left[\frac{y}{Y}(Yy' - yY')\right]' = (q - Q)\,y^2 + \left(y' - \frac{y}{Y}Y'\right)^2 \qquad (1)$$

<u>Dôkaz</u>. Ľavá strana vzorca (1) je:

$$(yy' - \frac{y^2}{Y} \cdot Y')' = y'^2 + qy^2 - \left(\frac{y^2}{Y}\right)' Y' - Qy^2$$

$$= (q - Q)\, y^2 + y'^2 - \frac{2Yyy' - y^2Y'}{Y^2}\, Y'$$

$$= (q - Q)\, y^2 + \left\{ y'^2 - 2\frac{yy'}{Y} Y' + \frac{y^2}{Y^2}\, Y'^2 \right\}$$

$$= (q - Q)\, y^2 + (y' - \frac{y}{Y} Y')^2$$

Tým je dôkaz uskutočnený.

Nech teraz $\alpha < \beta$ sú dva susedné korene niektorého integrálu d. rovnice (a), takže $y(\alpha) = y(\beta) = 0$, $y(x) \neq 0$, pre $x \in (\alpha, \beta)$, $y'(\alpha) \neq \neq 0 \neq y'(\beta)$.

Predpokladajme, že ľubovoľný integrál Y d. rovnice (A) je $\neq 0$ v (α, β).

Potom pre $\alpha < x_1 < x_2 < \beta$, máme podľa vzorca (1),

$$\left[\frac{y}{Y} (Yy' - yY') \right]_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} (q - Q)y^2\, dx + \int_{x_1}^{x_2} (y' - \frac{y}{Y} Y')^2\, dx$$

Ak je napr. $Y(\beta) \neq 0$, má ľavá strana limitu pre $x_2 \to \beta -$ rovnú 0; ak je $Y(\beta) = 0$ a teda $Y'(\beta) \neq 0$, máme

$$\lim_{x_2 \to \beta -} \frac{y^2(x_2)}{Y(x_2)} Y'(x_2) = \frac{2\, y(\beta)\, y'(\beta)}{Y'(\beta)}\, Y'(\beta) = 0$$

Vidíme, že pre $x_2 \to \beta -$ má ľavá strana vždy limitu 0 a podobne pre $x_1 \to \alpha +$.

Z predchádzajúceho vzťahu teda vychádza vzorec

$$\int_{\alpha}^{\beta} (q - Q)\, y^2\, dx + \int_{\alpha}^{\beta} (y' - \frac{y}{Y} Y')^2\, dx = 0 \tag{2}$$

To je tzv. <u>Piconeova identita</u>. Opakujme, že platí pre ľubovoľné integrály y, Y d. rovníc (a), (A) a pre každé dve čísla $\alpha, \beta \in j$, ktoré sú susednými koreňmi integrálu y a medzi ktorými je $Y \neq 0$.

94. Sturmova porovnávacia teoréma

Znie: Nech v d. rovniciach

$$y'' - q(x)\, y = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$Y'' - Q(x)\, Y = 0 \qquad \text{(A)}$$

platí v intervale j nerovnosť

$$Q \geqq q \qquad (1)$$

Potom medzi každými dvoma susednými koreňmi $\alpha < \beta$ ľubovoľného integrálu Y d. rovnice (A) leží aspoň jeden koreň každého intehrálu y d. rovnice (a), alebo obidve d. rovnice (a), (A) sú v intervale $[\alpha, \beta]$ identické a funkcie y, Y sa v tomto intervale líšia len multiplikatívnou konštantou.

Dôkaz. Nech je y, resp. Y ľubovoľný integrál d. rovnice (a), resp. (A) a $\alpha < \beta$ nech sú dva susedné korene integrálu Y. Pripusťme, že v intervale (α, β) je $y \neq 0$. Potom platí Piconeova identita

$$\int_\alpha^\beta (Q - q)\, Y^2 dx + \int_\alpha^\beta \left(Y' - \frac{Y}{y}\, y'\right)^2 dx = 0$$

z ktorej vidíme, prizerajúc k nerovnosti (1) a k spojitosti funkcií q, Q, že v intervale $[\alpha, \beta]$ je identicky

$$Q - q = 0; \quad Y' - \frac{Y}{y}\, y' = 0 \qquad (2)$$

Z prvého vzťahu vidíme, že d. rovnice (a),(A) sú v intervale $[\alpha, \beta]$ identické. Z druhého vyplýva pre $x \in (\alpha, \beta)$

$$\frac{Y'}{Y} = \frac{y'}{y}$$

a odtiaľ vidíme, že sa funkcie y, Y líšia v intervale (α, β) a teda aj v intervale $[\alpha, \beta]$ multiplikatívnou konštantou. Tým je dôkaz uskutočnený.

Z porovnávacej teorémy zvlášť vyplýva:

Keď niektorý integrál d. rovnice (A) má v intervale j $n (\geqq 1)$ koreňov, potom každý integrál d. rovnice (a) má v ňom aspoň $n - 1$ koreňov.

95. Dôležitý zvláštny prípad je ten, keď obidve d. rovnice (a), (A) splývajú, takže ide o jedinú d. rovnicu

$$y'' = q(x)\, y \qquad \text{(a)}$$

Ak sú y, z ľubovoľné nezávislé integrály d. rovnice (a), potom podľa predchádzajúcej vety leží medzi každými dvoma susednými koreňmi integrálu y (z) aspoň jeden koreň integrálu z (y) a teda práve jeden koreň integrálu $z(y)$. Platí teda táto tzv. veta o oddeľovaní koreňov integrálov d. rovnice (a):

Medzi každými dvoma susednými koreňmi ľubovoľného integrálu y d. rovnice (a) leží práve jeden koreň každého od y nezávislého integrálu tej istej d. rovnice (a).

