Základy teorie grupoidů a grup

15. Faktoroidy

In: Otakar Borůvka (author): Základy teorie grupoidů a grup. (Czech). Praha: Nakladatelství Československé akademie věd, 1962. pp. 110--118.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401442

15. Faktoroidy

Pojem faktoroidu, jímž se nyní budeme zabývat, má v celé další teorii vynikající úlohu.

15.1. Základní pojmy

Nechť i nadále $\bar{A}$ značí libovolný vytvořující rozklad v grupoidu $\mathfrak{G}$. K rozkladu $\bar{A}$ můžeme jednoznačně přiřadit grupoid, který označíme $\bar{\mathfrak{A}}$, definovaný takto: Pole grupoidu $\bar{\mathfrak{A}}$ je vytvořující rozklad $\bar{A}$ a násobení je dáno pravidlem, že součin libovolného prvku $\bar{a} \in \bar{A}$ s libovolným prvkem $\bar{b} \in \bar{A}$ je onen prvek $\bar{c} \in \bar{A}$, pro nějž platí $\bar{a}\bar{b} \subset \bar{c}$. Píšeme pak zpravidla

$$\bar{a} \circ \bar{b} = \bar{c},$$

takže znaménka $\circ$ používáme k označení součinů v grupoidu $\bar{\mathfrak{A}}$ podobně jako používáme znaménka . k označení součinů v grupoidu $\mathfrak{G}$, a máme $\bar{a}\bar{b} \subset \bar{a} \circ \bar{b} \in \bar{\mathfrak{A}}$.

Grupoid $\bar{\mathfrak{A}}$ nazýváme *faktoroid v grupoidu* $\mathfrak{G}$ a je-li $\bar{A}$ *na* grupoidu $\mathfrak{G}$, říkáme mu *faktoroid na grupoidu* $\mathfrak{G}$ nebo *faktoroid grupoidu* $\mathfrak{G}$. Každý vytvořující rozklad v grupoidu $\mathfrak{G}$ určuje tedy jednoznačně jistý faktoroid v $\mathfrak{G}$, a to onen, jehož polem je; pravíme, že ke každému vytvořujícímu rozkladu v $\mathfrak{G}$ *přísluší* neboli *patří* jistý faktoroid v $\mathfrak{G}$.

Všimněme si, že na grupoidu $\mathfrak{G}$ existují alespoň dva faktoroidy, a to tzv. *největší faktoroid* $\bar{\mathfrak{G}}_{\max}$, který přísluší k největšímu vytvořujícímu rozkladu $\bar{G}_{\max}$, a *nejmenší faktoroid* $\bar{\mathfrak{G}}_{\min}$, příslušný k nejmenšímu vytvořujícímu rozkladu $\bar{G}_{\min}$ grupoidu $\mathfrak{G}$.

Tyto krajní faktoroidy na $\mathfrak{G}$ jsou vzájemně různé nebo splývají podle toho, zda grupoid $\mathfrak{G}$ obsahuje víc než jeden nebo právě jeden prvek.

15.2. Příklad faktoroidu

Uvažujme např. o grupoidu $\mathfrak{Z}$. Nechť n značí libovolné přirozené číslo a nechť $\bar{a}_i$, kde i je libovolné číslo $0, \ldots, n-1$, značí množinu všech prvků v $\mathfrak{Z}$, které při dělení číslem n dají zbytek i. Množiny $\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_{n-1}$ jsou tedy tyto:

$a = m.m_1 + i$; $b = m.m_2 + j$; $a + b = (m + m$

$$
\begin{array}{llllll}
\bar{a}_0 &= \{\ldots, -2n, & -n, & 0, & n, & 2n, \quad \ldots\} \\
\bar{a}_1 &= \{\ldots, -2n+1, & -n+1, & 1, & n+1, & 2n+1, \quad \ldots\} \\
\bar{a}_2 &= \{\ldots, -2n+2, & -n+2, & 2, & n+2, & 2n+2, \quad \ldots\} \\
\multicolumn{6}{l}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
\bar{a}_{n-1} &= \{\ldots, -2n+\overline{n-1}, & -n+\overline{n-1}, & n-1, & n+\overline{n-1}, & 2n+\overline{n-1}, \ldots\}
\end{array}
$$

Vidíme, že systém $\{\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_{n-1}\}$ je rozklad grupoidu $\mathfrak{Z}$; označíme jej $\bar{Z}_n$. Snadno ukážeme, že $\bar{Z}_n$ je vytvořující rozklad grupoidu $\mathfrak{Z}$. Za tím účelem zjistíme, že součin libovolného prvku $\bar{a}_i \in \bar{Z}_n$ s libovolným prvkem $\bar{a}_j \in \bar{Z}_n$ je částí některého dalšího prvku $\bar{a}_k \in \bar{Z}_n$. Podle své definice se množina $\bar{a}_i\bar{a}_j$ skládá ze součinů $a \,.\, b$ každého prvku $a \in \bar{a}_i$ s každým prvkem $b \in \bar{a}_j$. Nechť tedy a (b) značí libovolný prvek v $\bar{a}_i$ $(\bar{a}_j)$, takže zbytek dělení čísla a (b) číslem n je i (j). Podle definice násobení grupoidu $\mathfrak{Z}$ je $a \,.\, b$ číslo $a + b$ a toto je v množině $\bar{a}_k$, kde k značí zbytek dělení čísla $i + j$ číslem n, neboť čísla $a + b$ a $i + j$ mají při dělení číslem n stejné zbytky. Vychází tedy $\bar{a}_i\bar{a}_j \subset \bar{a}_k$ a tím je dokázáno, že rozklad $\bar{Z}_n$ je vytvořující. Příslušný faktoroid $\bar{\mathfrak{Z}}_n$ se tedy skládá z n prvků: $\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_{n-1}$ a jeho násobení je definováno pravidlem, že součin $\bar{a}_i \,.\, \bar{a}_j$ je prvek $\bar{a}_k$, přičemž k je zbytek dělení čísla $i + j$ číslem n. Je zřejmé, že $\bar{\mathfrak{Z}}_1$ je největší faktoroid na $\mathfrak{Z}$.

15.3. Faktoroidy v grupoidech

Především vezmeme v úvahu faktoroidy v grupoidech. Připomeňme, že na grupoidy přenášíme pojmy a symboly, které jsme definovali pro jejich pole a násobení. Tento rozšiřovací postup přenášíme i na faktoroidy. Kvůli přehlednosti jsou níže uvedeny nejdůležitější pojmy a symboly i výsledky získané tímto postupem.

1. *Zákryty a zjemnění.* Nechť $\bar{\mathfrak{A}}$, $\bar{\mathfrak{B}}$ jsou faktoroidy v grupoidu $\mathfrak{G}$.

