14. Vytvořující rozklady

14.1. Základní pojmy

Nechť $\mathfrak{G}$ je libovolný grupoid.

Definice. Libovolný rozklad $\bar{A}$ v $\mathfrak{G}$ se nazývá *vytvořující*, když má tuto vlastnost: Ke každé dvoučlenné posloupnosti prvků $\bar{a}, \bar{b} \in \bar{A}$ existuje prvek $\bar{c} \in \bar{A}$ takový, že $\bar{a}\bar{b} \subset \bar{c}$.

Pokud jde o vytvořující rozklady *na grupoidu* $\mathfrak{G}$, všimněme si, že největší rozklad $\bar{G}_{\max}$ a nejmenší rozklad $\bar{G}_{\min}$ jsou vytvořující. Na každém grupoidu existují tedy alespoň oba krajní vytvořující rozklady.

V teorii grupoidů se ekvivalence patřící vytvořujícím rozkladům (9.3) zpravidla nazývají prostě *kongruence*.

14.2. Deformační rozklad

Nechť $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$ značí libovolné grupoidy.

Předpokládejme, že existuje deformace $\boldsymbol{d}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^*$. Deformace $\boldsymbol{d}$, jakožto zobrazení množiny G na G^*, určuje rozklad $\bar{D}$ grupoidu $\mathfrak{G}$, patřící k deformaci $\boldsymbol{d}$, jehož každý prvek $\bar{a}$ se skládá ze všech vzorů v $\boldsymbol{d}$ vždy téhož prvku $a^* \in \mathfrak{G}^*$. Tento rozklad nazýváme *deformační rozklad vzhledem k* $\boldsymbol{d}$, nebo: *rozklad patřící k deformaci* $\boldsymbol{d}$. Protože $\boldsymbol{d}$ zachovává násobení v obou grupoidech, dá se očekávat, že rozklad $\bar{D}$ je k násobení v $\mathfrak{G}$ v nějakém vztahu. Uvažujme o libovolných dvou prvcích $\bar{a}, \bar{b} \in \bar{D}$. Podle definice rozkladu $\bar{D}$ existují prvky $a^*, b^* \in \mathfrak{G}^*$ takové, že $\bar{a}$ $(\bar{b})$ je množina všech vzorů v $\boldsymbol{d}$ prvku a^* (b^*). Všimněme si součinu $\bar{a}\bar{b}$ množiny $\bar{a}$ s množinou $\bar{b}$. Každý prvek $c \in \bar{a}\bar{b}$ je součin některého prvku $a \in \bar{a}$ s některým prvkem $b \in \bar{b}$ a z rovnosti $\boldsymbol{d}c = \boldsymbol{d}ab = \boldsymbol{d}a \,.\, \boldsymbol{d}b = a^*b^*$ vychází, že je vzorem v $\boldsymbol{d}$ prvku a^*b^*. Tedy prvek c je obsažen v onom prvku $\bar{c} \in \bar{D}$, který se skládá ze vzorů prvku a^*b^*. Tím jsme zjistili, že platí vztah $\bar{a}\bar{b} \subset \bar{c}$, a vidíme, že rozklad $\bar{D}$ je vytvořující. Došli jsme k výsledku, že *rozklad grupoidu* $\mathfrak{G}$, *patřící k libovolné deformaci grupoidu* $\mathfrak{G}$ *na jiný grupoid, je vytvořující.*

14.3. Vytvořující rozklady v grupoidech

Budeme se nyní zabývat vlastnostmi vytvořujících rozkladů v grupoidech.

1. *Součet prvků vytvořujícího rozkladu.* Nechť $\bar{A}$ je libovolný vytvořující rozklad v grupoidu $\mathfrak{G}$.

Podmnožina $\mathbf{s}\bar{A} \subset \mathfrak{G}$, tj. tedy podmnožina v $\mathfrak{G}$, skládající se ze všech prvků v $\mathfrak{G}$, které jsou v některém prvku rozkladu $\bar{A}$, *je grupoidní*. Vskutku, k libovolným prvkům $a, b \in \mathbf{s}\bar{A}$ existují prvky $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \bar{A}$ takové, že $a \in \bar{a}$, $b \in \bar{b}$; $\bar{a}\bar{b} \subset \bar{c}$, a odtud vychází, že $ab \in \bar{a}\bar{b} \subset \bar{c} \subset \mathbf{s}\bar{A}$, takže ab je prvkem v $\mathbf{s}\bar{A}$. Příslušný podgrupoid v $\mathfrak{G}$ označujeme symbolem $\mathbf{s}\mathfrak{A}$. Je zřejmé, že $\bar{A}$ je vytvořující rozklad *na* podgrupoidu $\mathbf{s}\mathfrak{A}$.

