6. Zobrazení množin

Teorie rozkladů v množinách vyvinutá v předcházejících kapitolách je množinovým základem teorie grupoidů a grup, která je cílem, k němuž směřujeme. Avšak naše dosavadní výsledky jsou pouze jednou částí prostředků potřebných k výstavbě teorie grupoidů a grup. Druhou část představuje nauka o zobrazení množin, jíž se nyní v několika následujících kapitolách budeme zabývat. Čtenář zajisté uvítá s povděkem, že po předcházejících, zčásti dost složitých výkladech, přijdou nyní na řadu opět jednodušší věci.

6.1. Zobrazení do množiny

V denním životě se napořád setkáváme se zjevy, které souvisí s matematickým pojmem zobrazení. V nejjednodušším případě mají takové zjevy toto schéma: Máme dvě neprázdné množiny G, G^* a mezi prvky množin nějaký vztah, jímž je ke každému prvku množiny G přiřazen právě jeden prvek množiny G^*.

Např.: [1] Mezi diváky při určitém představení a mezi vstupenkami na to představení vydanými je vztah daný tím, že každý divák je přítomen na základě právě jedné vstupenky.

[2] Mezi žáky určité školy a jejími třídami je vztah daný tím, že každý žák patří právě do jedné třídy.

[3] Určení počtu n nějakých věcí záleží v tom, že ke každé věci přiřadíme právě jedno přirozené číslo $1, 2, \ldots, n$, a to obvykle tím způsobem, že vezmeme vždy jednu z nich do rukou a současně ji označíme (znakem anebo jenom v mysli) jedním z čísel $1, 2, \ldots, n$.

Nechť tedy G, G^* značí neprázdné množiny. *Zobrazením množiny G do G^** rozumíme nějaký vztah mezi prvky obou množin, jímž je ke každému prvku množiny G přiřazen právě jeden prvek množiny G^*; jinak řečeno, jímž je každý prvek množiny G zobrazen právě na jeden prvek množiny G^*.

Zobrazení množiny G do G^* se nazývá také *funkce* na množině G do množiny G^*. Zobrazují-li nějaká zobrazení $\mathbf{g}$, $\mathbf{h}$ množiny G do G^* každý prvek v G vždy na stejný prvek v G^*, nazýváme je *rovná* a píšeme $\mathbf{g} = \mathbf{h}$. V opačném případě je nazýváme *různá* a píšeme $\mathbf{g} \neq \mathbf{h}$.

Vezměme v úvahu libovolné zobrazení $\mathbf{g}$ množiny G do G^*. K libovolnému prvku $a \in G$ je zobrazením $\mathbf{g}$ přiřazen jistý prvek $a^* \in G^*$. Prvek a nazýváme *vzor prvku* a^* a prvek a^* *obraz prvku a v zobrazení* $\mathbf{g}$ a píšeme $a^* = \mathbf{g}(a)$ nebo jenom

$a^* = ga$; někdy také říkáme, že a^* je *hodnota* funkce g v prvku a. Jiný způsob označení je $\begin{pmatrix} a \\ a^* \end{pmatrix}$; symbolem $\begin{pmatrix} a & b & \ldots \\ a^* & b^* & \ldots \end{pmatrix}$ pak vyjadřujeme rovnosti $a^* = ga$, $b^* = gb, \ldots$

Když A značí nějakou podmnožinu v G a A^* podmnožinu v G^* skládající se z obrazů v zobrazení g jednotlivých prvků množiny A, píšeme $A^* = g(A)$ nebo jenom $A^* = gA$. Když $A \neq \emptyset$, můžeme ke každému prvku $a \in A$ přiřadit prvek $ga \in G^*$ a tím obdržíme jisté zobrazení množiny A do G^*. Toto zobrazení nazýváme *částečné zobrazení (funkce)* určené zobrazením g a označujeme je symbolem g_A.

Podle definice zobrazení množiny G do G^* je v každém zobrazení k libovolnému prvku $a \in G$ přiřazen právě jeden obraz $a^* \in G^*$. S ohledem na tuto vlastnost nazýváme uvedená zobrazení *jednoznačná*.

V průběhu našich úvah se vyskytnou i situace, v nichž vystoupí několik zobrazení $g, h, \ldots$ současně. V takových případech opatříme obvykle pojmy týkající se jednotlivých zobrazení předponou, tedy g-, h-, ...; např. budeme hovořit o g-obrazech, h-vzorech atp.

6.2. Zobrazení na množinu

Podle definice zobrazení množiny G do G^* má sice v zobrazení g každý prvek v G jistý obraz v G^*, ale naopak nemá nutně každý prvek v G^* vzor v G. Když je zobrazení g takové, že každý prvek v G^* má vzor, pak pravíme, že g *je zobrazení množiny G na množinu G^** nebo že *funkce g zobrazuje množinu G na množinu G^**. Když $\emptyset \neq A \subset G$, je g_A zřejmě zobrazení množiny A na množinu gA.

Výše jsme uvedli tři příklady zobrazení. Z nich [2] a [3] jsou příklady zobrazení množiny na množinu: ke každé třídě patří alespoň jeden žák, který je k ní v onom zobrazení přiřazen, a podobně, když máme n věcí, pak při určování jejich počtu byla každým z čísel $1, 2, \ldots, n$ jedna věc označena. Naproti tomu je [1] příkladem zobrazení množiny na množinu jenom tehdy, když připustíme, že divadlo je vyprodáno. V opačném případě zbyly v pokladně vstupenky, pro které není diváků.

6.3. Zobrazení prosté

V pojmu zobrazení množiny G do G^* je ještě další nesouměrnost vzhledem k oběma množinám: V zobrazení g má každý prvek v G právě jeden obraz v G^*, kdežto naopak týž prvek v G^* může mít několik a třeba i nekonečně mnoho vzorů v G.