Faktoroid $\bar{\mathfrak{A}}$ $(\bar{\mathfrak{B}})$ se nazývá *zákryt (zjemnění) faktoroidu* $\bar{\mathfrak{B}}$ $(\bar{\mathfrak{A}})$, když pro pole $\bar{A}$, $\bar{B}$ faktoroidů $\bar{\mathfrak{A}}$, $\bar{\mathfrak{B}}$ platí vztah $\bar{A} \geqq \bar{B}$. V tom případě píšeme $\bar{\mathfrak{A}} \geqq \bar{\mathfrak{B}}$ nebo $\bar{\mathfrak{B}} \leqq \bar{\mathfrak{A}}$. Zřejmý je obsah pojmů *normálního* a *ryzího zákrytu (zjemnění) faktoroidu* $\bar{\mathfrak{B}}$ $(\bar{\mathfrak{A}})$ (**2.4**). Z relace $\bar{\mathfrak{A}} \geqq \bar{\mathfrak{B}}$ plyne $\mathbf{s}\bar{\mathfrak{A}} \supset \mathbf{s}\bar{\mathfrak{B}}$ a v případě ryzího zákrytu (zjemnění) $\mathbf{s}\bar{\mathfrak{A}} = \mathbf{s}\bar{\mathfrak{B}}$. Když platí $\bar{\mathfrak{A}} \geqq \bar{\mathfrak{B}}$ a současně je $\bar{\mathfrak{A}} \neq \bar{\mathfrak{B}}$, pravíme, že $\bar{\mathfrak{A}}$ $(\bar{\mathfrak{B}})$ je *vlastní zákryt (vlastní zjemnění)* faktoroidu $\bar{\mathfrak{B}}$ $(\bar{\mathfrak{A}})$; v tom případě někdy píšeme $\bar{\mathfrak{A}} > \bar{\mathfrak{B}}$ nebo $\bar{\mathfrak{B}} < \bar{\mathfrak{A}}$.

2. *Obaly a průseky.* Budiž $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{G}$ libovolný podgrupoid a $\bar{\mathfrak{A}}$, $\bar{\mathfrak{C}}$ nějaké faktoroidy v grupoidu $\mathfrak{G}$.

Když je $B \cap \mathbf{s}\bar{C} \neq \emptyset$, jsou (**14.3.2**) obal $B \sqsubset \bar{C}$ a průsek $B \sqcap \bar{C}$ vytvořující rozklady v grupoidu $\mathfrak{G}$. Příslušné faktoroidy v $\mathfrak{G}$ nazýváme *obal podgrupoidu* $\mathfrak{B}$ *ve faktoroidu* $\bar{\mathfrak{C}}$ a *průsek podgrupoidu* $\mathfrak{B}$ *(faktoroidu* $\bar{\mathfrak{C}}$*) s faktoroidem* $\bar{\mathfrak{C}}$ *(s podgrupoidem* $\mathfrak{B}$*)*; označení pro obal: $\mathfrak{B} \sqsubset \bar{\mathfrak{C}}$ nebo $\bar{\mathfrak{C}} \sqsupset \mathfrak{B}$, pro průsek: $\mathfrak{B} \sqcap \bar{\mathfrak{C}}$ nebo $\bar{\mathfrak{C}} \sqcap \mathfrak{B}$.

Rovněž je zřejmý obsah pojmů, které definujeme v případě $\mathbf{s}\bar{A} \cap \mathbf{s}\bar{C} \neq \emptyset$.

a označujeme $\bar{\mathfrak{A}} \sqsubset \bar{\mathfrak{C}}$ nebo $\bar{\mathfrak{C}} \sqsupset \bar{\mathfrak{A}}$ a $\bar{\mathfrak{A}} \sqcap \bar{\mathfrak{C}}$; první faktoroid se nazývá *obal faktoroidu $\bar{\mathfrak{A}}$ ve faktoroidu $\bar{\mathfrak{C}}$*, druhý *průsek faktoroidu $\bar{\mathfrak{A}}$ s faktoroidem $\bar{\mathfrak{C}}$*. Zřejmě platí: $\bar{\mathfrak{A}} \sqcap \bar{\mathfrak{C}} = \bar{\mathfrak{C}} \sqcap \bar{\mathfrak{A}}$.

Všimněme si, že faktoroid $\mathfrak{B} \sqsubset \bar{\mathfrak{C}}$ je podgrupoidem ve faktoroidu $\bar{\mathfrak{C}}$ a $\mathfrak{B} \sqcap \bar{\mathfrak{C}}$ faktoroidem v podgrupoidu $\mathfrak{B}$.

Když zejména $\bar{\mathfrak{C}}$ leží na grupoidu $\mathfrak{G}$, je hořejší předpoklad $B \cap \mathbf{s}\bar{C} \neq \emptyset$ splněn a průsek $\mathfrak{B} \sqcap \bar{\mathfrak{C}}$ představuje faktoroid na podgrupoidu $\mathfrak{B}$. Každá dvojice skládající se z nějakého faktoroidu $\bar{\mathfrak{C}}$ na $\mathfrak{G}$ a z nějakého podgrupoidu $\mathfrak{B}$ v $\mathfrak{G}$ určuje tedy jednoznačně další dvojici, která se skládá z podgrupoidu $\mathfrak{B} \sqsubset \bar{\mathfrak{C}}$ v $\bar{\mathfrak{C}}$ a z faktoroidu $\mathfrak{B} \sqcap \bar{\mathfrak{C}}$ na $\mathfrak{B}$.

Podobně určuje dvojice skládající se z libovolného faktoroidu $\bar{\mathfrak{A}}$ v grupoidu $\mathfrak{G}$ a z nějakého faktoroidu $\bar{\mathfrak{C}}$ na grupoidu $\mathfrak{G}$ další dvojici faktoroidů $\bar{\mathfrak{A}} \sqsubset \bar{\mathfrak{C}}$ a $\bar{\mathfrak{A}} \sqcap \bar{\mathfrak{C}}$, z nichž první je podgrupoidem v $\bar{\mathfrak{C}}$ a druhý faktoroidem na $\mathbf{s}\bar{\mathfrak{A}}$.

Konečně poznamenejme, že *když faktoroidy $\bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{C}}$ grupoid $\mathfrak{G}$ pokrývají, splývá jejich průsek s tzv. největším společným zjemněním $(\bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{C}})$ faktoroidů $\bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{C}}$, takže $\bar{\mathfrak{A}} \sqcap \bar{\mathfrak{C}} = (\bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{C}})$* (**15.4.5**).

Příklad. Abychom hořejší pojmy objasnili na příkladě, uvažujme opět o faktoroidu $\bar{\mathfrak{Z}}_n$ na grupoidu $\mathfrak{Z}$ $(n \geqq 1)$. Nechť $\mathfrak{A}_m$ značí podgrupoid v $\mathfrak{Z}$, jehož pole se skládá ze všech celých násobků nějakého přirozeného čísla m, a abychom svůj příklad zjednodušili, předpokládejme, že největší společný dělitel čísel m, n je 1, tj. že čísla m, n jsou nesoudělná.

Z kterých prvků se skládají faktoroidy $\mathfrak{A}_m \sqsubset \bar{\mathfrak{Z}}_n$, $\bar{\mathfrak{Z}}_n \sqcap \mathfrak{A}_m$?