Dôsledkom tejto vety je, že ak niektorý integrál y d. rovnice (a) má v intervale j práve n (≥ 1) koreňov, potom každý od y nezávislý integrál tej istej d. rovnice (a) má v intervale j aspoň $n - 1$ a najviac $n + 1$ koreňov.

96. Podiely nezávislých integrálov a ich derivácií

Nech je u, v usporiadaná dvojica nezávislých integrálov d. rovnice (a) a ($w =$) $uv' - u'v$ = konšt. príslušný wronskián.

Ľahkým výpočtom zistíme, že platia vzorce:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = -\frac{w}{v^2}\,; \quad \left(\frac{u'}{v'}\right)' = \frac{wg}{v'^2}\,; \quad \left(\frac{uu'}{vv'}\right)' = w\,\frac{quv - u'v'}{(vv')^2} \qquad (1)$$

a to v každom čísle $x \in j$, v ktorom je príslušný menovateľ rôzny od nuly.

Vidíme, že pre každé dve čísla $\eta < \xi$ ležiace v intervale j, ktoré sa vyznačujú tým, že v intervale $[\eta, \xi]$ je príslušný menovateľ všade rôzny od nuly, platia vzorce:

$$\frac{u(\xi)}{v(\xi)} - \frac{u(\eta)}{v(\eta)} = -w\int_\eta^\xi \frac{dt}{v^2}\,; \quad \frac{u'(\xi)}{v'(\xi)} - \frac{u'(\eta)}{v'(\eta)} = w\int_\eta^\xi \frac{q\,dt}{v'^2}$$

$$\frac{u(\xi)\,u'(\xi)}{v(\xi)\,v'(\xi)} - \frac{u(\eta)\,u'(\eta)}{v(\eta)\,v'(\eta)} = w\int_\eta^\xi \frac{quv - u'v'}{(vv')^2}\,dt \qquad (2)$$

Z prvého vzorca (1) alebo (2) vidíme, že v každom čiastočnom intervale obsiahnutom v j, ktorý neobsahuje žiadny koreň integrálu v, podiel $u : v$ rastie alebo klesá podľa toho, či je $w < 0$ alebo $w > 0$; podobne z druhého vzorca (1) alebo (2) vyplýva, že v každom čiastočnom intervale obsiahnutom v j, ktorý neobsahuje žiadny koreň funkcie v' a v ktorom má funkcia q konštantné znamienko, podiel $u' : v'$ neklesá alebo nerastie podľa toho, či je $wq \geq 0$ alebo $wq \leq 0$.

Z prvého vzorca (2) vyplýva nový dôkaz vety o oddeľovaní koreňov integrálov d. rovnice (a). Skutočne, ak značia $\eta < \xi$ dva susedné korene integrálu u, takže je $u(\eta) = u(\xi) = 0$, platí, vzhľadom na to, že integrály u, v sú nezávislé: $v(\eta) \neq 0 \neq v(\xi)$. Ak pripustíme, že v intervale (η, ξ) je všade $v \neq 0$, dáva prvý vzorec (2) spor.

Podobne vyplýva z druhého vzorca (2) táto veta o oddeľovaní koreňov derivácií integrálov d. rovnice (a):

Keď medzi dvoma susednými koreňmi derivácie niektorého integrálu y d. rovnice (a) funkcia q sa identicky nerovná nule a má konštantné znamienko, potom medzi nimi leží práve jeden koreň derivácie každého od y nezávislého integrálu tej istej d. rovnice (a).

Táto veta vedie špeciálne k tomuto dôsledku:

Keď funkcia q je v intervale j všade rôzna od nuly, potom medzi každými dvoma susednými koreňmi derivácie každého integrálu y d. rovnice (a) leží práve jeden koreň derivácie každého od y nezávislého integrálu tej istej d. rovnice (a).

97. Polárne súradnice

Nech znovu u, v znamená usporiadanú dvojicu nezávislých integrálov d. rovnice (a) a $(w =)\ uv' - u'v = \text{konšt.}$ príslušný wronskián.

1. Amplitúdy. Nech ρ, σ sú funkcie definované v intervale j vzorcami

$$\rho = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad \sigma = \sqrt{u'^2 + v'^2}$$

Funkciu ρ (σ) nazývame prvá (druhá) amplitúda usporiadanej dvojice integrálov u, v. Vidíme, že opačne usporiadaná dvojica v, u má tú istú prvú a druhú amplitúdu. Vzhľadom na túto symetriu hovoríme stručne o prvej (druhej) amplitúde integrálov u, v.

Funkcie ρ, σ vyhovujú nasledujúcim rovniciam 2. rádu, z ktorých prvá má zmysel v intervale j a druhá len v tých číslach intervalu j, v ktorých existujú funkcie σ'', q' a funkcia q je rôzna do nuly:

$$\rho'' = q\rho + \frac{w^2}{\rho^3} \tag{1}$$

$$\sigma'' = q\sigma + \frac{w^2q^2}{\sigma^3} + \frac{q'}{q}\sigma' \tag{2}$$

Skutočne zo vzorcov

$$\rho^2 = u^2 + v^2, \quad \rho\rho' = uu' + vv'; \quad w = uv' - u'v. \quad \sigma^2 = u'^2 + v'^2 \tag{3}$$

predovšetkým máme

$$\rho^2(\sigma^2 - \rho'^2) = (u v' - u' v)^2 = w^2$$

takže je

$$\sigma^2 - \rho'^2 = \frac{w^2}{\rho^2} \tag{4}$$

Derivovaním druhého vzorca (3) dostaneme

$$\rho \rho'' = \sigma^2 - \rho'^2 + q \rho^2$$

Odtiaľ a zo (4) vyplýva (1).