Má-li každý prvek v G^* v zobrazení g nejvýše jeden vzor, pak se g nazývá *jedno-jednoznačné* neboli *prosté* zobrazení množiny G do G^*.

Zřejmě je $\mathbf{g}$ prosté zobrazení množiny G na G^*, když a jen když má každý prvek v G^* právě jeden vzor.

Z předešlých příkladů je [3] příkladem prostého zobrazení množiny na množinu; [2] je příkladem prostého zobrazení množiny na množinu jenom (v teoretickém případě), když každá třída má jenom jednoho žáka; [1] je příkladem prostého zobrazení množiny na množinu jenom v tom případě, že divadlo je vyprodáno a v každé lóži sedí jenom jeden divák (obvykle lóžová vstupenka opravňuje k návštěvě představení několik diváků).

6.4. Inverzní zobrazení. Ekvivalentní množiny Uspořádané skupiny prvků

K pojmu prostého zobrazení množiny na množinu se připínají dva důležité pojmy: pojem inverzního zobrazení a pojem ekvivalentních množin.

Inverzní zobrazení. Předpokládejme, že $\mathbf{g}$ je *prosté* zobrazení množiny G na G^*. V tom případě můžeme definovat jisté zobrazení množiny G^* na množinu G, které značíme symbolem $\mathbf{g}^{-1}$ a nazýváme *inverzní zobrazení* vzhledem k $\mathbf{g}$, a to takto: Ke každému prvku $a^* \in G^*$ je v zobrazení $\mathbf{g}^{-1}$ přiřazen jeho vzor $a \in G$ v zobrazení $\mathbf{g}$.

Např. když je divadlo vyprodáno a v každé lóži sedí jenom jeden divák, pak v zobrazení inverzním vzhledem k tomu, o němž byla řeč, je přiřazen ke každé vstupence onen divák, který ji má v rukou.

Je zřejmé, že inverzní zobrazení $\mathbf{g}^{-1}$ je prosté, a inverzní zobrazení $(\mathbf{g}^{-1})^{-1}$ je opět zobrazení $\mathbf{g}$, takže $(\mathbf{g}^{-1})^{-1} = \mathbf{g}$.

Ekvivalentní množiny. Když jsou dány neprázdné množiny G, G^*, pak vůbec nemusí existovat zobrazení množiny G *na* G^*, jak je zřejmé např. v případě, že G má jeden a G^* dva prvky; a tudíž neexistuje vždycky ani prosté zobrazení jedné množiny na druhou.

Všimněme si, že když existuje prosté zobrazení $\mathbf{g}$ množiny např. G na druhou množinu, G^*, pak existuje též prosté zobrazení, totiž $\mathbf{g}^{-1}$, v opačném směru, tj. zobrazení množiny G^* na G.

Když existuje prosté zobrazení množiny G na množinu G^*, nazývá se množina G *ekvivalentní s* G^*. Potom je zřejmě též množina G^* ekvivalentní s G. Vzhledem k této symetrii pojmu ekvivalence mluvíme o *ekvivalentních množinách* G, G^*, aniž zpravidla rozlišujeme, která je ekvivalentní s druhou. Ekvivalenci množin vyjadřujeme vzorci: $G^* \simeq G$ nebo $G \simeq G^*$.

Např. každá množina A skládající se z n (>0) prvků a množina $\{1, 2, \ldots, n\}$ jsou ekvivalentní, neboť označíme-li prvky množiny A např. symboly $a_1, a_2, \ldots, a_n$, přičemž libovolně stanovíme, který prvek označíme kterým symbolem, je tím dáno prosté zobrazení množiny A na množinu $\{1, 2, \ldots, n\}$, a to $\begin{pmatrix} a_1 a_2 \ldots a_n \\ 1\ 2\ \ldots n \end{pmatrix}$.

Uspořádaná skupina prvků. Když se množina A skládá z n (>0) prvků a je dáno prosté zobrazení množiny A na množinu $\{1, 2, \ldots, n\}$, pravíme, že množina A je *uspořádaná*, a ono zobrazení nazýváme *uspořádáním* množiny A. Uspořádání množiny A obdržíme např. tím, že její prvky seřadíme v jistém pořadí, tj. jistý prvek $a_1 \in A$ označíme jako první, další jako druhý atd., poslední $a_n \in A$ jako n-tý. Potom pravíme, že A je *uspořádaná skupina prvků* $a_1, \ldots, a_n$. Tento pojem závisí tedy na pořadí, v němž jména jednotlivých prvků vyslovujeme nebo vypisujeme.

Opačně uspořádanou skupinou prvků rozumíme pak uspořádanou skupinu prvků $\{a'_1, \ldots, a'_{n-1}, a'_n\}$, přičemž je $a'_1 = a_n, \ldots, a'_n = a_1$.

6.5. Rozklad množiny příslušný k zobrazení

Nechť nyní $\mathbf{g}$ značí libovolné zobrazení množiny G na G^*. Všimli jsme si již, že libovolný prvek $a^* \in G^*$ může míti v zobrazení $\mathbf{g}$ několik vzorů v G.

Uvažujme o systému $\bar{G}$ všech podmnožin $\bar{a}$ v G, z nichž každá se skládá ze všech vzorů v zobrazení $\mathbf{g}$ vždy téhož prvku $a^* \in G^*$. Jednotlivé prvky systému $\bar{G}$ jsou tedy podmnožiny v G skládající se ze všech prvků, které se v $\mathbf{g}$ zobrazí vždy na týž prvek množiny G^*. Protože množina G^* obsahuje alespoň jeden prvek a^*, není systém $\bar{G}$ prázdný, neboť obsahuje množinu $\bar{a}$ vzorů prvku a^*. Protože $\mathbf{g}$ je zobrazení množiny G *na* G^*, má každý prvek $a^* \in G^*$ alespoň jeden vzor, a tedy množina $\bar{a}$ vzorů libovolného prvku $a^* \in \bar{G}^*$ není prázdná. $\bar{G}$ je tedy neprázdný systém neprázdných podmnožin v G.