Uvažme, které z prvků $\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_{n-1} \in \bar{\mathfrak{Z}}_n$ jsou incidentní s podgrupoidem $\mathfrak{A}_m$ Libovolný prvek $\bar{a}_i \in \bar{\mathfrak{Z}}_n$ je incidentní s $\mathfrak{A}_m$, když a jen když v něm existuje nějaký celý násobek xm čísla m (x celé číslo). Protože každý prvek v $\bar{a}_i$ má tvar $yn + i$, kde také y značí celé číslo, vidíme, že prvek $\bar{a}_i$ je incidentní s $\mathfrak{A}_m$, když a jen když rovnice $xm = yn + i$ a tedy také rovnice $xm - yn = i$ má řešení v celých číslech x, y. Protože největší společný dělitel čísel m, n je 1, existují celá čísla a, b vyhovující rovnici $am - bn = 1$. Odtud plyne, že pro každé číslo $i = 0, \ldots, n - 1$ má rovnice $xm - yn = i$ řešení v celých číslech, a to $x = ai$, $y = bi$, a tím je ukázáno, že každý prvek $\bar{a}_i \in \bar{\mathfrak{Z}}_n$ je incidentní s $\mathfrak{A}_m$. Vychází tedy, že faktoroid $\mathfrak{A}_m \sqsubset \bar{\mathfrak{Z}}_n$ je identický se $\bar{\mathfrak{Z}}_n$ a prvky faktoroidu $\bar{\mathfrak{Z}}_n \sqcap \mathfrak{A}_m$ jsou množiny skládající se ze všech celých násobků čísla m obsažených v jednotlivých prvcích $\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_{n-1}$ faktoroidu $\bar{\mathfrak{Z}}_n$.

3. *Polospřažené neboli volně spřažené a spřažené faktoroidy.* Buďte $\bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{C}}$ faktoroidy v grupoidu $\mathfrak{G}$.

Pravíme, že faktoroidy $\bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{C}}$ jsou *polospřažené* neboli *volně spřažené* (*spřažené*), když tuto vlastnost mají jejich pole $\bar{A}, \bar{C}$ (**4.1**).

Např. obal $\mathfrak{X} \sqsubset \bar{\mathfrak{Y}}$ libovolného podgrupoidu $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{G}$ ve faktoroidu $\bar{\mathfrak{Y}}$ v grupoidu $\mathfrak{G}$ a průsek $\bar{\mathfrak{Y}} \sqcap \mathfrak{X}$ $(X \cap \mathbf{s}\bar{Y} \neq \emptyset)$ představují spřažené faktoroidy.

V dalším výkladu předpokládáme, že platí rovnosti: $\bar{\mathfrak{A}} = \bar{\mathfrak{C}} \sqsubset \bar{\mathfrak{A}}$, $\bar{\mathfrak{C}} = \bar{\mathfrak{A}} \sqsubset \bar{\mathfrak{C}}$.

V této situaci leží v grupoidu $\mathfrak{G}$ podgrupoid $\mathbf{s}\bar{\mathfrak{A}} \cap \mathbf{s}\bar{\mathfrak{C}}$ a na něm faktoroidy

$\overline{\mathfrak{A}} \sqcap s\overline{\mathfrak{C}}$, $\overline{\mathfrak{C}} \sqcap s\overline{\mathfrak{A}}$. Z věty v odst. **14.3.3** soudíme, že *každý společný zákryt* $\overline{\mathfrak{B}}$ *těchto faktoroidů vynucuje spřažené zákryty* $\mathring{\mathfrak{A}} \geqq \overline{\mathfrak{A}}$, $\mathring{\mathfrak{C}} \geqq \overline{\mathfrak{C}}$ *faktoroidů* $\overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{C}}$, *přičemž se tyto zákryty sečou ve faktoroidu* $\overline{\mathfrak{B}}$: $\mathring{\mathfrak{A}} \sqcap \mathring{\mathfrak{C}} = \overline{\mathfrak{B}}$.

4. *Adjungované faktoroidy.* Nechť jsou $\overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{C}}$ faktoroidy a $\mathfrak{B}, \mathfrak{D}$ podgrupoidy v grupoidu $\mathfrak{G}$. Dále označme $\mathfrak{A} = s\overline{\mathfrak{A}}$, $\mathfrak{C} = s\overline{\mathfrak{C}}$; symboly B, D značí pole podgrupoidů $\mathfrak{B}, \mathfrak{D}$.

Předpokládáme platnost vztahů: $\mathfrak{B} \in \overline{\mathfrak{A}}$, $\mathfrak{D} \in \overline{\mathfrak{C}}$; $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{D} \neq \emptyset$; přitom první vzorce vyjadřují vztahy $B \in \overline{\mathfrak{A}}$, $D \in \overline{\mathfrak{C}}$.

Pravíme, že faktoroidy $\overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{C}}$ jsou *adjungované vzhledem k podgrupoidům* $\mathfrak{B}, \mathfrak{D}$, když tuto vlastnost mají rozklady $\bar{A}$, $\bar{C}$ vzhledem k podmnožinám B, D (**4.2**). Tuto situaci můžeme též vyjádřit vzorcem:

$$s(\mathfrak{D} \sqsubset \overline{\mathfrak{A}} \sqcap \mathfrak{C}) = s(\mathfrak{B} \sqsubset \overline{\mathfrak{C}} \sqcap \mathfrak{A}).$$

Předpokládejme, že faktoroidy $\overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{C}}$ jsou vzhledem k podgrupoidům $\mathfrak{B}, \mathfrak{D}$ adjungované. Pak

$$\overline{\mathfrak{A}}_1 = \mathfrak{C} \sqsubset \overline{\mathfrak{A}}, \quad \overline{\mathfrak{A}}_2 = \mathfrak{D} \sqsubset \overline{\mathfrak{A}},$$
$$\overline{\mathfrak{C}}_1 = \mathfrak{A} \sqsubset \overline{\mathfrak{C}}, \quad \overline{\mathfrak{C}}_2 = \mathfrak{B} \sqsubset \overline{\mathfrak{C}}$$

jsou faktoroidy v $\mathfrak{G}$. Označme $\mathfrak{A}_1 = s\overline{\mathfrak{A}}_1$, $\mathfrak{A}_2 = s\overline{\mathfrak{A}}_2$; $\mathfrak{C}_1 = s\overline{\mathfrak{C}}_1$, $\mathfrak{C}_2 = s\overline{\mathfrak{C}}_2$. Z výsledku v **4.2** plyne s přihlédnutím k **14.4.2**; **14.3.3** tato věta:

Faktoroidy $\overline{\mathfrak{A}}_1, \overline{\mathfrak{C}}_1$ *mají spřažené zákryty* $\mathring{\mathfrak{A}}, \mathring{\mathfrak{C}}$ *vyznačující se tím, že* $\mathfrak{A}_2 \in \mathring{\mathfrak{A}}$, $\mathfrak{C}_2 \in \mathring{\mathfrak{C}}$; tyto zákryty jsou dány konstrukcí popsanou v **4.2**a). *Podgrupoidy* $\mathfrak{A}_2, \mathfrak{C}_2$ *jsou incidentní.*

5. *Řetězce faktoroidů.* Nechť jsou $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ podgrupoidy v grupoidu $\mathfrak{G}$.