2. *Obaly a průseky.* Nechť B značí grupoidní podmnožinu a $\bar{A}$, $\bar{C}$ vytvořující rozklady v $\mathfrak{G}$.

Když $B \cap \mathbf{s}\bar{C} \neq \emptyset$, jsou obal $B \sqsubset \bar{C}$ a průsek $B \sqcap \bar{C}$ vytvořující rozklady v $\mathfrak{G}$. Obecněji platí, že *v případě $\mathbf{s}\bar{A} \cap \mathbf{s}\bar{C} \neq \emptyset$ jsou obal $\bar{A} \sqsubset \bar{C}$ a průsek $\bar{A} \sqcap \bar{C}$ vytvořující rozklady v $\mathfrak{G}$.*

Důkaz. Rozklad $\bar{B}_{\max}$ skládající se z jediného prvku B představuje zřejmě vytvořující rozklad v $\mathfrak{G}$. Když platí $B \cap \mathbf{s}\bar{C} \neq \emptyset$, platí též $\mathbf{s}\bar{B}_{\max} \cap \mathbf{s}\bar{C} \neq \emptyset$ a dále: $B \sqsubset \bar{C} = \bar{B}_{\max} \sqsubset \bar{C}$, $B \sqcap \bar{C} = \bar{B}_{\max} \sqcap \bar{C}$. Z této úvahy soudíme, že druhá část hořejšího tvrzení je skutečně zobecněním části první. Jde tedy pouze o důkaz druhé části naší věty.

a) Vzhledem k tomu, že platí $\bar{A} \sqsubset \bar{C} = \mathbf{s}\bar{A} \sqsubset \bar{C}$, stačí ukázat, že rozklad $\mathbf{s}\bar{A} \sqsubset \bar{C}$ je vytvořující. Vezměme v úvahu libovolné prvky $\bar{c}_1, \bar{c}_2 \in \mathbf{s}\bar{A} \sqsubset \bar{C}$. Protože rozklad $\bar{C}$ je vytvořující, existuje prvek $\bar{c} \in \bar{C}$ takový, že $\bar{c}_1\bar{c}_2 \subset \bar{c}$. Zvolme libovolné body $x \in \mathbf{s}\bar{A} \cap \bar{c}_1$, $y \in \mathbf{s}\bar{A} \cap \bar{c}_2$. Pak máme $xy \in \mathbf{s}\bar{A} \,.\, \mathbf{s}\bar{A} \cap \bar{c}_1\bar{c}_2 \subset \mathbf{s}\bar{A} \cap \bar{c}$, a odtud následuje $\mathbf{s}\bar{A} \cap \bar{c} \neq \emptyset$. Vychází tedy $\bar{c} \in \mathbf{s}\bar{A} \sqsubset \bar{C}$.

b) Buďte $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{A} \sqcap \bar{C}$ libovolné prvky. Podle definice průseku $\bar{A} \sqcap \bar{C}$ existují prvky $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \in \bar{A}$; $\bar{c}_1, \bar{c}_2 \in \bar{C}$ takové, že $\bar{x} = \bar{a}_1 \cap \bar{c}_1$ $\bar{y} = \bar{a}_2 \cap \bar{c}_2$. Protože rozklad $\bar{A}$ ($\bar{C}$) je vytvořující, existuje prvek $\bar{a} \in \bar{A}$ ($\bar{c} \in \bar{C}$) takový, že $\bar{a}_1\bar{a}_2 \subset \bar{a}$ ($\bar{c}_1\bar{c}_2 \subset \bar{c}$). Máme tedy $\bar{x}\bar{y} \subset \bar{a}_1\bar{a}_2 \cap \bar{c}_1\bar{c}_2 \subset \bar{a} \cap \bar{c} \in \bar{A} \sqcap \bar{C}$. Tím je důkaz ukončen.