Dále je patrné, že systém $\bar{G}$ je disjunktní, tj. každé jeho dva prvky jsou disjunktní, a že pokrývá G, neboť každý prvek $a \in G$ má právě jeden obraz $a^* \in G^*$ a tedy leží právě v jednom prvku $\bar{a} \in \bar{G}$, a to v množině vzorů prvku a^*. Vychází tedy, že *systém $\bar{G}$ všech podmnožin v G, z nichž každá se skládá ze všech vzorů v zobrazení $\mathbf{g}$ vždy téhož prvku v G^*, je rozklad množiny G.* O tomto rozkladu pravíme, že *přísluší* nebo *patří* k zobrazení $\mathbf{g}$.

Např. v hořejším případě zobrazení [2] skládá se rozklad příslušný k tomuto zobrazení z jednotlivých množin žáků patřících vždy do téže třídy.

Všimněme si zejména těchto krajních případů: Když se množina G^* skládá z jediného prvku, pak příslušný rozklad $\bar{G}$ je $\bar{G}_{\max}$; když je $\mathbf{g}$ zobrazení prosté, pak příslušný rozklad je $\bar{G}_{\min}$.

6.6. Zobrazení množin do sebe a na sebe

V hořejších úvahách o zobrazeních nikterak nevylučujeme případ, že množina G^* je identická s množinou G. Když $G^* = G$, pak mluvíme o zobrazení množiny G *do sebe*, popř. *na sebe*.

Přiřadíme-li např. ke každému přirozenému číslu číslo o jednu větší, obdržíme zobrazení množiny všech přirozených čísel do sebe.

Nejjednodušší zobrazení libovolné neprázdné množiny G na sebe obdržíme, když ke každému prvku $a \in G$ přiřadíme opět prvek a; to je tzv. *identické zobrazení* množiny G a označujeme je symbolem $\mathbf{e}$.

Prosté zobrazení množiny G na sebe se nazývá *permutace množiny G*. Permutacemi konečných množin se budeme podrobněji zabývat v kap. **8**.

6.7. Skládání zobrazení

Pojem složeného zobrazení.

Pro naše úvahy je důležitý pojem skládání zobrazení.

Nechť G, H, K značí nějaké neprázdné množiny, nechť $\mathbf{g}$ značí nějaké zobrazení množiny G do H a $\mathbf{h}$ nějaké zobrazení množiny H do K. Pak je ke každému prvku $a \in G$ v zobrazení $\mathbf{g}$ přiřazen jistý prvek $\mathbf{g}a \in H$ a k tomuto prvku $\mathbf{g}a$ je v zobrazení $\mathbf{h}$ přiřazen jistý prvek $\mathbf{h}(\mathbf{g}a) \in K$. Když ke každému prvku $a \in G$ přiřadíme prvek $\mathbf{h}(\mathbf{g}a) \in K$, máme jisté zobrazení množiny G do K. Toto zobrazení nazýváme *složené* ze zobrazení $\mathbf{g}$ a $\mathbf{h}$ (v tomto pořadí) a označujeme je symbolem $\mathbf{hg}$. Je tedy $\mathbf{hg}$ jakožto zobrazení množiny G do K charakterizováno tím, že pro $a \in G$ platí rovnost $(\mathbf{hg})a = \mathbf{h}(\mathbf{g}a)$.

Všimněme si několika zvláštních případů. Když $\mathbf{g}$ zobrazuje množinu G *na* H a $\mathbf{h}$ množinu H *na* K, pak $\mathbf{hg}$ je zřejmě zobrazení množiny G *na* K.

Když $\mathbf{g}$ i $\mathbf{h}$ jsou zobrazení prostá, pak také zobrazení $\mathbf{hg}$ je prosté, neboť pak dva různé prvky v G mají v zobrazení $\mathbf{g}$ dva různé obrazy v H a ty mají v zobrazení $\mathbf{h}$ opět dva různé obrazy v K.

Dále je zřejmé, že je-li množina K identická s G, takže $\mathbf{h}$ je zobrazení množiny H do G, pak je $\mathbf{hg}$ zobrazení množiny G do sebe a zobrazuje-li $\mathbf{g}$ množinu G na H a $\mathbf{h}$ množinu H na G, je $\mathbf{hg}$ zobrazení množiny G na sebe; je-li zejména zobrazení $\mathbf{g}$ prosté a $\mathbf{h}$ inverzní zobrazení $\mathbf{g}^{-1}$, pak je $\mathbf{hg}$ identické zobrazení množiny G.

Dále si všimněme, že jsou-li množiny H, K obě identické s G, takže $\mathbf{g}$ a $\mathbf{h}$ jsou zobrazení množiny G do sebe, pak je též $\mathbf{hg}$ zobrazení množiny G do sebe, a zobrazují-li $\mathbf{g}$, $\mathbf{h}$ množinu G na sebe, pak také $\mathbf{hg}$ zobrazuje množinu G na sebe.

Prosté zobrazení $\mathbf{g}$ množiny G na sebe se nazývá *involutorní*, když složené zobrazení $\mathbf{gg}$ je identické zobrazení množiny G: $\mathbf{gg} = \mathbf{e}$. Zřejmě je inverzní zobrazení $\mathbf{g}^{-1}$ vzhledem k involutornímu zobrazení $\mathbf{g}$ totéž jako $\mathbf{g}$, tedy $\mathbf{g}^{-1} = \mathbf{g}$.