Řetězcem faktoroidů od $\mathfrak{A}$ *do* $\mathfrak{B}$, stručněji *řetězcem od* $\mathfrak{A}$ *do* $\mathfrak{B}$ rozumíme konečnou posloupnost složenou z α ($\geqq 1$) faktoroidů $\overline{\mathfrak{K}}_1, \ldots, \overline{\mathfrak{K}}_\alpha$ v $\mathfrak{G}$, která se vyznačuje těmito vlastnostmi: a) Faktoroid $\overline{\mathfrak{K}}_1$ leží na $\mathfrak{A}$; b) pro $1 \leqq \gamma \leqq \alpha - 1$ faktoroid $\overline{\mathfrak{K}}_{\gamma+1}$ leží na některém prvku v $\overline{\mathfrak{K}}_\gamma$; c) $\mathfrak{B} \in \overline{\mathfrak{K}}_\alpha$. Takový řetězec označujeme

$$\overline{\mathfrak{K}}_1 \to \ldots \to \overline{\mathfrak{K}}_\alpha,$$

stručněji: $[\overline{\mathfrak{K}}]$.

Pojmy, které jsme v odst. **2.5** a **4.2** definovali pro řetězce rozkladů, dají se bezprostředně přenést na řetězce faktoroidů. Zejména je pojem adjungovaných řetězů faktoroidů definován takto:

Nechť $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$, $\mathfrak{C} \supset \mathfrak{D}$ jsou podgrupoidy v $\mathfrak{G}$ a

$$([\overline{\mathfrak{K}}] =) \quad \overline{\mathfrak{K}}_1 \to \ldots \to \overline{\mathfrak{K}}_\alpha,$$
$$([\overline{\mathfrak{L}}] =) \quad \overline{\mathfrak{L}}_1 \to \ldots \to \overline{\mathfrak{L}}_\beta$$

řetězce faktoroidů od $\mathfrak{A}$ do $\mathfrak{B}$ a od $\mathfrak{C}$ do $\mathfrak{D}$.

Řetězce $[\overline{\mathfrak{K}}]$, $[\overline{\mathfrak{L}}]$ se nazývají *adjungované,* když a) jejich konce splývají, tedy $\mathfrak{A} = \mathfrak{C}$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{D}$; b) každé dva členy $\overline{\mathfrak{K}}_\gamma$, $\overline{\mathfrak{L}}_\delta$ jsou adjungované vzhledem k $s\overline{\mathfrak{K}}_{\gamma+1}$, $s\overline{\mathfrak{L}}_{\delta+1}$ pro $\gamma = 1, \ldots, \alpha$; $\delta = 1, \ldots, \beta$; přitom značí $s\overline{\mathfrak{K}}_{\alpha+1} = \mathfrak{B}$, $s\overline{\mathfrak{L}}_{\beta+1} = \mathfrak{D}$.

15.4. Faktoroidy na grupoidech

Budeme se nyní zabývat faktoroidy na grupoidech. Příslušné výsledky se často uplatňují i v případech, že jde o faktoroidy v grupoidech, neboť každý faktoroid $\overline{\mathfrak{A}}$ v grupoidu $\mathfrak{G}$ leží současně na podgrupoidu $s\overline{\mathfrak{A}}$.

1. *Zákryty a zjemnění.* Navazujeme na pojmy zákrytu a zjemnění faktoroidu ležícího v grupoidu $\mathfrak{G}$, popsané v odst. **15.3.1.** Nyní se zajímáme o případ, že jde o faktoroidy *na* grupoidu $\mathfrak{G}$.

Nuže, nechť $\overline{\mathfrak{A}}$, $\overline{\mathfrak{B}}$ jsou faktoroidy na grupoidu $\mathfrak{G}$.

Víme, že se faktoroid $\overline{\mathfrak{A}}$ ($\overline{\mathfrak{B}}$) nazývá zákryt (zjemnění) faktoroidu $\overline{\mathfrak{B}}$ ($\overline{\mathfrak{A}}$) a že tuto situaci zapisujeme symbolem $\overline{\mathfrak{A}} \geqq \overline{\mathfrak{B}}$ nebo $\overline{\mathfrak{B}} \leqq \overline{\mathfrak{A}}$, když pole $\bar{A}$, $\bar{B}$ těchto faktoroidů souvisí vztahem $\bar{A} \geqq \bar{B}$.

Např. $\overline{\mathfrak{G}}_{\max}$ ($\overline{\mathfrak{B}}$) představuje největší (nejmenší) zákryt faktoroidu $\overline{\mathfrak{B}}$ v tom smyslu, že každý zákryt faktoroidu $\overline{\mathfrak{B}}$ je zjemněním faktoroidu $\overline{\mathfrak{G}}_{\max}$ a zákrytem faktoroidu $\overline{\mathfrak{B}}$; obdobně platí, že faktoroid $\overline{\mathfrak{A}}$ ($\overline{\mathfrak{G}}_{\min}$) představuje největší (nejmenší) zjemnění faktoroidu $\overline{\mathfrak{A}}$.

Když je $\overline{\mathfrak{A}} \geqq \overline{\mathfrak{B}}$, je rozklad $\bar{A}$ zákrytem rozkladu $\bar{B}$, takže tento zákryt je vynucen jistým rozkladem $\bar{\bar{B}}$ ležícím na rozkladu $\bar{B}$ a ovšem též na faktoroidu $\overline{\mathfrak{B}}$ (**2.4**). Připomeňme, že každý prvek $\bar{\bar{b}} \in \bar{\bar{B}}$ představuje systém podmnožin v $\mathfrak{G}$, které jsou prvky faktoroidu $\overline{\mathfrak{B}}$, a že rozklad $\bar{A}$ obdržíme, když sjednotíme vždycky všechny prvky faktoroidu $\overline{\mathfrak{B}}$, které leží v jednotlivých prvcích $\bar{\bar{b}}$.

Naopak je každým rozkladem $\bar{\bar{B}}$ na faktoroidu $\overline{\mathfrak{B}}$ vynucen jistý zákryt rozkladu $\bar{B}$, který však není nutně vytvořující. Vidíme, že zákryt vynucený rozkladem $\bar{\bar{B}}$ není vždycky polem faktoroidu.

Ukážeme, že platí tato věta:

Budiž $\overline{\mathfrak{B}}$ faktoroid na grupoidu $\mathfrak{G}$, $\bar{\bar{B}}$ nějaký jeho rozklad a $\bar{A}$ zákryt pole $\bar{B}$ faktoroidu $\overline{\mathfrak{B}}$ vynucený rozkladem $\bar{\bar{B}}$. Rozklad $\bar{A}$ je vytvořující tehdy a jenom tehdy, když je vytvořující rozklad $\bar{\bar{B}}$.