Derivovaním vzorca (4) vyplýva so zreteľom na (1) vzťah

$$\sigma \sigma' = q \rho \rho' \tag{5}$$

a odtiaľ ďalej

$$\sigma'^2 + \sigma \sigma'' = q\sigma^2 + q' \rho \rho' + q^2 \rho^2$$

takže s použitím vzťahu (5) vychádza

$$q(\sigma'^2 + \sigma \sigma'') = q^2 \sigma^2 + q' \sigma \sigma' + q^3 \sigma^2 \tag{6}$$

Vylúčením funkcií ρ, ρ' zo vzorcov (4), (5), (6) dostaneme vzorec (2).

2. Fázy. Prvou fázou usporiadanej dvojice integrálov u, v rozumieme každú funkciu $\alpha(x)$ definovanú v intervale j, ktorá je v tomto intervale spojitá a splňuje v ňom, s výnimkou koreňov integrálu v, vzťah

$$\operatorname{tg} \alpha(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

Kvôli stručnosti hovoríme spravidla o fázach integrálov u, v namiesto o prvých fázach usporiadanej dvojice integrálov u, v.

Dobre vidíme, že vcelku existuje spočetný systém fáz integrálov u, v, pričom sa tieto *fázy od seba líšia o celé násobky čísel* π.

Hodnota každej fázy integrálov u, v v ľubovoľnom koreni integrálu u (v) je párny (nepárny) násobok čísla $\frac{\pi}{2}$. Vidíme, že vždy existuje fáza, ktorá má v danom koreni integrálu u hodnotu 0.

Každá fáza v intervale j rastie alebo klesá podľa toho, či $\operatorname{sgn}(-w) = 1$ alebo $\operatorname{sgn}(-w) = -1$.

Nech $x_0 \in j$ je ľubovoľný koreň integrálu u. Uvažujme o ľubovoľnej fáze α integrálov u, v. Táto fáza má teda v čísle x_0 hodnotu $n\pi$ pričom n znamená vhodné celé číslo.

Ľahko zistíme, že funkcia α má v každom čísle x intervalu j spojitú deriváciu tretieho rádu a splňuje relácie

$$\alpha' = \frac{-w}{\rho^2}, \quad \alpha'' = 2w\frac{\rho\rho'}{\rho^4}, \quad \alpha''' = 2w\left[\frac{q}{\rho^2} - 3\frac{\sigma^2}{\rho^4} + 4\frac{w^2}{\rho^6}\right] \qquad (7)$$

pričom ρ, σ sú príslušné amplitúdy. Z týchto vzťahov vychádza, že funkcia α vyhovuje nelineárnej dif. rovnici 3. rádu

$$-\{\alpha, x\} - \alpha'^2 = q(x) \qquad (8)$$

symbol $\{\alpha, x\}$ znamená tzv. schwarzovskú deriváciu funkcie α v čísle x, t.j. výraz

$$\{\alpha, x\} = \frac{1}{2}\frac{\alpha'''(x)}{\alpha'(x)} - \frac{3}{4}\frac{\alpha''^2(x)}{\alpha'^2(x)}.$$

Všimnime si, že prvý vzorec (7) vyjadruje vzťah medzi prvou amplitúdou a fázou integrálov u, v:

$$\rho = \sqrt{\frac{-w}{\alpha'}}$$

Poznamenajme, že podobne ako prvú fázu usporiadanej dvojice integrálov u, v definujeme druhú fázu $\beta(x)$ tejto usporiadanej dvojice pomocou vzťahu

$$\operatorname{tg}\beta(x) = \frac{u'(x)}{v'(x)}$$

V tomto prípade sú však výsledky zložitejšie.

3. Vyjadrenie integrálov, u, v v polárnych súradniciach, t.j. pomocou funkcií ρ, α je dané vzorcami

$$u(x) = \varepsilon\rho(x)\sin\alpha(x), \quad v(x) = \varepsilon\rho(x)\cos\alpha(x)$$

kde značí

$$\varepsilon = (-1)^n \operatorname{sgn} v(x_0)$$

Pritom jednotlivé symboly majú už predtým uvedený význam.

98. Transformácia lineárnych d. rovníc 2. rádu

1. Uvažujme o dvoch lineárnych d. rovniciach 2. rádu, ktorých nezávisle premenné označíme t, T:

$$y'' = q(t)\, y \qquad \text{(a)}$$

$$Y'' = Q(T)\, Y \qquad \text{(A)}$$

Predpokladáme, že funkcie q, Q sú spojité v otvorených intervaloch $j = (a, b)$, $J = (A, B)$ a pripúšťame aj prípady $a = -\infty$, $b = \infty$; $A = -\infty$, $B = \infty$.

Za účelom zjednodušenia úvah sa v ďalšom obmedzíme na prípad, že každý integrál každej d. rovnice (a), (A) má v intervale j, resp. J aspoň jeden koreň.