Konečně si všimněme, že pro identické zobrazení $\mathbf{e}$ množiny G a pro libovolné zobrazení $\mathbf{g}$ množiny G do sebe platí tyto rovnosti: $\mathbf{eg} = \mathbf{ge} = \mathbf{g}$.

Jako příklad složeného zobrazení můžeme uvést toto: Když $\mathbf{g}$ značí zobrazení množiny diváků do množiny vstupenek, které jsme popsali v hořejším příkladě [1], a $\mathbf{h}$ značí zobrazení této množiny vstupenek do množiny barev, které je dáno tím, že ke každé vstupence je přiřazena její barva, pak složené zobrazení $\boldsymbol{hg}$ přiřazuje ke každému diváku jistou barvu, a to barvu jeho vstupenky.

Asociativní zákon o skládání zobrazení. Uvažujme nyní o třech zobrazeních $\boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{k}$, kde $\boldsymbol{k}$ značí libovolné zobrazení množiny K do nějaké další množiny L (přičemž opět nevylučujeme případ, že množina L je identická s některou množinou G, H, K). Důležitá vlastnost skládání zobrazení záleží v tom, že platí rovnost

$$\boldsymbol{k}(\boldsymbol{hg}) = (\boldsymbol{kh})\boldsymbol{g}\,,$$

které říkáme *asociativní zákon o skládání zobrazení.*

Tato rovnost vyjadřuje, že každý prvek v G má v zobrazení $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{hg})$ týž obraz v L jako v zobrazení $(\boldsymbol{kh})\boldsymbol{g}$.

Abychom dokázali její platnost, uvažujme o obrazu libovolného prvku $a \in G$ v zobrazení $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{hg})$. Podle definice zobrazení $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{hg})$ je obraz prvku a v tomto zobrazení obrazem prvku $(\boldsymbol{hg})a$ v zobrazení $\boldsymbol{k}$, a tedy jej obdržíme, když k prvku $\boldsymbol{g}a \in H$ přiřadíme obraz $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{g}a) \in K$ a k tomuto určíme obraz v $\boldsymbol{k}$. Avšak obraz prvku $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{g}a)$ v zobrazení $\boldsymbol{k}$ je podle definice zobrazení $\boldsymbol{kh}$ týž jako obraz prvku $\boldsymbol{g}a$ v zobrazení $\boldsymbol{kh}$ a podle definice $(\boldsymbol{kh})\boldsymbol{g}$ je tento obraz současně obrazem prvku a v zobrazení $(\boldsymbol{kh})\boldsymbol{g}$, takže skutečně platí hořejší rovnost.

Zobrazení vyskytující se na obou stranách hořejší rovnosti označujeme stručněji $\boldsymbol{khg}$.

6.8. Věty o ekvivalenci

V tomto odstavci uvedeme tři věty, které nadále budeme nazývat větami o ekvivalenci. Ty mohou být vzhledem k své jednoduchosti považovány nikoli neprávem za popisy příkladů ekvivalentních množin. Jejich význam je v tom, že vystihují množinovou strukturu významných situací, popsaných v tzv. větách o izomorfismu, jimiž se budeme zabývat v teorii grupoidů a grup. card G* ≥ card

1. **První věta o ekvivalenci.** *Když se množina G dá zobrazit na množinu G^*, pak je množina G^* ekvivalentní s jistým rozkladem ležícím na $\bar{G}$, a naopak. Zobrazení rozkladu $\bar{G}$, patřícího k libovolnému zobrazení $\boldsymbol{g}$ množiny G na množinu G^*, v němž je každý prvek $\bar{a} \in \bar{G}$ zobrazen na $\boldsymbol{g}$-obraz bodů ležících v prvku $\bar{a}$, je prosté.*

Vskutku, když se množina G dá zobrazit na množinu G^* nějakou funkcí $\boldsymbol{g}$, pak je množina G^* ekvivalentní s rozkladem $\bar{G}$ patřícím ke $\boldsymbol{g}$. Prosté zobrazení rozkladu $\bar{G}$ na množinu G^* obdržíme, když ke každému prvku $\bar{a} \in \bar{G}$ přiřadíme (společný) $\boldsymbol{g}$-obraz bodů $a \in G$ ležících v $\bar{a}$. Když naopak existuje prosté zobrazení $\boldsymbol{i}$ nějakého rozkladu $\bar{G}$ ležícího na G na množinu G^*, pak především můžeme zobrazit $(\boldsymbol{j})$ množinu G na rozklad $\bar{G}$ tak, že ke každému bodu $a \in G$ přiřadíme onen prvek $\bar{a} \in \bar{G}$, v němž bod a leží. Složené zobrazení $\boldsymbol{ij}$ zobrazuje pak množinu G na množinu G^* a rozklad k němu patřící je $\bar{G}$.