Důkaz. a) Předpokládáme, že rozklad $\bar{\bar{B}}$ je vytvořující. Vezměme v úvahu libovolné prvky $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \in \bar{A}$. Máme ukázat, že existuje prvek $\bar{a}_3 \in \bar{A}$ takový, že platí $\bar{a}_1\bar{a}_2 \subset \bar{a}_3$. Nuže, vzhledem k definici rozkladu $\bar{A}$ platí vzorce $\bar{a}_1 = \bigcup_1 \bar{b}_1$, $\bar{a}_2 = \bigcup_2 \bar{b}_2$, přičemž se symbol $\bigcup_1$ ($\bigcup_2$) vztahuje na všechny prvky faktoroidu $\overline{\mathfrak{B}}$ obsažené v jistém prvku $\bar{\bar{b}}_1$ ($\bar{\bar{b}}_2$) rozkladu $\bar{\bar{B}}$. Protože rozklad $\bar{\bar{B}}$ je vytvořující, existuje prvek $\bar{\bar{b}}_3 \in \bar{\bar{B}}$ takový, že $\bar{\bar{b}}_1 \circ \bar{\bar{b}}_2 \subset \bar{\bar{b}}_3$. Budiž $\bar{a}_3$ součet všech prvků faktoroidu $\overline{\mathfrak{B}}$ obsažených v prvku $\bar{\bar{b}}_3$, takže $\bar{a}_3 \in \bar{A}$. Zřejmě máme pro každý prvek $\bar{b}_1$ ($\bar{b}_2$), na nějž se vztahuje symbol $\bigcup_1$ ($\bigcup_2$), $\bar{b}_1 \circ \bar{b}_2 \in \bar{\bar{b}}_1 \circ \bar{\bar{b}}_2 \subset \bar{\bar{b}}_3$. Odtud plynou vztahy: $\bar{a}_1\bar{a}_2 = \bigcup_1\bigcup_2\bar{b}_1\bar{b}_2 \subset \subset \bigcup_1\bigcup_2\bar{b}_1 \circ \bar{b}_2 \subset \bar{a}_3$, a jimi je dovozena správnost první části naší věty.

b) Předpokládejme, že rozklad $\bar{A}$ je vytvořující. Vezměme v úvahu libovolné prvky $\bar{\bar{b}}_1, \bar{\bar{b}}_2 \in \bar{\bar{B}}$ a ponechejme symbolům $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{b}_1, \bar{b}_2$ hořejší význam. Protože rozklad $\bar{A}$ je vytvořující, existuje prvek $\bar{a}_3 \in \bar{A}$ takový, že $\bar{a}_1\bar{a}_2 \subset \bar{a}_3$. Podle definice rozkladu $\bar{A}$ existují prvky $\bar{b}_3 \in \overline{\mathfrak{B}}$ takové, že $\bar{a}_3 = \bigcup \bar{b}_3$ a že množina těchto prvků představuje jistý prvek $\bar{\bar{b}}_3 \in \bar{\bar{B}}$. Pro libovolné prvky $\bar{b}_1 \in \bar{\bar{b}}_1$, $\bar{b}_2 \in \bar{\bar{b}}_2$ máme vztah

$\bar{b}_1\bar{b}_2 \subset \bar{a}_3$ a vidíme, že existuje prvek $\bar{b}_3 \in \bar{\bar{b}}_3$ takový, že $\bar{b}_1\bar{b}_2 \subset \bar{b}_3$. Odtud plyne $\bar{b}_1 \circ \bar{b}_2 = \bar{b}_3 \in \bar{\bar{b}}_3$ a vychází $\bar{\bar{b}}_1 \circ \bar{\bar{b}}_2 \subset \bar{\bar{b}}_3$, čímž je důkaz ukončen.

Vidíme tedy, že *oba rozklady* $\bar{A}, \bar{\bar{B}}$ *jsou vytvořující současně*, tj. když jeden z nich je vytvořující, pak je také druhý. Když jsou vytvořující, pak k rozkladu $\bar{A}$ přísluší jistý faktoroid $\bar{\mathfrak{A}}$ na grupoidu $\mathfrak{G}$ a platí $\bar{\mathfrak{A}} \geqq \bar{\mathfrak{B}}$; podobně k rozkladu $\bar{\bar{B}}$ přísluší jistý faktoroid $\bar{\bar{\mathfrak{B}}}$ na faktoroidu $\bar{\mathfrak{B}}$. Faktoroid $\bar{\mathfrak{A}}$ se nazývá *zákryt faktoroidu* $\bar{\mathfrak{B}}$ *vynucený faktoroidem* $\bar{\bar{\mathfrak{B}}}$. Každý faktoroid na libovolném faktoroidu $\bar{\mathfrak{B}}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ vynucuje tedy jistý zákryt faktoroidu $\bar{\mathfrak{B}}$ a naopak, každý zákryt faktoroidu $\bar{\mathfrak{B}}$ je vynucen jistým faktoroidem na $\bar{\mathfrak{B}}$.

Příklad. Abychom tyto pojmy objasnili na příkladě, uvažujme opět o faktoroidu $\bar{\mathfrak{Z}}_n$ na grupoidu $\mathfrak{Z}$ (**15.2**). Předpokládejme, že číslo n je větší než 1 a že není prvočíslo. Pak existuje nějaký dělitel $(1 <)\ d\ (< n)$ čísla n a máme $n = qd$, kde q značí další přirozené číslo, a to $1 < q < n$. Uvažujme nyní o rozkladu $\bar{\bar{Z}}_d$ faktoroidu $\bar{\mathfrak{Z}}_n$, jehož prvky jsou tyto:

$$\begin{aligned}
\bar{\bar{a}}_0 &= \{\bar{a}_0, \quad \bar{a}_d, \quad \bar{a}_{2d}, \quad \ldots, \bar{a}_{(q-1)d}\}, \\
\bar{\bar{a}}_1 &= \{\bar{a}_1, \quad \bar{a}_{d+1}, \quad a_{2d+1}, \quad \ldots, \bar{a}_{(q-1)d+1}\}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\bar{\bar{a}}_{d-1} &= \{\bar{a}_{d-1}, \bar{a}_{d+d-1}, \bar{a}_{2d+d-1}, \ldots, \bar{a}_{(q-1)d+d-1}\},
\end{aligned}$$