Označme písmenami r, R lineárne priestory vytvorené všetkými integrálmi d. rovníc (a), (A). V týchto priestoroch zvoľme ľubovoľné bázy $u, v \in r$; $U, V \in R$, t.j. usporiadané dvojice lineárne nezávislých integrálov u, v; U, V d. rovníc (a), (A) a označme w, W príslušné wronskiány, takže $w = uv' - u'v$, $W = UV' - U'V$. Pomocou týchto báz definujeme medzi priestormi r R lineárnu korešpondenciu tak, že vzájomne priradíme každé dve integrály $y \in r$, $Y \in R$ majúce vzhľadom na bázu vždy tie isté (konštantné) súradnice γ_1, γ_2: $y = \gamma_1 u + \gamma_2 v$, $Y = \gamma_1 U + \gamma_2 V$. Funkciou $y \to Y$ je dané isté lineárne zobrazenie p priestoru r na priestor R; číslo $\tau = \dfrac{w}{W}$ sa nazýva <u>charakteristika zobrazenia p.</u> Podobne je funkciou $Y \to y$ dané isté lineárne zobrazenie P priestoru R na priestor r s charakteristikou $\mathcal{T} = \dfrac{W}{w}$. Zobrazenia p, P sú zrejme navzájom inverzné a to isté platí o ich charakteristikách.

Vyjadrime bázy u, v; U, V v polárnych súradniciach pomocou ich amplitúd

$$\rho(t) = \sqrt{u^2(t) + v^2(t)}, \quad P(T) = \sqrt{U^2(T) + V^2(T)}$$

a nejakých fáz $\alpha(t)$, $A(T)$, ktoré zatiaľ zvolíme v príslušných spočetných systémoch fáz ľubovoľne. Dostaneme vzorce

$$\begin{aligned} u(t) &= \varepsilon \rho(t) \sin \alpha(t), & v(t) &= \varepsilon \rho(t) \cos \alpha(t) \\ U(T) &= EP(T) \sin A(T), & V(T) &= EP(T) \cos A(T) \end{aligned} \qquad (1)$$

$$(\varepsilon, E = \pm 1)$$

a vidíme, že každé dva navzájom priradené integrály $y \in r$, $Y \in R$ sú dané vzorcami tvarú:

$$y(t) = \varepsilon k_1 \rho(t) \sin[\alpha(t) + k_2], \quad Y(T) = E k_1 P(T) \sin[A(T) + k_2] \tag{2}$$

pričom k_1, k_2 znamenajú konštanty. Pripomeňme, že podľa 98 (7) platia pre $t \in j$, $T \in J$ vzťahy

$$\alpha'(t) = \frac{-W}{\rho^2(t)}, \quad A'(T) = \frac{-w}{P^2(T)} \tag{3}$$

Pozmeňme teraz prevedenú voľbu fáz α, A takto: Podľa nášho predpokladu má každý integrál u, U aspoň jeden koreň $t_0 \in j$, $T_0 \in J$, takže hodnoty fáz α, A v číslach $t = t_0$, $T = T_0$ sú celé násobky čísla π, napr.: $n\pi$, $N\pi$. Spomínaná zmena spočíva v tom, že fázy α, A nahradíme fázami $\alpha - n\pi$, $A - N\pi$ a pritom ponecháme to isté označenie α, A. Pre tieto nové fázy máme $\alpha(t_0) = 0$, $A(T_0) = 0$ a súčasne platia vzorce (1), (2), (3); okrem toho je $\varepsilon = \operatorname{sgn} v(t_0)$, $E = \operatorname{sgn} V(T_0)$.

Uvažujme teraz o rovnici

$$\alpha(t) = A(T) \tag{4}$$

Táto rovnica je zrejme splnená v číslach $t_0 \in j$, $T_0 \in J$. Pretože fázy α, A rastú alebo klesajú, vidíme, že existuje práve jedna funkcia $T = X(t)$ definovaná v istom okolí $i \subset j$ čísla t_0, ktorá pre $t = t_0$ má hodnotu $T_0 \in J$ a v intervale i identicky splňuje rovnicu (4); pritom máme na mysli najširší interval i majúci túto vlastnosť. Podobne existuje práve jedna funkcia $t = x(T)$ definovaná v istom okolí $I \subset J$ čísla T_0, ktorá pre $T = T_0$ má hodnotu $t_0 \in j$ a v intervale I identicky spĺňa rovnicu (4); I znamená najširší interval majúci uvedenú vlastnosť. Je zrejmé, že interval I predstavuje množinu hodnôt funkcie X v intervale i, $I = X(i)$ a podobne platí $i = x(I)$. Vidíme, že funkcie X, x sú navzájom inverzné a dajú sa vyjadriť vzorcami

$$X(t) = A^{-1}(\alpha(t)), \quad x(T) = \alpha^{-1}(A(T))$$

pričom A^{-1}, α^{-1} znamenajú inverzné funkcie vzhľadom na A, α.

Okrem toho ľahko zistíme, že funkcie X, x majú v intervaloch i, I spojité derivácie 3. rádu a prizerajúc k vzorcu 98 (8) odvodíme, že tieto funkcie vyhovujú nelineárnym d. rovniciam 3. rádu

$$-\{X, t\} + Q(X)X'^2 = q(t) \tag{b}$$

$$-\{x, T\} + q(x)\dot{x}^2 = Q(T) \tag{B}$$

Poznamenajme, že rovnice (b), (B) môžu byť nahradené jedinou rovnicou

$$\left(\frac{1}{x'(t)}\right)'' + Q(X) \cdot X'(t) = \left(\frac{1}{\dot{x}(T)}\right)^{\cdot\cdot} + q(x) \cdot \dot{x}(T)$$

v ktorej hodnoty t, T súvisia navzájom podľa vzorcov: $T = X(t) \in I$, $t = x(T) \in i$; pritom sú bodkami označené derivácie podľa T.