2. Druhá věta. *Každé dva spřažené rozklady $\bar{A}$, $\bar{B}$ v G jsou ekvivalentní, tedy $\bar{A} \simeq \bar{B}$. Zobrazení rozkladu $\bar{A}$ na $\bar{B}$, v němž je ke každému prvku rozkladu $\bar{A}$ přiřazen onen prvek rozkladu $\bar{B}$, který je s ním incidentní, je prosté.*

Důležitý případ této věty **4.1** se týká ekvivalence obalu a průseku podmnožiny $X \subset G$ a rozkladu $\bar{Y}$ v G: *V případě $X \cap \mathsf{s}\bar{Y} \neq \emptyset$ platí ekvivalence $X \sqsubset \bar{Y} \simeq \bar{Y} \sqcap X$, realizovaná incidencí prvků.*

3. Třetí věta. *Libovolný rozklad $\bar{\bar{B}}$ na nějakém rozkladu $\bar{B}$ množiny G a zákryt $\bar{A}$ rozkladu $\bar{B}$ vynucený rozkladem $\bar{\bar{B}}$ jsou ekvivalentní množiny, tedy $\bar{\bar{B}} \simeq \bar{A}$. Zobrazení rozkladu $\bar{\bar{B}}$ na $\bar{A}$, v němž je ke každému prvku $\bar{\bar{b}} \in \bar{\bar{B}}$ přiřazen součet $\bar{a} \in \bar{A}$ všech prvků rozkladu $\bar{B}$ ležících v $\bar{\bar{b}}$, je prosté.*

6.9. Zobrazení posloupností a α-stupňových útvarů

V této kapitole se budeme zabývat některými složitějšími pojmy založenými na pojmu ekvivalence, s nimiž se později častěji setkáme.

1. *Zobrazení posloupností.* Budiž α ($\geqq 1$) přirozené číslo.

Vezměme v úvahu dvě libovolné α-členné posloupnosti:

$$(a) = (a_1, \ldots, a_\alpha), \quad (b) = (b_1, \ldots, b_\alpha).$$

a) *Zobrazením $\mathbf{a}$ posloupnosti (a) na posloupnost (b)* rozumíme ovšem prosté (**6.10.2**) zobrazení množiny členů posloupnosti (a) na množinu členů posloupnosti (b). V libovolném zobrazení $\mathbf{a}$ posloupnosti (a) na posloupnost (b) je tedy ke každému členu a_γ v (a) přiřazen právě jeden člen $b_\delta = \mathbf{a}a_\gamma$ v (b), přičemž k členům s různými indexy jsou přiřazeny v (b) členy rovněž s různými indexy. Každé zobrazení $\mathbf{a}$ posloupnosti (a) na (b) je jednoznačně určeno jistou permutací $\mathbf{p}$ množiny $\{1, \ldots, \alpha\}$ ve smyslu vzorce: $\mathbf{a}a_\gamma = b_{\mathbf{p}\gamma}$ ($\gamma = 1, \ldots, \alpha$). Funkce inverzní k libovolnému zobrazení posloupnosti (a) na (b) představuje ovšem jisté zobrazení posloupnosti (b) na (a).

Je zřejmé, že vždycky existují (v počtu $\alpha!$) zobrazení posloupnosti (a) na posloupnost (b) a též zobrazení v opačném směru. Tuto skutečnost vyjadřujeme tím, že posloupnosti (a) a (b) jsou ekvivalentní. Vidíme, že každé dvě konečné posloupnosti téže délky jsou ekvivalentní.

b) Předpokládejme, že členy $a_1, \ldots, a_\alpha$ posloupnosti (a) a rovněž členy $b_1, \ldots, b_\alpha$ posloupnosti (b) jsou neprázdné množiny.

Pravíme, že *posloupnost (b) je silně ekvivalentní s posloupností (a)*, když nastane tato situace: Existuje zobrazení $\mathbf{a}$ posloupnosti (a) na (b), které se vyznačuje tím, že ke každému členu a_γ v (a) existuje prosté zobrazení $\mathbf{a}_\gamma$ tohoto členu a_γ na člen $b_\delta = \mathbf{a}a_\gamma$ v (b).

Když je posloupnost (b) silně ekvivalentní s (a), má zřejmě posloupnost (a)

tutéž vlastnost vzhledem k (b). V tom případě se zřetelem na tuto symetrii nazýváme posloupnosti $(a), (b)$ silně ekvivalentní.

c) Předpokládejme, že členy $a_1, \ldots, a_\alpha$ posloupnosti (a) a rovněž členy $b_1, \ldots, b_\alpha$ posloupnosti (b) jsou rozklady v množině G.

Pravíme, že *posloupnost* (b) *je polospřažená* neboli *volně spřažená* (*spřažená*) *s posloupností* (a), když nastane tato situace: Existuje zobrazení $\boldsymbol{a}$ posloupnosti (a) na (b), takové, že každý člen a_γ v (a) je polospřažený (spřažený) se svým $\boldsymbol{a}$-obrazem $b_\delta = \boldsymbol{a}a_\gamma$ v posloupnosti (b).

Když je posloupnost (b) polospřažená (spřažená) s (a), pak má zřejmě posloupnost (a) tutéž vlastnost vzhledem k (b). V tom případě se zřetelem na tuto symetrii nazýváme posloupnosti $(a), (b)$ *polospřažené* (*spřažené*).

Předpokládejme, že posloupnost (b) je polospřažená s (a) a budiž $\boldsymbol{a}$ příslušné zobrazení posloupnosti (a) na (b) určující páry polospřažených (spřažených) členů. Vezměme v úvahu libovolný člen a_γ v (a) a jeho $\boldsymbol{a}$-obraz $b_\delta = \boldsymbol{a}a_\gamma$ v (b). Pak jsou obaly $\mathrm{H}a_\gamma = b_\delta \sqsubset a_\gamma$, $\mathrm{H}b_\delta = a_\gamma \sqsubset b_\delta$ neprázdné a spřažené (**4.1**). Podle druhé věty o ekvivalenci (**6.8**) je zobrazení $\boldsymbol{a}_\gamma$ obalu $\mathrm{H}a_\gamma$ na obal $\mathrm{H}b_\delta$, realisované incidencí prvků, prosté. Zejména když je posloupnost (b) s posloupností (a) spřažená, máme $\mathrm{H}a_\gamma = a_\gamma$, $\mathrm{H}b_\delta = b_\delta$. Vidíme, že *dvě spřažené posloupnosti jsou vždy silně ekvivalentní.*

2. *Zobrazení α-stupňových útvarů.* Nechť α $(\geqq 1)$ značí přirozené číslo a $((A) =)(A_1, \ldots, A_\alpha), ((B) =)(B_1, \ldots, B_\alpha)$ libovolné posloupnosti neprázdných množin. Dále budiž $\tilde{\mathrm{A}}$ libovolný α-stupňový útvar vzhledem k posloupnosti (A) a $\tilde{\mathrm{B}}$ rovněž takový útvar vzhledem k posloupnosti (B) (**1.9**).