K větě, kterou jsme právě dokázali, připojíme ještě tyto poznámky:

Když rozklad $\bar{C}$ leží na grupoidu $\mathfrak{G}$, hořejší předpoklad $B \cap \mathbf{s}\bar{C} \neq \emptyset$ je splněn, neboť pak platí $\mathbf{s}\bar{C} = G \supset B$ a máme $B \cap \mathbf{s}\bar{C} = B \neq \emptyset$; rozklad $B \sqcap \bar{C}$ pak leží na množině B. Každá dvojice skládající se z nějakého vytvořujícího rozkladu $\bar{C}$ na $\mathfrak{G}$ a z nějaké grupoidní podmnožiny B v $\mathfrak{G}$ určuje tedy jednoznačně dva vytvořující rozklady v $\mathfrak{G}$: $B \sqsubset \bar{C}$, $\bar{C} \sqcap B$; první je podmnožinou v $\bar{C}$, druhý rozkladem na B.

Podobně určuje každá dvojice vytvořujících rozkladů $\bar{A}$, $\bar{C}$ v grupoidu $\mathfrak{G}$, z nichž např. rozklad $\bar{C}$ leží na $\mathfrak{G}$, dva vytvořující rozklady v $\mathfrak{G}$: $\bar{A} \sqsubset \bar{C}$, $\bar{A} \sqcap \bar{C}$, první je částí rozkladu $\bar{C}$, druhý rozkladem na množině $\mathbf{s}\bar{A}$.

Konečně podotkněme, že když oba rozklady $\bar{A}$, $\bar{C}$ leží na $\mathfrak{G}$, platí $\bar{A} \sqcap \bar{C} = (\bar{A}, \bar{C})$ (**3.5**). Vidíme, že *největší společné zjemnění dvou vytvořujících rozkladů ležících na grupoidu $\mathfrak{G}$ představuje opět rozklad vytvořující* (srov. **14.4.3**).

3. *Vynucené zákryty.* Nechť opět $\bar{A}$, $\bar{C}$ značí vytvořující rozklady v grupoidu $\mathfrak{G}$. Předpokládáme, že platí rovnosti: $\bar{A} = \bar{C} \sqsubset \bar{A}$, $\bar{C} = \bar{A} \sqsubset \bar{C}$. Budiž $\bar{B}$ libovolný společný zákryt rozkladů $\bar{A} \sqcap \mathbf{s}\bar{C}$, $\bar{C} \sqcap \mathbf{s}\bar{A}$; tyto rozklady zřejmě leží na množině $\mathbf{s}\bar{A} \cap \cap\, \mathbf{s}\bar{C}$. Vezměme dále v úvahu zákryty $\mathring{A}$, $\mathring{C}$ rozkladů $\bar{A}$, $\bar{C}$ vynucené rozkladem $\bar{B}$ (**4.1**). Zákryty $\mathring{A}$, $\mathring{C}$ jsou tedy spřažené a rozklad $\bar{B}$ představuje jejich průsek: $\mathring{A} \sqcap \sqcap\, \mathring{C} = \bar{B}$.

Ukážeme, že *když je rozklad $\bar{B}$ vytvořující, pak totéž platí o rozkladech $\mathring{A}$, $\mathring{C}$.*

Důkaz. Předpokládejme, že rozklad $\bar{B}$ je vytvořující a ukažme, že např. rozklad $\mathring{A}$ má tutéž vlastnost. Aby se zjednodušilo označení, položme $A = \mathbf{s}\bar{A}$, $C = \mathbf{s}\bar{C}$.