Pripojme teraz poznámku o polohe intervalov i, I v intervaloch j, J.

Označme $i = (a', b')$, $I = (A', B')$ a ďalej

$$c_1 = \lim_{t \to a+} \alpha(t), \quad c_2 = \lim_{t \to b-} \alpha(t); \quad C_1 = \lim_{T \to A+} A(T), \quad C_2 = \lim_{T \to B-} A(T)$$

limity môžu byť eventuálne nevlastné.

Zrejme platí: $c_1 < c_2$ $(C_1 < C_2)$ alebo $c_1 > c_2$ $(C_1 > C_2)$ podľa toho, či funkcia α (A) rastie alebo klesá.

Polohy intervalov i, I v intervaloch j, J závisia na vzťahoch medzi veličinami c_1, c_2 a C_1, C_2.

Vezmime do úvahy napr. prípad $c_1 < c_2$, $C_1 < C_2$ a všimnime si jednotlivé možnosti $c_1 \lesseqgtr C_1$, $c_2 \lesseqgtr C_2$:

Ľahko zistíme, že v prípade

$$1^\circ \ c_1 < C_1, \quad 2^\circ \ c_1 = C_1, \quad 3^\circ \ c_1 > C_1$$

máme

$$1^\circ \ a' > a, \ A' = A; \quad 2^\circ \ a' = a, \ A' = A; \quad 3^\circ \ a' = a, \ A' > A$$

a podobne v prípade

$$1^\circ \ c_2 < C_2, \quad 2^\circ \ c_2 = C_2, \quad 3^\circ \ c_2 > C_2$$

je

$$1^\circ \ b' = b, \ B' < B; \quad 2^\circ \ b' = b, \ B' = B; \quad 3^\circ \ b' < b, \ B' = B$$

Vidíme, že vždy buď splývajú ľavé (pravé) konce intervalov i, j, alebo ľavé (pravé) konce intervalov I, J; súčasne platí, že buď splývajú ľavé (pravé) konce intervalov I, J, alebo ľavé (pravé) konce intervalov i, j.

Ten istý výsledok dostaneme v prípade $c_1 > c_2$, $C_1 > C_2$. V prípadoch $c_1 < c_2$, $C_1 > C_2$ a $c_1 > c_2$, $C_1 < C_2$ platí podobne:

Vždy splývajú buď ľavé (pravé) konce intervalov i, j, alebo pravé (ľavé) konce intervalov I, J; súčasne platí, že splývajú buď ľavé (pravé) konce intervalov I, J, alebo pravé (ľavé) konce intervalov i, j.

Tieto poznatky o polohe intervalov i, j v intervaloch I, J môžeme stručne zhrnúť tak, že intervaly i, I vždy siahajú (v predtým uvedenom zmysle) ku koncom intervalov j, J. Zvlášť podotknime, že vo zvláštnych prípadoch môže interval i splynúť s intervalom j a súčasne interval I s intervalom J : $i = j$, $I = J$.

Vráťme sa teraz k vzorcom (2). Vidíme, že časti integrálov $y(t)$, $Y(T)$ ($t \in i$, $T \in I$) navzájom súvisia podľa vzorcov

$$y(t) = \varepsilon E \frac{\rho(t)}{P(X(t))} Y(X(t)), \quad Y(T) = E \varepsilon \frac{P(t)}{\rho(x(T))} y(x(T)).$$

ktoré možno písať (s prihliadnutím k (3), (4)) v tvare

$$\varepsilon \sqrt[4]{|\ell|}\, y(t) = E \sqrt[4]{|\tau|}\, \frac{Y(x(t))}{\sqrt{|X'(t)|}}$$

$$E \sqrt[4]{|\tau|}\, Y(T) = \varepsilon \sqrt[4]{|\ell|}\, \frac{y(x(T))}{\sqrt{|\dot{x}(T)|}}$$

Za účelom zjednodušenia týchto vzorcov normujeme integrály y, Y tak, že ich násobíme konštantami $\varepsilon \sqrt[4]{|\ell|}$, $E \sqrt[4]{|\tau|}$ a pre normované integrály použijeme to isté označenie y, Y. Potom môžeme uvedené vzorce zapísať takto:

$$y(t) = \frac{Y(X(t))}{\sqrt{|X'(t)|}}$$
$$Y(T) = \frac{y(x(T))}{\sqrt{|\dot{x}(T)|}} \qquad (5)$$

Môžeme ich vyjadriť tiež jediným vzorcom

$$\sqrt[4]{|X'(t)|}\; y(t) = \sqrt[4]{|\dot{x}(T)|}\; Y(T) \qquad (5')$$

pričom hodnoty t, T sú viazané vzťahmi: $t = x(T) \in i$, $T = X(t) \in I$.

Došli sme k tomuto výsledku:

Ku každej lineárnej korešpondencii medzi priestormi r, R existujú navzájom inverzné funkcie $T = X(t)$, $t = x(T)$, ktoré sú riešeniami nelineárnych d. rovníc 3. rádu (b), (B). Tieto funkcie sú definované rovnicou $\alpha(t) = A(T)$, pričom α, A znamenajú vhodné fázy d. rovníc (a), (A), existujú v istých intervaloch $i \subset j$, $I \subset J$ a vyznačujú sa tým, že navzájom transformujú v zmysle vzorcov (5), resp. (5'), časti každých dvoch odpovedajúcich si a vhodne normovaných integrálov y, Y d. rovníc (a), (A). Intervaly i, I, v ktorých sú tieto časti definované, siahajú (v popísanom zmysle) ku koncom intervalov j, J.