takže libovolný prvek $\bar{\bar{a}}_i\ (i = 0, \ldots, d - 1)$ rozkladu $\bar{\bar{Z}}_d$ se skládá z těch prvků faktoroidu $\bar{\mathfrak{Z}}_n$, jejichž indexy dají dělením číslem d zbytek i. Ukažme, že rozklad $\bar{\bar{Z}}_d$ je vytvořující. Za tím účelem uvažujme o libovolných prvcích $\bar{\bar{a}}_i, \bar{\bar{a}}_j$ rozkladu $\bar{\bar{Z}}_d$ a ukažme, že platí vztah $\bar{\bar{a}}_i \,.\, \bar{\bar{a}}_j \subset \bar{\bar{a}}_k$, kde k je zbytek dělení čísla $i + j$ číslem d. Nechť $\bar{a}_\alpha$ značí libovolný prvek v $\bar{\bar{a}}_i$, $\bar{a}_\beta$ libovolný prvek v $\bar{\bar{a}}_j$, takže α dá dělením číslem d zbytek i a β zbytek j; čísla $\alpha + \beta$, $i + j$ liší se tedy jenom o celý násobek čísla d. Podle definice násobení faktoroidu $\bar{\mathfrak{Z}}_n$ je $\bar{a}_\alpha \circ \bar{a}_\beta = \bar{a}_\gamma$, kde γ je zbytek dělení čísla $\alpha + \beta$ číslem n. Protože d je dělitelem čísla n, liší se čísla $\alpha + \beta$, γ, a tedy i čísla $i + j$, γ jenom o celý násobek čísla d; číslo γ má tedy při dělení číslem d zbytek k. Odtud vychází $\bar{a}_\alpha \circ \bar{a}_\beta = \bar{a}_\gamma \in \bar{\bar{a}}_k$ a tím je zjištěn zmíněný vztah $\bar{\bar{a}}_i \,.\, \bar{\bar{a}}_j \subset \bar{\bar{a}}_k$. Zákryt faktoroidu $\bar{\mathfrak{Z}}_n$ vynucený faktoroidem $\bar{\bar{\mathfrak{Z}}}_d$ příslušným k vytvořujícímu rozkladu $\bar{\bar{Z}}_d$, skládá se z d prvků

$$\{\ldots, -n + i, -n + d + i, \ldots, -n + (q - 1)\, d + i,\ i,\ d + i, \ldots,\\ (q - 1)\, d + i,\ n + i,\ n + d + i, \ldots, n + (q - 1)\, d + i, \ldots\},$$

přičemž i značí vždy jedno číslo $0, \ldots, d - 1$.

2. *Lokální vlastnosti zákrytů a zjemnění.* Nechť $\bar{\mathfrak{A}} \geqq \bar{\mathfrak{B}}$ jsou libovolné faktoroidy na grupoidu $\mathfrak{G}$.

Vezměme v úvahu libovolné prvky $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \in \bar{\mathfrak{A}}$; $\bar{b}_1, \bar{b}_2 \in \bar{\mathfrak{B}}$ ve vztazích $\bar{a}_1 \supset \bar{b}_1$, $\bar{a}_2 \supset \bar{b}_2$ a dále rozklady v $\mathfrak{G}$: $\bar{a}_1 \sqcap \bar{\mathfrak{B}}$, $\bar{a}_2 \sqcap \bar{\mathfrak{B}}$. Vzhledem k relaci $\bar{\mathfrak{A}} \geqq \bar{\mathfrak{B}}$ představují uvedené rozklady komplexy v $\bar{\mathfrak{B}}$.

Ukážeme, že *platí tyto vzorce*:

(1) $$\bar{a}_1 \circ \bar{a}_2 \supset \bar{b}_1 \circ \bar{b}_2 \, ,$$

(2) $$(\bar{a}_1 \sqcap \overline{\mathfrak{B}}) \circ (\bar{a}_2 \sqcap \overline{\mathfrak{B}}) \subset (\bar{a}_1 \circ \bar{a}_2 \sqcap \overline{\mathfrak{B}}) \, .$$

Důkaz. a) Ze vztahů $\bar{b}_1\bar{b}_2 \subset \bar{b}_1 \circ \bar{b}_2 \cap \bar{a}_1\bar{a}_2 \subset \bar{b}_1 \circ \bar{b}_2 \cap \bar{a}_1 \circ \bar{a}_2$ soudíme, že prvky $\bar{b}_1 \circ \bar{b}_2 \in \overline{\mathfrak{B}}$, $\bar{a}_1 \circ \bar{a}_2 \in \overline{\mathfrak{A}}$ jsou incidentní. Z toho plyne, vzhledem k relaci $\overline{\mathfrak{A}} \geqq \overline{\mathfrak{B}}$ (**3.2**), vzorec (1).

b) Součin $\bar{x} \circ \bar{y}$ s libovolnými faktory $\bar{x} \in \bar{a}_1 \sqcap \overline{\mathfrak{B}}$, $\bar{y} \in \bar{a}_2 \sqcap \overline{\mathfrak{B}}$ je prvek $\bar{z} \in \overline{\mathfrak{B}}$, pro nějž platí $\bar{x}\bar{y} \subset \bar{z}$, a tento prvek je obsažen v rozkladu $\bar{a}_1 \circ \bar{a}_2 \sqcap \overline{\mathfrak{B}}$ (**14.4.1**).

Zejména vidíme, že když je některý prvek $\bar{a} \in \overline{\mathfrak{A}}$ grupoidní podmnožinou v $\mathfrak{G}$, takže $\bar{a} \circ \bar{a} = \bar{a}$, vychází ze vzorce (2) (pro $\bar{a}_1 = \bar{a}_2 = \bar{a}$): $(\bar{a} \sqcap \overline{\mathfrak{B}}) \circ (\bar{a} \sqcap \overline{\mathfrak{B}}) \subset$ $\subset (\bar{a} \sqcap \overline{\mathfrak{B}})$. V tomto případě představuje tedy rozklad $\bar{a} \sqcap \overline{\mathfrak{B}}$ grupoidní komplex ve faktoroidu $\overline{\mathfrak{B}}$.

Když je některý prvek $\bar{a} \in \overline{\mathfrak{A}}$ grupoidní podmnožinou v $\mathfrak{G}$, vytvořuje rozklad $\bar{a} \sqcap \overline{\mathfrak{B}}$ na příslušném podgrupoidu $\bar{\mathfrak{a}} \subset \mathfrak{G}$ faktoroid $\bar{\mathfrak{a}} \sqcap \overline{\mathfrak{B}}$.

Zejména je každý prvek $\bar{a} \in \overline{\mathfrak{A}}$ faktoroidu $\overline{\mathfrak{A}}$ obsahující idempotentní bod $a \in \bar{a}$, tj. takový bod a, pro nějž platí $aa = a \in \bar{a}$, grupoidní podmnožinou v $\mathfrak{G}$ (**15.6.4**).

Vidíme, že když je bod $a \in \mathfrak{G}$ idempotentní, představuje onen prvek $\bar{a} \in \overline{\mathfrak{A}}$, který jej obsahuje, grupoidní podmnožinu v $\mathfrak{G}$, a rozklad $\bar{a} \sqcap \overline{\mathfrak{B}}$ vytvořuje na příslušném podgrupoidu $\bar{\mathfrak{a}} \subset \mathfrak{G}$ faktoroid $\bar{\mathfrak{a}} \sqcap \overline{\mathfrak{B}}$.

3. *Společný zákryt a společné zjemnění dvou faktoroidů.* Nechť $\overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{B}}$ značí libovolné faktoroidy na grupoidu $\mathfrak{G}$.