Budiž $\bigcup_1 \bar{a}_1$, $\bigcup_2 \bar{a}_2 \in \mathring{A}$, takže $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ jsou prvky v $\bar{A}$ a $\bigcup_1(\bar{a}_1 \cap C)$, $\bigcup_2(a_2 \cap C)$ prvky v $\bar{B}$. Protože rozklad $\bar{A}$ je vytvořující, existuje ke každému součinu $\bar{a}_1\bar{a}_2$ prvek $\bar{a}_{12} \in \bar{A}$ takový, že platí $\bar{a}_1\bar{a}_2 \subset \bar{a}_{12}$, a tedy též $(\bar{a}_1 \cap C)(\bar{a}_2 \cap C) \subset \bar{a}_{12} \cap C$. Protože i rozklad $\bar{B}$ je vytvořující, existuje prvek $\bigcup_3(\bar{a}_3 \cap C) \in \bar{B}$, takový, že platí $\bigcup_1(\bar{a}_1 \cap C) \,.\, \bigcup_2(\bar{a}_2 \cap C) = \bigcup_1\bigcup_2(\bar{a}_1 \cap C)(\bar{a}_2 \cap C) \subset \bigcup_3(\bar{a}_3 \cap C)$; přitom $\bar{a}_3$ značí prvky v $\bar{A}$ vyznačující se tím, že $\bigcup_3\bar{a}_3 \in \mathring{A}$. Pro každý prvek $\bar{a}_1$ $(\bar{a}_2)$, na nějž se vztahuje znaménko $\bigcup_1$ $(\bigcup_2)$, máme tedy vztahy: $(\bar{a}_1 \cap C)(\bar{a}_2 \cap C) \subset (\bar{a}_{12} \cap C) \subset \bigcup_3(\bar{a}_3 \cap C)$. Avšak průniky $\bar{a}_{12} \cap C$, $\bar{a}_3 \cap C$ jsou prvky rozkladu $\bar{A} \sqcap C$ ležícího na množině $A \cap C$. Z toho soudíme, že mezi prvky $\bar{a}_3$, na něž se vztahuje znaménko $\bigcup_3$, existuje prvek $\bar{a}_3$ takový, že $\bar{a}_{12} \cap C = \bar{a}_3 \cap C$, takže $\bar{a}_{12} = \bar{a}_3$. Tím jsme došli ke vztahům $\bigcup_1\bar{a}_1 \,.\, \bigcup_2\bar{a}_2 \subset \bigcup_1\bigcup_2\bar{a}_{12} \subset \bigcup_3\bar{a}_3 \in \mathring{A}$ a důkaz je tím ukončen.

14.4. Vytvořující rozklady na grupoidech

Nyní se budeme zabývat vytvořujícími rozklady *na* grupoidech. Výsledky, k nimž dospějeme, se uplatňují ovšem též v případě vytvořujících rozkladů v grupoidech, neboť každý vytvořující rozklad $\bar{A}$ v grupoidu $\mathfrak{G}$ je současně vytvořujícím rozkladem na podgrupoidu $\mathbf{s}\mathfrak{A}$.

1. *Lokální vlastnosti zákrytů a zjemnění.* Nechť $\bar{A} \geqq \bar{B}$ jsou libovolné vytvořující rozklady na grupoidu $\mathfrak{G}$.

Vezměme v úvahu libovolné prvky $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2 \in \bar{A}$. Protože rozklad $\bar{A}$ je vytvořující, existuje prvek $\bar{a}_3 \in \bar{A}$ takový, že $\bar{a}_1\bar{a}_2 \subset \bar{a}_3$. Dále vezměme do úvahy rozklady v G: $\bar{a}_1 \sqcap \bar{B}$, $\bar{a}_2 \sqcap \bar{B}$, $\bar{a}_3 \sqcap \bar{B}$. Vzhledem ke vztahu $\bar{A} \geqq \bar{B}$ představují tyto rozklady neprázdné části rozkladu $\bar{B}$. Protože rozklad $\bar{B}$ je vytvořující, existuje ke každým dvěma prvkům $\bar{x} \in \bar{a}_1 \sqcap \bar{B}$, $\bar{y} \in \bar{a}_2 \sqcap \bar{B}$ prvek $\bar{z} \in \bar{B}$, který se vyznačuje tím, že $\bar{x}\bar{y} \subset \bar{z}$.

Ukážeme, že *$\bar{z}$ je prvkem rozkladu $\bar{a}_3 \sqcap \bar{B}$*, tedy $\bar{z} \in \bar{a}_3 \sqcap \bar{B}$.

Vskutku, ze vztahů $\bar{x} \subset \bar{a}_1$, $\bar{y} \subset \bar{a}_2$, $\bar{a}_1\bar{a}_2 \subset \bar{a}_3$ plyne $\bar{x}\bar{y} \subset \bar{a}_3$. Máme tedy $\bar{x}\bar{y} \subset \bar{z} \cap \bar{a}_3$; odtud vzhledem ke vztahu $\bar{B} \leqq \bar{A}$ vychází $\bar{z} \subset \bar{a}_3$ (**3.2**) a tedy též $\bar{z} \in \bar{a}_3 \sqcap \bar{B}$.