Připomeňme, že libovolný prvek $\bar{\bar{a}} \in \tilde{\mathrm{A}}$ $(\bar{\bar{b}} \in \tilde{\mathrm{B}})$ představuje α-člennou posloupnost $\bar{\bar{a}} = (\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_\alpha)$ $(\bar{\bar{b}} = (\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_\alpha))$, jejíž každý člen $\bar{a}_\gamma$ $(\bar{b}_\gamma)$ je neprázdnou částí množiny A_γ (B_γ); $(\gamma = 1, \ldots, \alpha)$.

Předpokládejme, že existuje prosté zobrazení $\boldsymbol{f}$ útvaru $\tilde{\mathrm{A}}$ na $\tilde{\mathrm{B}}$.

a) Zobrazení $\boldsymbol{f}$ se nazývá *silná ekvivalence útvaru* $\tilde{\mathrm{A}}$ *na* $\tilde{\mathrm{B}}$, když je takováto situace:

Existuje permutace $\boldsymbol{p}$ množiny $\{1, \ldots, \alpha\}$ s tímto účinkem: Ke každému členu $\bar{a}_\gamma$ libovolného prvku $\bar{\bar{a}} = (\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_\alpha) \in \tilde{\mathrm{A}}$ existuje prosté zobrazení $\boldsymbol{a}_\gamma$ tohoto členu $\bar{a}_\gamma$ na člen $\bar{b}_{\boldsymbol{p}\gamma}$ posloupnosti $\boldsymbol{f}\bar{\bar{a}} = \bar{\bar{b}} = (\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_\alpha) \in \tilde{\mathrm{B}}$; $(\gamma = 1, \ldots, \alpha)$.

Snadno vidíme, že inverzní funkce $\boldsymbol{f}^{-1}$ vzhledem k libovolné silné ekvivalenci $\boldsymbol{f}$ útvaru $\tilde{\mathrm{A}}$ na $\tilde{\mathrm{B}}$ je silná ekvivalence v opačném směru, tj. silná ekvivalence útvaru $\tilde{\mathrm{B}}$ na $\tilde{\mathrm{A}}$.

Když existuje silná ekvivalence útvaru $\tilde{\mathrm{A}}$ na $\tilde{\mathrm{B}}$, pravíme, že útvar $\tilde{\mathrm{B}}$ je *silně ekvivalentní* s $\tilde{\mathrm{A}}$. Zřejmě je pojem silné ekvivalence symetrický vzhledem k oběma útvarům; vzhedem k tomu mluvíme též o *silně ekvivalentních útvarech* $\tilde{\mathrm{A}}, \tilde{\mathrm{B}}$.

b) Nyní předpokládejme, že posloupnosti (A), (B) jsou tvořeny rozklady $\bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_\alpha$ a $\bar{B}_1, \ldots, \bar{B}_\alpha$ v množině G. V tomto případě představuje tedy každý prvek $\bar{\bar{a}} = (\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_\alpha) \in \tilde{\mathrm{A}}$ $(\bar{\bar{b}} = (\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_\alpha) \in \tilde{\mathrm{B}})$ α-člennou posloupnost, jejíž každý člen $\bar{a}_\gamma$ $(\bar{b}_\gamma)$ je rozkladem v G a to částí rozkladu $\bar{A}_\gamma(\bar{B}_\gamma)$; $(\gamma = 1, \ldots, \alpha)$.

Zobrazení $\boldsymbol{f}$ útvaru $\tilde{\mathrm{A}}$ na $\tilde{\mathrm{B}}$ nazýváme *ekvivalence spojená s polospřažením* neboli *ekvivalence spojená s volným spřažením* (*ekvivalence spojená se spřažením*), když je takováto situace:

Existuje permutace $\boldsymbol{p}$ množiny $\{1, \ldots, \alpha\}$ s tímto účinkem: Každý člen $\bar{a}_\gamma$ libovolného prvku $\bar{\bar{a}} = (\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_\alpha) \in \tilde{\mathrm{A}}$ je polospřažený (spřažený) se členem $\bar{b}_{p\gamma}$ prvku $\boldsymbol{f}\bar{\bar{a}} = \bar{\bar{b}} = (\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_\alpha) \in \tilde{\mathrm{B}}$; $(\gamma = 1, \ldots, \alpha)$.

Snadno vidíme, že inverzní funkce $\boldsymbol{f}^{-1}$ vzhledem k libovolné ekvivalenci spojené s polospřažením (ekvivalenci spojené se spřažením) útvaru $\tilde{\mathrm{A}}$ na útvar $\tilde{\mathrm{B}}$ je ekvivalence téhož typu v opačném smyslu tj. útvaru $\tilde{\mathrm{B}}$ na $\tilde{\mathrm{A}}$.