Společným zákrytem, stručněji *zákrytem faktoroidů* $\overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{B}}$ rozumíme každý faktoroid na $\mathfrak{G}$, který je zákrytem každého faktoroidu $\overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{B}}$.

Podobně rozumíme *společným zjemněním*, stručněji *zjemněním faktoroidů* $\overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{B}}$ každý faktoroid na $\mathfrak{G}$, který je zjemněním každého faktoroidu $\overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{B}}$.

Např. největší faktoroid $\overline{\mathfrak{G}}_{max}$ je společným zákrytem a nejmenší faktoroid $\overline{\mathfrak{G}}_{min}$ společným zjemněním faktoroidů $\overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{B}}$.

Snadno vidíme, že *každý zákryt každého společného zákrytu faktoroidů* $\overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{B}}$ *je opět jejich zákrytem*; podobně *je každé zjemnění každého společného zjemnění faktoroidů* $\overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{B}}$ *opět zjemněním těchto faktoroidů.*

4. *Nejmenší společný zákryt dvou faktoroidů.* Z odst. **14.4.2** víme, že nejmenší společný zákryt polí faktoroidů $\overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{B}}$ je vytvořující rozklad grupoidu $\mathfrak{G}$. Faktoroid patřící k nejmenšímu společnému zákrytu polí faktoroidů $\overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{B}}$ se nazývá *nejmenší společný zákryt*, stručněji *nejmenší zákryt faktoroidů* $\overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{B}}$, a označuje se $[\overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{B}}]$ nebo $[\overline{\mathfrak{B}}, \overline{\mathfrak{A}}]$.

Z definice faktoroidu $[\overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{B}}]$ vyplývá, že jeho pole je zjemněním každého společného zákrytu polí faktoroidů $\overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{B}}$ a tedy také každého vytvořujícího společného zákrytu polí faktoroidů $\overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{B}}$. Z toho vidíme, že faktoroid $[\overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{B}}]$ je společným zákrytem faktoroidů $\overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{B}}$, který je nejmenší v tom smyslu, že každý společný zákryt obou faktoroidů je jeho zákrytem.

5. *Největší společné zjemnění dvou faktoroidů.* Z odst. **14.4**.3 víme, že největší společné zjemnění polí faktoroidů $\overline{\mathfrak{A}}$, $\overline{\mathfrak{B}}$ je vytvořující rozklad grupoidu $\mathfrak{G}$. Faktoroid patřící k největšímu společnému zjemnění polí faktoroidů $\overline{\mathfrak{A}}$, $\overline{\mathfrak{B}}$ se nazývá *největší společné zjemnění*, stručněji *největší zjemnění faktoroidů* $\overline{\mathfrak{A}}$, $\overline{\mathfrak{B}}$ a označuje se $(\overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{B}})$ nebo $(\overline{\mathfrak{B}}, \overline{\mathfrak{A}})$.

Z definice faktoroidu $(\overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{B}})$ vyplývá, že jeho pole je zákrytem každého společného zjemnění polí faktoroidů $\overline{\mathfrak{A}}$, $\overline{\mathfrak{B}}$ a tedy také každého vytvořujícího společného zjemnění polí faktoroidů $\overline{\mathfrak{A}}$, $\overline{\mathfrak{B}}$. Z toho vidíme, že faktoroid $(\overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{B}})$ je společným zjemněním faktoroidů $\overline{\mathfrak{A}}$, $\overline{\mathfrak{B}}$, které je největší v tom smyslu, že každé společné zjemnění obou faktoroidů je jeho zjemněním.

Při této příležitosti připomeňme platnost vzorce: $(\overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{B}}) = \overline{\mathfrak{A}} \sqcap \overline{\mathfrak{B}}$ (**15.3.2**).

6. *Modulární faktoroidy.* Buďte $\overline{\mathfrak{X}}$, $\overline{\mathfrak{A}}$, $\overline{\mathfrak{B}}$ faktoroidy na grupoidu $\mathfrak{G}$ takové, že $\overline{\mathfrak{X}} \geqq \overline{\mathfrak{A}}$.

Pravíme, že faktoroid $\overline{\mathfrak{B}}$ je *modulární vzhledem k faktoroidům* $\overline{\mathfrak{X}}$, $\overline{\mathfrak{A}}$ (v tomto pořadí), když platí:

$$[\overline{\mathfrak{A}}, (\overline{\mathfrak{X}}, \overline{\mathfrak{B}})] = (\overline{\mathfrak{X}}, [\overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{B}}]) .$$

Když např. $\overline{\mathfrak{X}} = \overline{\mathfrak{B}}$ nebo $\overline{\mathfrak{A}} = \overline{\mathfrak{G}}_{\max}$, je faktoroid $\overline{\mathfrak{B}}$ modulární vzhledem k faktoroidům $\overline{\mathfrak{X}}$, $\overline{\mathfrak{A}}$.

Nechť jsou libovolné faktoroidy $\overline{\mathfrak{X}}$, $\overline{\mathfrak{Y}}$; $\overline{\mathfrak{A}}$, $\overline{\mathfrak{B}}$ na grupoidu $\mathfrak{G}$ ve vztazích $\overline{\mathfrak{X}} \geqq \overline{\mathfrak{A}}$, $\overline{\mathfrak{Y}} \geqq \overline{\mathfrak{B}}$ a předpokládejme, že faktoroid $\overline{\mathfrak{B}}$ je modulární vzhledem k $\overline{\mathfrak{X}}$, $\overline{\mathfrak{A}}$ a že faktoroid $\overline{\mathfrak{A}}$ má tutéž vlastnost vzhledem k $\overline{\mathfrak{Y}}$, $\overline{\mathfrak{B}}$.

Pak máme rovnosti

$$\begin{aligned}(\mathring{\mathfrak{A}} =) \quad & [\overline{\mathfrak{A}}, (\overline{\mathfrak{X}}, \overline{\mathfrak{B}})] = (\overline{\mathfrak{X}}, [\overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{B}}]) ,\\ (\mathring{\mathfrak{B}} =) \quad & [\overline{\mathfrak{B}}, (\overline{\mathfrak{Y}}, \overline{\mathfrak{A}})] = (\overline{\mathfrak{Y}}, [\overline{\mathfrak{B}}, \overline{\mathfrak{A}}])\end{aligned}$$

přičemž $\mathring{\mathfrak{A}}$ ($\mathring{\mathfrak{B}}$) značí faktoroid definovaný prvním (druhým) vzorcem.