2. Uvedené úvahy vedú k vyšetrovaniu nelineárnych d. rovníc 3. rádu (b), (B), a to pre ľubovoľné d. rovnice (a), (A) so spojitými koeficientami q, Q v intervaloch j, J. V tomto smere sa tu uspokojíme s tvrdením, že platí táto teoréma o existencii a jednoznačnosti integrálov d. rovníc (b), (B).

Nech $t_0 \in j$; $X_0 \in J$, X_0' $(\neq 0)$, X_0'' sú ľubovoľné čísla. Potom existuje práve jeden integrál $X(t)$ d. rovnice (b), definovaný v istom intervale $i \subset j$, ktorý spĺňa začiatočné podmienky

$$X(t_0) = X_0, \; X'(t_0) = X_0', \quad X''(t_0) = X_0''$$

a je najširší v tom zmysle, že každý integrál d. rovnice (b), ktorý splňuje tie isté začiatočné podmienky, je jeho časťou. Funkcia $x(T)$ inverzná vzhľadom na $X(t)$, definovaná v intervale $I = X(i)$, je integrálom d. rovnice (B).

Funkcia X transformuje časť každého integrálu Y d. rovnice (A) na časť istého integrálu y d. rovnice (a) a súčasne funkcia x transformuje túto časť integrálu y do spomínanej časti integrálu Y v zmysle vzorcov

$$y(t) = \frac{Y(X(t))}{\sqrt{|X'(t)|}}, \quad Y(T) = \frac{y(x(t))}{\sqrt{|\dot{x}(T)|}} \qquad (t_0 \in i, \; T \in I)$$

3. Predchádzajúce poznatky sú základom obsažnej teórie transformácií lineárnych d. rovníc 2. rádu. Táto teória pripúšťa početné aplikácie sčasti tiež v teórii lineárnych d. rovníc vyšších rádov.

Zvlášť sa v rámci tejto teórie transformácií darí riešenie otázok tohto druhu:

Nájdite všetky lineárne d. rovnice 2. rádu (a), ktorých integrály majú vopred dané vlastnosti.

Ako ukážku riešenia takých problémov určíme všetky d. rovnice

$$y'' = q(t)\, y \qquad \text{(a)}$$

so spojitým koeficientom q v danom otvorenom intervale $j = (a, b)$, ktorých každý integrál má vľavo od daného čísla $t_0 \in j$ $m (\geq 0)$ alebo $m + 1$ koreňov a vpravo od neho n (≥ 0) alebo $n + 1$ koreňov.

Nech je teda (a) lineárna d. rovnica, ktorá má uvedenú vlastnosť.

Vezmime do úvahy ľubovoľný integrál u tejto d. rovnice, ktorý má v čísle t_0 koreň, takže $u(t_0) = 0$. Ľahko sa zistí (s pomocou vety o oddeľovaní koreňov), že integrál u má vľavo od čísla t_0 práve m a vpravo od neho práve n koreňov. Označme tieto korene

$$(a <)\ t_{-m} < \dots < t_{-1} < t_0 < t_1 < \dots < t_n \quad (< b) \tag{6}$$

Zvoľme ľubovoľný ďalší integrál v d. rovnice (a), nezávislý na u, napr. taký, že $-w = vu' - uv' > 0$. Nech je α fáza integrálov u, v, ktorá má v čísle t_0 hodnotu 0.: $\alpha(t_0) = 0$. Z predpokladu $-w > 0$ vychádza, že fáza α rastie, takže v číslach (6) má hodnoty

$$-m\pi, \dots, -\pi, 0, \pi, \dots, n\pi$$

Vidíme, že čísla $c_1 = \lim_{t\to a+} \alpha(t)$, $c_2 = \lim_{t\to b-} \alpha(t)$ vyhovujú nerovnostiam

$$-(m+1)\pi \leq c_1 < -m\pi\,;\quad n\pi < c_2 \leq (n+1)\pi$$

Funkcia $\alpha(t)$ splňuje v intervale j, podľa 98 (8), rovnicu

$$q(t) = -\{\alpha, t\} - \alpha'^2(t) \tag{7}$$

Tým dochádzame k poznatku, že v d. rovnici (a), majúcej uvedenú vlastnosť, je funkcia q daná vzorcom (7), pričom α je vhodná funkcia v intervale j, ktorá v ňom rastie, má spojitú derìváciu 3. rádu a okrem toho sa vyznačuje tým, že $\alpha(t_0) = 0$ a

$$-(m+1)\pi \leq \lim_{t\to a+} \alpha(t) < -m\pi\,;\quad n\pi < \lim_{t\to b-} \alpha(t) \leq (n+1)\pi$$

Nech je teraz X ľubovoľná funkcia v intervale j, ktorá tam má tie isté vlastnosti, aké sme práve uviedli pre funkciu α. Opäť označme $c_1 = \lim_{t\to a+} X(t)$, $c_2 = \lim_{t\to b-} X(t)$; zrejme je $c_1 < c_2$.

Definujme funkciu q vzťahom

$$q(t) = -\{X, t\} - X'^2(t)$$

a vezmime do úvahy d. rovnice

$$y'' = q(t)\,y \tag{a}$$

$$Y'' = -Y \tag{A}$$

v intervaloch $j = (a, b)$, $J = (c_1, c_2)$.