Budiž $\boldsymbol{f}$ ekvivalence spojená s volným spřažením (spřažením) útvaru $\tilde{\mathrm{A}}$ na $\tilde{\mathrm{B}}$. Vezměme v úvahu libovolné členy $\bar{a}_\gamma$, $\bar{b}_\delta (\delta = \boldsymbol{p}\gamma)$, které jsou v hořejším vztahu, takže $\bar{a}_\gamma$ je v $\bar{\bar{a}}$, $\bar{b}_\delta$ je v $\boldsymbol{f}\bar{\bar{a}} = \bar{\bar{b}}$ a rozklady $\bar{a}_\gamma$, $\bar{b}_\delta$ jsou polospřažené (spřažené). Pak jsou obaly $\mathrm{H}\bar{a}_\gamma = \bar{b}_\delta \sqsubset \bar{a}_\gamma$, $\mathrm{H}\bar{b}_\delta = \bar{a}_\gamma \sqsubset \bar{b}_\delta$ neprázdné a spřažené (**4.1**). Podle druhé věty o ekvivalenci (**6.8**) je zobrazení $\boldsymbol{a}_\gamma$ obalu $\mathrm{H}\bar{a}_\gamma$ na obal $\mathrm{H}\bar{b}_\delta$, realizované incidencí prvků, prosté. Zejména když $\boldsymbol{f}$ je ekvivalence spojená se spřažením, máme $\mathrm{H}\bar{a}_\gamma = \bar{a}_\gamma$, $\mathrm{H}\bar{b}_\delta = \bar{b}_\delta$. Vidíme, že *každá ekvivalence útvaru $\tilde{\mathrm{A}}$ na $\tilde{\mathrm{B}}$ spojená se spřažením představuje silnou ekvivalenci.*

Když existuje ekvivalence spojená s polospřažením (ekvivalence spojená se spřažením) útvaru $\tilde{\mathrm{A}}$ na $\tilde{\mathrm{B}}$, pravíme, že útvar $\tilde{\mathrm{B}}$ je *ekvivalentní a polospřažený* nebo *ekvivalentní a volně spřažený* (*ekvivalentní a spřažený*) s útvarem $\tilde{\mathrm{A}}$. Zřejmě jsou tyto pojmy symetrické vzhledem k oběma útvarům; vzhledem k tomu mluvíme též o *ekvivalentních a polospřažených* nebo o *ekvivaletních a volně spřažených* (*ekvivalentních a spřažených*) útvarech $\tilde{\mathrm{A}}$, $\tilde{\mathrm{B}}$. *Zejména jsou každé dva ekvivalentní a spřažené útvary* $\tilde{\mathrm{A}}$, $\tilde{\mathrm{B}}$ *silně ekvivalentní.*

6.10. Cvičení

1. Čtenář nechť si uvědomí příklady jednoduchých reálních funkcí, např. $y = ax + b$, $y = x^2$ aj. a objasní si na nich výše popsané pojmy spojené s pojmem funkce.

2. Když jsou množiny G a G^* konečné a téhož řádu, platí: a) každé zobrazení množiny G na G^* je prosté; b) každé prosté zobrazení množiny G do množiny G^* je zobrazením *na* množinu G^*.

3. Nechť $A \subset G$ a nechť $\boldsymbol{g}[A]$ značí zobrazení množiny G do množiny $\{0, 1\}$, které je definováno takto: Pro $a \in G$ je $\boldsymbol{g}[A]\, a = 1$ nebo 0 pode toho, zda a leží anebo neleží v A. Dokažte, že platí tyto vztahy:

a) $\boldsymbol{g}[A \cap B]\, a = (\boldsymbol{g}[A]\, a) \cdot (\boldsymbol{g}[B]\, a) =$ nejmenšímu z obou čísel $\boldsymbol{g}[A]\, a$, $\boldsymbol{g}[B]\, a$;

b) $\boldsymbol{g}[A \cup B]\, a =$ největšímu z obou čísel $\boldsymbol{g}[A]\, a$, $\boldsymbol{g}[B]\, a$;

c) když $A \cap B = \emptyset$, pak je $\boldsymbol{g}[A \cup B]\, a = \boldsymbol{g}[A]\, a + \boldsymbol{g}[B]\, a$.

4. Nechť $\boldsymbol{f}[a]$ značí zobrazení přímky na sebe, definované tím, že ke každému bodu na přímce o souřadnici x je přiřazen bod na přímce o souřadnici $x' = x + a$, přičemž a značí nějaké reálné číslo. Podobně nechť $\boldsymbol{g}[a]$ značí zobrazení přímky na sebe dané vzorcem $x' = -x + a$.

Vzdálenost libovolných dvou bodů x_1, x_2 na přímce, tj. číslo*) $|x_1 - x_2|$, a vzdálenost jejich obrazů v každém zobrazení $\boldsymbol{f}[a]$ a $\boldsymbol{g}[a]$ jsou stejné. V zobrazení $\boldsymbol{f}[a]$ se nezobrazí žádný bod na přímce na sebe, leč když $a = 0$, a v tomto případě máme identické zobrazení přímky na sebe; v zobrazení $\boldsymbol{g}[a]$ se zobrazí na sebe právě jeden bod. Pro skládání zobrazení $\boldsymbol{f}[a]$, $\boldsymbol{g}[a]$ platí tyto vzorce:

$$\boldsymbol{f}[b]\,\boldsymbol{f}[a] = \boldsymbol{f}[a + b]\,; \quad \boldsymbol{g}[b]\,\boldsymbol{f}[a] = \boldsymbol{g}[-a + b]\,;$$
$$\boldsymbol{f}[b]\,\boldsymbol{g}[a] = \boldsymbol{g}[a + b]\,; \quad \boldsymbol{g}[b]\,\boldsymbol{g}[a] = \boldsymbol{f}[-a + b]\,.$$

Poznámka. Zobrazení $\boldsymbol{f}[a]$ a $\boldsymbol{g}[a]$ se nazývají *euklidovské pohyby na přímce.*