Zejména vidíme, že když prvek $\bar{a}_1$ představuje grupoidní podmnožinu v $\mathfrak{G}$, je rozklad $\bar{a}_1 \sqcap \bar{B}$ vytvořující (**14.3.2**).

2. *Nejmenší společný zákryt.* Nechť $\bar{A}$, $\bar{B}$ jsou libovolné vytvořující rozklady na $\mathfrak{S}$.

Ukážeme, že *jejich nejmenší společný zákryt* $[\bar{A}, \bar{B}]$ *je opět vytvořující.*

Za tím účelem uvažujme o libovolné uspořádané dvojici prvků $\bar{u}, \bar{v} \in [\bar{A}, \bar{B}]$. Máme ukázat, že existuje prvek $\bar{w} \in [\bar{A}, \bar{B}]$ takový, že $\bar{u}\bar{v} \subset \bar{w}$.

Budiž $\bar{a} \in \bar{A}$ libovolný prvek ležící v $\bar{u}$ a $\bar{b} \in \bar{A}$ libovolný prvek ležící ve $\bar{v}$, takže $\bar{a} \subset \bar{u}$, $\bar{b} \subset \bar{v}$. Protože rozklad $\bar{A}$ je vytvořující, existuje prvek $\bar{c} \in \bar{A}$ takový, že $\bar{a}\bar{b} \subset \bar{c}$. Prvek $\bar{c}$ leží v jistém prvku $\bar{w} \in [\bar{A}, \bar{B}]$, takže $\bar{c} \subset \bar{w}$.

Každý prvek $p \in \bar{u}$ leží v jistém prvku $\bar{p} \in \bar{A}$, který je částí prvku $\bar{u}$; podobně leží každý prvek $q \in \bar{v}$ v jistém prvku $\bar{q} \in \bar{A}$, který je částí prvku $\bar{v}$. Mimo to je množina $\bar{p}\bar{q}$ částí jistého prvku $\bar{r} \in \bar{A}$, takže $pq \in \bar{p}\bar{q} \subset \bar{r}$. Z toho vidíme, že k důkazu platnosti vztahu $\bar{u}\bar{v} \subset \bar{w}$ stačí zjistit, že pro každé dva prvky $\bar{p}, \bar{q} \in \bar{A}$, $\bar{p} \subset \bar{u}$, $\bar{q} \subset \bar{v}$ je prvek $\bar{r} \in \bar{A}$ obsahující množinu $\bar{p}\bar{q}$ částí prvku $\bar{w}$, tj. $\bar{r} \subset \bar{w}$.

Nuže, buďtež $\bar{p}, \bar{q} \in \bar{A}$, $\bar{p} \subset \bar{u}$, $\bar{q} \subset \bar{v}$ libovolné prvky.

Se zřetelem na definici rozkladu $[\bar{A}, \bar{B}]$ a k tomu, že prvek $\bar{a}$ leží v $\bar{u}$ a prvek $\bar{b}$ ve $\bar{v}$, soudíme, že existuje vazba $\{\bar{A}, \bar{B}\}$ od $\bar{a}$ do $\bar{p}$,

$$\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_\alpha \quad (\text{kde } \bar{a}_1 = \bar{a},\ \bar{a}_\alpha = \bar{p}), \tag{1}$$

a podobně vazba $\{\bar{A}, \bar{B}\}$ od $\bar{b}$ do $\bar{q}$,

$$\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_\beta \quad (\text{kde } \bar{b}_1 = \bar{b},\ \bar{b}_\beta = \bar{q}). \tag{2}$$

Můžeme předpokládat, že $\beta = \alpha$, neboť např. v případě $\beta < \alpha$ stačí prvek $\bar{b}_\beta$, označit dalšími symboly: $\bar{b}_{\beta+1}, \ldots, \bar{b}_\alpha$.

Protože rozklad $\bar{A}$ je vytvořující, existují v $\bar{A}$ prvky

$$\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_\alpha \quad (\text{kde } \bar{c}_1 = \bar{c},\ \bar{c}_\alpha = \bar{r}) \tag{3}$$

takové, že $\bar{a}_1\bar{b}_1 \subset \bar{c}_1, \ldots, \bar{a}_\alpha\bar{b}_\alpha \subset \bar{c}_\alpha$. Se zřetelem na definici rozkladu $[\bar{A}, \bar{B}]$ a k tomu že prvek $\bar{c}$ leží ve $\bar{w}$, soudíme, že k důkazu platnosti vztahu $\bar{r} \subset \bar{w}$ stačí zjistit, že posloupnost (3) je vazbou $\{\bar{A}, \bar{B}\}$ od $\bar{c}$ do $\bar{r}$.