Pretože sin T, cos T sú integrály d. rovnice (A) a pretože (vzhľadom na definíciu funkcie q) je X riešením d. rovnice (b) príslušnej k d. rovniciam (a), (A), sú funkcie

$$u(t) = \frac{\sin X(t)}{\sqrt{X'(t)}}, \quad v(t) = \frac{\cos X(t)}{\sqrt{X'(t)}}$$

integrálmi d. rovnice (a) a sú zrejme nezávislé. Ľubovoľný integrál y d. rovnice (a) má tvar

$$y(t) = \gamma_1 u(t) + \gamma_2 v(t) = \frac{1}{\sqrt{X'(t)}} \left\{ \gamma_1 \sin X(t) + \gamma_2 \cos X(t) \right\}$$

čiže

$$y(t) = \frac{k_1}{\sqrt{X'(t)}} \sin \left\{ X(t) + k_2 \right\}$$

pričom $\gamma_1, \gamma_2, k_1, k_2$ sú vhodné konštanty.

V prípade $m \geqq 1$ existuje vľavo od čísla t_0 interval $[t_{-\mu}, t_{-\mu+1})$ pre $\mu = 1, 2, \ldots, m$. V tomto intervale hodnoty funkcie X prebiehajú interval $[-\mu\pi, -(\mu-1)\pi)$ a teda hodnoty funkcie $X + k_2$ interval $[-\mu\pi + k_2, -(\mu-1)\pi + k_2)$, v ktorom leží práve jeden celý násobok čísla π. V intervale $[t_{-\mu}, t_{-\mu+1})$ má teda integrál y práve jeden koreň.

Vidíme, že v prípade $m \geqq 0$ má integrál y vľavo od čísla t_0 práve m alebo $m + 1$ koreňov podľa toho, či má alebo nemá koreň v intervale (a, t_{-m}).

Podobne sa zistí, že integrál y má vpravo od čísla t_0 n alebo $n + 1$ koreňov.

Tak sme prišli k tomuto výsledku:

Všetky d. rovnice (a), ktoré sa vyznačujú tým, že každý integrál má vľavo od daného čísla $t_0 \in j$ $m(\geqq 0)$ alebo $m + 1$ koreňov a vpravo od neho $n(\geqq 0)$ alebo $n + 1$ koreňov, sú určené vzorcom

$$q(t) = -\left\{X, t\right\} - X'^2(t)$$

pričom X je ľubovoľná funkcia v intervale j, ktorá v ňom rastie, má spojitú deriváciu 3. rádu a splňuje podmienky:

$$X(t_0) = 0; \; -(m+1)\pi \leqq \lim_{t \to a+} X(t) < -m\pi;$$

$$n\pi < \lim_{t \to b-} X(t) \leqq (n+1)\pi$$

K tomuto výsledku poznamenajme, že celkom podobne sa odvodí táto veta:

Všetky d. rovnice (a), ktoré sa vyznačujú tým, že každý integrál má smerom k obidvom koncom intervalu j nekonečne mnoho koreňov, sú dané vzorcom

$$q(t) = -\{X, t\} - X'^2(t)$$

pričom X je ľubovoľná funkcia v intervale j, ktorá v ňom rastie, má spojitú deriváciu 3. rádu a je zdola i zhora neohraničená.

Kvôli úplnosti uveďme ešte túto vetu, ktorej dôkaz je máličko odlišný od predchádzajúceho:

Všetky d. rovnice (a), ktoré sa vyznačujú tým, že každý integrál má v intervale j najviac jeden koreň, sú dané vzorcom

$$q(t) = -\{X, t\}$$

pričom X je ľubovoľná funkcia v intervale j, ktorá v ňom rastie, má spojitú deriváciu 3. rádu a v danom čísle $t_0 \in j$ splňuje podmienky:

$$X(t_0) = 0, \quad X'(t_0) = 1$$

99. Oscilačné vlastnosti

V ďalšom predpokladáme, že v d. rovnici

$$y'' = q(t)\, y \qquad (a)$$

je funkcia q spojitá v intervale (a, ∞), pričom a je dané číslo.

Nech y ľubovoľný integrál d. rovnice (a) (definovaný v tomto intervale).

Sú dve možnosti: Buď existuje číslo $t_0 \in (a, \infty)$ také, že pre $t \geq t_0$ je hodnota funkcie y stále kladná alebo stále záporná, alebo také číslo neexistuje.

V prvom prípade funkcia y nemá v intervale $[t_0, \infty)$ korene. V druhom prípade existujú ku každému číslu $t_0 \in (a, \infty)$ čísla t_1, t_2, ktoré sú väčšie než t_0, a také, že funkcia y v nich má hodnoty opačných znamienok; funkcia y má teda korene väčšie ako t_0 a z toho vyplýva, že má nekonečne mnoho koreňov, ktoré sú väčšie ako ľubovoľné číslo.

V prvom prípade hovoríme, že pre $t \to \infty$ integrál y neosciluje, v druhom, že osciluje.

Z porovnávacej teorémy vyplýva, že ak osciluje jediný integrál d. rovnice (a), potom oscilujú všetky. Môžeme teda d. rovnice tvaru (a) rozdeliť na neoscilujúce, t.j. také, ktorých integrály neoscilujú, a oscilujúce, ktorých integrály oscilujú.

Dôležitý úsek teórie lineárnych d. rovníc 2. rádu tvoria úvahy o tom, za akých nutných a postačujúcich podmienok, väčšinou však iba postačujúcich, d. rovnica (a) osciluje. V tomto smere bolo napísaných mnoho desiatok prác (porov. M. R á b , Kriterien für die Oszillation der Lösungen der Differentialgleichung $[p(x)y']' + q(x)\,y = 0$. Čas. pro pěst. mat., 84 (1959), 335 - 370).