5. Nechť $\boldsymbol{f}[\alpha; a, b]$ značí zobrazení roviny na sebe, definované tím, že ke každému bodu v rovině o souřadnicích x, y je přiřazen bod v rovině o souřadnicích x', y', přičemž

$$x' = x \,.\, \cos\alpha + y \,.\, \sin\alpha + a\,,$$
$$y' = -x \,.\, \sin\alpha + y \,.\, \cos\alpha + b\,,$$

kde α, a, b značí nějaká reálná čísla. Podobně nechť $\boldsymbol{g}[\alpha; a, b]$ značí zobrazení roviny na sebe dané vzorci:

$$x' = x \,.\, \cos\alpha + y \,.\, \sin\alpha + a\,,$$
$$y' = x \,.\, \sin\alpha - y \,.\, \cos\alpha + b\,.$$

Vzdálenost libovolných dvou bodů x_1, y_1; x_2, y_2 v rovině, tj. číslo $|\sqrt{[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]}|$, a vzdálenost jejich obrazů v každém zobrazení $\boldsymbol{f}[\alpha; a, b]$ a $\boldsymbol{g}[\alpha; a, b]$ jsou stejné. V zobrazení $\boldsymbol{f}[\alpha; a, b]$, když α je celý násobek čísla 2π, se na sebe nezobrazí žádný bod v rovině, leč když $a = b = 0$, a v tomto případě máme identické zobrazení roviny na sebe. Když α není celý násobek čísla 2π, pak se na sebe zobrazí právě jeden bod v rovině. V zobrazení $\boldsymbol{g}[\alpha; a, b]$ se nezobrazí na sebe žádný bod v rovině, vyjma případ, že mezi čísly α, a, b je vztah

$$a \,.\, \cos\tfrac{1}{2}\alpha + b \,.\, \sin\tfrac{1}{2}\alpha = 0\,.$$

V tomto případě tvoří všechny body v rovině, které se zobrazí na sebe, jistou přímku. Pro skládání zobrazení $\boldsymbol{f}[\alpha; a, b]$, $\boldsymbol{g}[\alpha; a, b]$ platí tyto vzorce:

$$\boldsymbol{f}[\beta; c, d]\,\boldsymbol{f}[\alpha; a, b] = \boldsymbol{f}[\alpha + \beta; a \,.\, \cos\beta + b \,.\, \sin\beta + c, \; -a \,.\, \sin\beta + b \,.\, \cos\beta + d]\,,$$
$$\boldsymbol{g}[\beta; c, d]\,\boldsymbol{f}[\alpha; a, b] = \boldsymbol{g}[\alpha + \beta; a \,.\, \cos\beta + b \,.\, \sin\beta + c, \; a \,.\, \sin\beta - b \,.\, \cos\beta + d]\,,$$
$$\boldsymbol{f}[\beta; c, d]\,\boldsymbol{g}[\alpha; a, b] = \boldsymbol{g}[\alpha - \beta; a \,.\, \cos\beta + b \,.\, \sin\beta + c, \; -a \,.\, \sin\beta + b \,.\, \cos\beta + d]\,,$$
$$\boldsymbol{g}[\beta; c, d]\,\boldsymbol{g}[\alpha; a, b] = \boldsymbol{f}[\alpha - \beta; a \,.\, \cos\beta + b \,.\, \sin\beta + c, \; a \,.\, \sin\beta - b \,.\, \cos\beta + d]\,.$$

Poznámka. Zobrazení $\boldsymbol{f}[\alpha; a, b]$ a $\boldsymbol{g}[\alpha; a, b]$ se nazývají *euklidovské pohyby v rovině.*

6. Každá α-členná (nekonečná) posloupnost na množině A je souhrn obrazů čísel množiny $\{1, \ldots, \alpha\}$ ($\{1, 2, \ldots\}$) na množinu A ve vhodném zobrazení (**1.7**).

7. O ekvivalenci neprázdných množin A, B, C platí tyto výroky: a) $A \simeq A$ (reflexivnost); b) ze vztahu $A \simeq B$ plyne $B \simeq A$ (symetrie); c) ze vztahů $A \simeq B$, $B \simeq C$ plyne $A \simeq C$ (tranzitivnost) (**6.4**).

8. Buďte $\boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}$ zobrazení množiny G do sebe a $\overline{G}_{\boldsymbol{g}}$, $\overline{G}_{\boldsymbol{h}}$, $\overline{G}_{\boldsymbol{hg}}$ rozklady na G příslušné k zobrazením $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{hg}$. Ukažte, že platí tyto vztahy:

a) $\boldsymbol{hg}G \subset \boldsymbol{h}G$, $\overline{G}_{\boldsymbol{hg}} \geqq \overline{G}_{\boldsymbol{g}}$,

b) z rovnosti $\boldsymbol{hg}G = \boldsymbol{h}G$ plyne $\boldsymbol{g}G \sqsubset \overline{G}_{\boldsymbol{h}} \doteq \overline{G}_{\boldsymbol{h}}$ a naopak,

c) z rovnosti $\overline{G}_{\boldsymbol{hg}} = \overline{G}_{\boldsymbol{g}}$ plyne $\boldsymbol{g}G \sqcap \overline{G}_{\boldsymbol{h}} = (\overline{\boldsymbol{g}G})_{\min}$ a naopak. ($(\overline{\boldsymbol{g}G})_{\min}$ značí nejmenší rozklad množiny $\boldsymbol{g}G$).

9. Každé dva adjungované řetězce rozkladů v G mají spřažené zjemnění. (K důkazu použijte konstrukce popsané v **4.2.**)

---

*) Je-li x libovolné reálné číslo, pak $|x|$ značí tzv. *absolutní hodnotu* čísla x, tj. nezáporné z obou čísel: x, $-x$.