Protože (1) a (2) jsou vazby $\{\bar{A}, \bar{B}\}$, existuje ke každým dvěma sousedním prvkům $\bar{a}_\nu$, $\bar{a}_{\nu+1}$ jistý prvek $\bar{x}_\nu \in \bar{B}$, který je s oběma incidentní, a podobně ke každým dvěma sousedním prvkům $\bar{b}_\nu$, $\bar{b}_{\nu+1}$ s nimi incidentní prvek $\bar{y}_\nu \in \bar{B}$ $(\nu = 1, \ldots, \alpha - 1)$ Rozklad $\bar{B}$ je vytvořující a tudíž existuje jistý prvek $\bar{z}_\nu \in \bar{B}$, pro nějž platí $\bar{x}_\nu\bar{y}_\nu \subset \bar{z}_\nu$. Protože prvek $\bar{x}_\nu$ je incidentní s $\bar{a}_\nu$ a prvek $\bar{y}_\nu$ s $\bar{b}_\nu$, je množina $\bar{x}_\nu\bar{y}_\nu$ incidentní s $\bar{a}_\nu\bar{b}_\nu$; z toho plyne, že prvek $\bar{z}_\nu$ je incidentní s $\bar{a}_\nu\bar{b}_\nu$ a tedy i s prvkem $\bar{c}_\nu$. Podobně vidíme že prvek $\bar{z}_\nu$ je incidentní s $\bar{c}_{\nu+1}$. Tím je zjištěno, že každé dva sousední prvky $\bar{c}_\nu$, $\bar{c}_{\nu+1}$ jsou incidentní s jistým prvkem $\bar{z}_\nu \in \bar{B}$, a vychází, že posloupnost (3) je vazbou $\{\bar{A}, \bar{B}\}$ od $\bar{c}$ do $\bar{r}$.

3. *Největší společné zjemnění.* Nechť opět $\bar{A}$, $\bar{B}$ jsou libovolné vytvořující rozklady na $\mathfrak{S}$.

Platí věta, že *také největší společné zjemnění* $(\bar{A}, \bar{B})$ *obou rozkladů* $\bar{A}, \bar{B}$ *je vytvořující.*

Tuto větu jsme již dokázali (**14.3.**2) na základě rovnosti $(\bar{A}, \bar{B}) = \bar{A} \sqcap \bar{B}$ tím, že jsme zjistili, že průsek $\bar{A} \sqcap \bar{B}$ vytvořujících rozkladů $\bar{A}, \bar{B}$ je rovněž vytvořující.

14.5. Cvičení

1. Když některý prvek $\bar{a} \in \bar{A}$ vytvořujícího rozkladu $\bar{A}$ v grupoidu $\mathfrak{G}$ obsahuje grupoidní podmnožinu $X \subset \mathfrak{G}$, takže $X \subset \bar{a}$, je tento prvek $\bar{a}$ sám grupoidní.

2. Nechť $\mathfrak{G}$ značí grupoid, jehož pole se skládá ze všech přirozených čísel a jehož násobení je definováno takto: Pro $a, b \in \mathfrak{G}$ je součin ab číslo dané v desítkové soustavě číslicí $a_1 \ldots a_\alpha b_1 \ldots \ldots b_\beta$, přičemž $a_1 \ldots a_\alpha$ $(b_1 \ldots b_\beta)$ je číslice v desítkové soustavě čísla a (b). Tedy např. $14 . 23 = = 1423$. Ukažte, že: a) grupoid $\mathfrak{G}$ je asociativní; b) rozklad grupoidu $\mathfrak{G}$, jehož prvky jsou množiny všech čísel v $\mathfrak{G}$, která jsou v desítkové soustavě dána číslicemi vždy o stejném počtu cifer, je vytvořující.

3. Grupoid $\mathfrak{G}$, jehož polem je libovolná množina a násobení je dáno tím, že pro $a, b \in \mathfrak{G}$ je $ab = a$ $(ab = b)$, je asociativní a všechny jeho rozklady jsou vytvořující.