Táto otázka má dôležitý fyzikálny význam:

Nech sa po priamke p, na ktorej je vyznačená nulová poloha O, pohybuje bod P tak, že jeho odchýlka $y(t)$ od miesta O (kladná vpravo a záporná vľavo od O) splňuje v každom okamžiku t d. rovnicu (a). Otázka, či d. rovnica (a) osciluje alebo nie, je ekvivalentná s tým, či v dosť ďalekej budúcnosti bude bod P stále kmitať okolo nulovej polohy, alebo či sa eventuálne po konečnom počte kmitov do nulovej polohy už nevráti.

100. Uspokojíme sa v tomto smere len s niekoľkými najjednoduchšími kritériami.

1. Nech pre dosť veľké t je $q \geq 0$. Potom d. rovnica (a) neosciluje.

Skutočne, nech je y ľubovoľný integrál d. rovnice (a). Funkcia yy' má deriváciu $y'^2 + qy^2$. Vidíme, že pre dosť veľké t je $(yy')' \geq 0$, takže funkcia yy' neklesá. Teda, ak existuje koreň t_0 funkcie y, je $y(t_0) = 0$, $y'(t_0) \neq 0$. V prípade $y'(t_0) > 0$ máme v nejakom rýdzom okolí čísla t_0 sprava: $yy' > 0$ a táto nerovnosť platí pre všetky $t > t_0$, pretože funkcia yy' neklesá. Podobne v prípade $y'(t_0) < 0$. Tak vychádza $y \neq 0$ pre $t > t_0$.

2. Z porovnávacej teorémy vyplýva, že d. rovnica (a) osciluje, keď $q \leq q_1$ a d. rovnica $y_1'' = q_1(t)y_1$ osciluje. Špeciálne d. rovnica osciluje, keď pre dosť veľké t platí: $q \leq -a^2 < 0$, pričom a znamená nejakú od nuly rôznu konštantu.

3. D. rovnica (a) osciluje, keď platí $\lim_{t \to \infty} q(t) < 0$, pričom ide o limitu vlastnú alebo nevlastnú. To je bezprostredný dôsledok predchádzajúceho poznatku.

Príklad. Besselova funkcia $J_\nu(t)$ vyhovuje d. rovnici

$$Y'' + \frac{1}{t}Y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{t^2}\right)Y = 0$$

Funkcia $y_\nu(t) = \sqrt{t}\,J_\nu(t)$ vyhovuje d. rovnici

$$y'' = -\left(1 + \frac{1-4\nu^2}{4t^2}\right)y$$

Pretože je $\lim\limits_{t \to \infty} \left[-\left(1 + \frac{1 - 4\nu^2}{4t^2}\right)\right] = -1 < 0$, vidíme, že funkcia y_ν a teda tiež J_ν osciluje.

4. D. rovnica (a) osciluje, keď pre dosť veľké t je

$$q(t) \leqq -\frac{1 + \delta}{4t^2}$$

pričom číslo δ je > 0. Neosciluje, keď

$$-\frac{1}{4t^2} \leqq q(t) < 0 \quad .$$

<u>Dôkaz</u>. D. rovnica

$$Y'' = \frac{\alpha}{t^2} Y \qquad \text{(A)}$$

v ktorej α znamená konštantu, má integrál

$$Y(t) = \begin{cases} \sqrt{t} \cos\left\{\sqrt{-\alpha - \frac{1}{4}} \log t\right\}, & \text{keď } \alpha < -\frac{1}{4} \\ t^{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\alpha + \frac{1}{4}}} & \text{keď } \alpha \geqq -\frac{1}{4} \end{cases}$$

D. rovnica (A), v ktorej $\alpha = -\frac{1 + \delta}{4}$, $\delta > 0$, má teda oscilujúci integrál a prvá časť vety vyplýva z porovnávacej teorémy.

Ak platí predpoklad druhej časti a osciluje d. rovnica (a), potom podľa porovnávacej teorémy osciluje i d. rovnica (A); to však nie je možné, pretože integrál $Y(t) = \sqrt{t}$ neosciluje.

5. Predpokladajme, že funkcia q je pre $t > a$ záporná, teda $q < 0$ a že má spojitú deriváciu 2. rádu.

Ľahko sa zistí, že ak y je integrálom d. rovnice (a), potom funkcia

$$y_1(t) = \frac{y'(t)}{\sqrt{-q(t)}}$$

predstavuje integrál d. rovnice

$$y_1'' = \left\{ q(t) + \frac{3}{4}\left(\frac{q'(t)}{q(t)}\right)^2 - \frac{1}{2}\,\frac{q''(t)}{q(t)} \right\} y \qquad (a_1)$$

D. rovnicu (a_1) nazývame <u>prvou sprievodnou rovnicou vzhľadom na d. rovnicu (a)</u>.

Napr. prvou sprievodnou rovnicou vzhľadom na d. rovnicu pre Besselove funkcie

$$y'' = -\left(1 + \frac{1 - 4\nu^2}{t^2}\right) y$$

je

$$y_1'' = -\left\{1 + \frac{1 - 4\nu^2}{t^2} + \frac{3(1 - 4\nu^2)}{(t^2 + 1 - 4\nu^2)^2}\right\} y_1$$

Ukážeme, že ak d. rovnica (a_1) osciluje, potom to isté platí o d. rovnici (a).

Skutočne, ak d. rovnica (a_1) osciluje, potom derivácia y' každého riešenia d. rovnice (a) osciluje. Aplikujúc Rolleovu vetu na funkciu y' a jej ľubovoľné dva susedné korene, vidíme, že aj riešenie y d. rovnice (a) osciluje.