V této situaci platí interpolační vzorce

$$\overline{\mathfrak{X}} \geqq \mathring{\mathfrak{A}} \geqq \overline{\mathfrak{A}} , \quad \overline{\mathfrak{Y}} \geqq \mathring{\mathfrak{B}} \geqq \overline{\mathfrak{B}}$$

a dále rovnosti (**4.3**):

(1) $$[\mathring{\mathfrak{A}}, \mathring{\mathfrak{B}}] = [\overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{B}}] ; \quad [\overline{\mathfrak{X}}, \mathring{\mathfrak{B}}] = [\overline{\mathfrak{X}}, \overline{\mathfrak{B}}] ; \quad [\overline{\mathfrak{Y}}, \mathring{\mathfrak{A}}] = [\overline{\mathfrak{Y}}, \overline{\mathfrak{A}}] ,$$

(2) $$(\mathring{\mathfrak{A}}, \mathring{\mathfrak{B}}) = (\overline{\mathfrak{X}}, \mathring{\mathfrak{B}}) = (\overline{\mathfrak{Y}}, \mathring{\mathfrak{A}}) = ((\overline{\mathfrak{X}}, \overline{\mathfrak{Y}}), [\overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{B}}]) .$$

7. *Doplňkové faktoroidy.* Buďte $\overline{\mathfrak{A}}$, $\overline{\mathfrak{B}}$ libovolné faktoroidy na grupoidu $\mathfrak{G}$.

Faktoroidy $\overline{\mathfrak{A}}$, $\overline{\mathfrak{B}}$ se nazývají *doplňkové*, když jsou doplňkovými jejich pole, tj. když každé dva prvky $\bar{a} \in \overline{\mathfrak{A}}$, $\bar{b} \in \overline{\mathfrak{B}}$ ležící v témž prvku $\bar{u} \in [\overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{B}}]$, jsou incidentní.

Když např. jeden z obou faktoroidů je zákrytem druhého, jsou oba faktoroidy doplňkové.

Když pro nějaký faktoroid $\overline{\mathfrak{X}}$ na grupoidu $\mathfrak{G}$ platí vztah $\overline{\mathfrak{X}} \geqq \overline{\mathfrak{A}}$ a faktoroidy $\overline{\mathfrak{A}}$, $\overline{\mathfrak{B}}$ jsou doplňkové, je faktoroid $\overline{\mathfrak{B}}$ modulární vzhledem k $\overline{\mathfrak{X}}$, $\overline{\mathfrak{A}}$ (**5.4**).

Později (**25.3**) uvidíme, že se některé grupoidy vyznačují tím, že na nich jsou každé dva faktoroidy doplňkové. Proto je vhodné podotknout, že dva faktoroidy daného grupoidu obecně doplňkovými nejsou. Např. na grupoidu, jehož pole má čtyři prvky a, b, c, d a násobení je dáno vzorcem $xy = y$, jsou všechny rozklady vytvořující (**14.5**.3); faktoroidy, jejichž pole jsou např. oba rozklady $\{a, b\}, \{c, d\}$ a $\{a\}, \{b, c, d\}$ doplňkové nejsou (**5.6**.2).

15.5. α-stupňové grupoidní útvary

Přistoupíme nyní k definici složitějšího pojmu založeného na významu α-stupňového množinového útvaru, který má v dalších úvahách důležitou úlohu.

Budiž α ($\geqq 1$) libovolné přirozené číslo a ($[\mathfrak{A}] =$) $(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\alpha)$ libovolná α-členná posloupnost grupoidů. Symbol A_γ nechť značí pole grupoidu $\mathfrak{A}_\gamma$, $\gamma = 1, 2, \ldots, \alpha$.

α-stupňovým grupoidním útvarem, stručněji *grupoidním útvarem* nebo prostě *útvarem, vzhledem k posloupnosti* $[\mathfrak{A}]$, rozumíme grupoid $\tilde{\mathfrak{A}}$ tohoto složení:

Pole grupoidu $\tilde{\mathfrak{A}}$ je α-stupňový množinový útvar vzhledem k posloupnosti $(A_1, \ldots, A_\alpha)$; každý prvek $\bar{\bar{a}} = (\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_\alpha) \in \tilde{\mathfrak{A}}$ představuje tedy α-člennou posloupnost, jejíž každý člen $\bar{a}_\gamma$, $\gamma = 1, \ldots, \alpha$, je komplexem v grupoidu $\mathfrak{A}_\gamma$. Dále se násobení v grupoidu $\tilde{\mathfrak{A}}$ vyznačuje tím, že pro každé dva prvky $\bar{\bar{a}} = (\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_\alpha)$, $\bar{\bar{b}} = (\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_\alpha) \in \tilde{\mathfrak{A}}$ a jejich součin $\bar{\bar{a}}\bar{\bar{b}} = \bar{\bar{c}} = (\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_\alpha) \in \tilde{\mathfrak{A}}$ platí vztahy: $\bar{a}_1\bar{b}_1 \subset \bar{c}_1, \ldots, \bar{a}_\alpha\bar{b}_\alpha \subset \bar{c}_\alpha$.

V dalších úvahách se budeme zabývat zejména případem, kdy grupoidy $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\alpha$ jsou faktoroidy $\bar{\mathfrak{A}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{A}}_\alpha$ na $\mathfrak{G}$. Takové α-stupňové grupoidní útvary mají tedy toto složení: Každý prvek $\bar{\bar{a}} = (\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_\alpha) \in \tilde{\mathfrak{A}}$ představuje α-člennou posloupnost, jejíž každý člen $\bar{a}_\gamma$, $\gamma = 1, \ldots, \alpha$, je rozkladem v grupoidu $\mathfrak{G}$, a to komplexem ve faktoroidu $\bar{\mathfrak{A}}_\gamma$. Násobení v grupoidu $\tilde{\mathfrak{A}}$ se vyznačuje tím, že pro každé dva prvky $\bar{\bar{a}} = (\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_\alpha)$, $\bar{\bar{b}} = (\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_\alpha) \in \tilde{\mathfrak{A}}$ a jejich součin $\bar{\bar{a}}\bar{\bar{b}} = \bar{\bar{c}} = (\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_\alpha)$ platí vztahy: $\bar{a}_1 \circ \bar{b}_1 \subset \bar{c}_1, \ldots, \bar{a}_\alpha \circ \bar{b}_\alpha \subset \bar{c}_\alpha$.

15.6. Cvičení

1. Ukažte, že grupoidy $\mathfrak{Z}_n$, $\bar{\mathfrak{Z}}_n$ ($n \geqq 1$) jsou izomorfní.
2. Nechť $\mathfrak{A}_m$ značí podgrupoid v $\mathfrak{Z}$, jehož pole se skládá ze všech celých násobků nějakého přirozeného čísla $m > 1$. Z kterých prvků se skládají faktoroidy $\mathfrak{A}_m \sqsubset \bar{\mathfrak{Z}}_n$ a $\bar{\mathfrak{Z}}_n \sqcap \mathfrak{A}_m$ ($n > 1$), když m, n nejsou nesoudělná?
3. Každý faktoroid na nějakém abelovském (asociativním) grupoidu je abelovský (asociativní).
4. Když nějaký grupoid $\mathfrak{G}$ obsahuje prvek a takový, že $aa = a$, tzv. *rovnomocný* neboli *idempotentní* prvek (**15.4**.2), pak onen prvek libovolného faktoroidu v $\mathfrak{G}$, který obsahuje prvek a, je rovněž rovnomocný.