20. Třídy vzhledem k podgrupám

20.1. Definice

Vezměme v úvahu grupu $\mathfrak{G}$ a v ní libovolnou podgrupu $\mathfrak{A}$. Dále budiž $p \in \mathfrak{G}$ libovolný prvek v $\mathfrak{G}$.

Podmnožina $p\mathfrak{A}$ v $\mathfrak{G}$, tj. tedy množina součinů prvku p s každým prvkem v $\mathfrak{A}$, nazývá se *levá třída prvku p vzhledem k podgrupě* $\mathfrak{A}$ nebo stručněji (víme-li, že jde o podgrupu $\mathfrak{A}$) *levá třída prvku p*.

Podobně se nazývá podmnožina $\mathfrak{A}p$, tj. množina součinů každého prvku v $\mathfrak{A}$ s prvkem p, *pravá třída prvku p vzhledem k podgrupě* $\mathfrak{A}$, stručněji: *pravá třída prvku p*.

Všimněme si, že pole A podgrupy $\mathfrak{A}$ je současně levá i pravá třída prvku $\underline{1}$ vzhledem k $\mathfrak{A}$.

V několika jednoduchých větách popíšeme nejprve vlastnosti levých tříd; vlastnosti pravých tříd jsou analogické a třebaže je kvůli úspoře místa výslovně neuvádíme, doporučujeme čtenáři, aby si je rovněž promyslil.

20.2. Vlastnosti levých (pravých) tříd

Budiž $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$ podgrupa v $\mathfrak{G}$ a nechť p, q značí libovolné prvky v $\mathfrak{G}$. Dokážeme, že pak platí tyto věty:

1. *Levá třída $p\mathfrak{A}$ obsahuje prvek p.*

Skutečně, protože $\mathfrak{A}$ je podgrupa, máme $\underline{1} \in \mathfrak{A}$, a odtud plyne $p = p\underline{1} \in p\mathfrak{A}$.

2. *Když a jen když $p \in \mathfrak{A}$, je $p\mathfrak{A} = A$.*

Za účelem důkazu předpokládejme nejprve $p \in \mathfrak{A}$. Protože $\mathfrak{A}$ je podgrupa, je součin prvku p s každým prvkem v $\mathfrak{A}$ obsažen opět v $\mathfrak{A}$, takže máme vztah $p\mathfrak{A} \subset A$. Mimoto $p^{-1} \in \mathfrak{A}$ a pro libovolný prvek $a \in \mathfrak{A}$ platí $p^{-1}a \in \mathfrak{A}$, takže $p(p^{-1}a) \in p\mathfrak{A}$; avšak $p(p^{-1}a) = (pp^{-1})\,a = \underline{1}a = a$; vychází tedy $a \in p\mathfrak{A}$ a máme další vztah $A \subset$ $\subset p\mathfrak{A}$. Tedy je skutečně $p\mathfrak{A} = A$. Nechť nyní pro některý prvek $p \in \mathfrak{G}$ platí rovnost $p\mathfrak{A} = A$. Pak každý součin pa, kde $a \in \mathfrak{A}$, je obsažen v $\mathfrak{A}$, a tedy zejména (pro $a = \underline{1}$) je prvek p obsažen v $\mathfrak{A}$.

Zobecněním věty 2 je věta:

3. *Když a jen když $p^{-1}q \in \mathfrak{A}$, je $p\mathfrak{A} = q\mathfrak{A}$.*

Skutečně, když $p^{-1}q \in \mathfrak{A}$, máme podle věty 2: $p^{-1}q\mathfrak{A} = A$ a tedy platí tyto rovnosti: $q\mathfrak{A} = (pp^{-1})\, q\mathfrak{A} = p(p^{-1}q)\, \mathfrak{A} = p(p^{-1}q\mathfrak{A}) = p\mathfrak{A}$. Naopak plyne z rovnosti $q\mathfrak{A} = p\mathfrak{A}$ vztah $(p^{-1}q)\, \mathfrak{A} = A$, a tedy $p^{-1}q \in \mathfrak{A}$ podle věty 2.

4. *Levé třídy $p\mathfrak{A}$, $q\mathfrak{A}$ jsou buď disjunktní nebo identické.*

Tato důležitá vlastnost levých tříd plyne z této úvahy: Mají-li obě levé třídy $p\mathfrak{A}$, $q\mathfrak{A}$ některý prvek x společný, takže $x \in p\mathfrak{A}$, $x \in q\mathfrak{A}$, pak je $p^{-1}x \in \mathfrak{A}$, $q^{-1}x \in \mathfrak{A}$ a odtud podle věty 3 vychází $p\mathfrak{A} = x\mathfrak{A} = q\mathfrak{A}$, takže obě levé třídy $p\mathfrak{A}$, $q\mathfrak{A}$ jsou identické.

5. *Levé třídy $p\mathfrak{A}$, $q\mathfrak{A}$ jsou ekvivalentní množiny.*

Máme ukázat, že existuje prosté zobrazení množiny $p\mathfrak{A}$ na $q\mathfrak{A}$. Každý prvek v $p\mathfrak{A}$ $(q\mathfrak{A})$ je součin pa (qa) prvku p (q) s vhodným prvkem $a \in \mathfrak{A}$ a takový prvek a je jenom jeden, neboť z rovnosti $pa = pb$ $(qa = qb)$ plyne $a = b$. Naopak, když $a \in \mathfrak{A}$, máme $pa \in p\mathfrak{A}$ $(qa \in q\mathfrak{A})$. Vidíme tedy, že zobrazení $\begin{pmatrix} pa \\ a \end{pmatrix}$ je prosté zobrazení množiny $p\mathfrak{A}$ na $\mathfrak{A}$ a podobně $\begin{pmatrix} a \\ qa \end{pmatrix}$ je prosté zobrazení podgrupy $\mathfrak{A}$ na $q\mathfrak{A}$. Tedy je $\begin{pmatrix} a \\ qa \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} pa \\ a \end{pmatrix}$ prosté zobrazení množiny $p\mathfrak{A}$ na $q\mathfrak{A}$, a tím je naše tvrzení dokázáno.

Své úvahy rozšíříme nyní na případ, že vedle podgrupy $\mathfrak{A}$ máme v $\mathfrak{G}$ další podgrupu $\mathfrak{B}$.

6. *Když jsou některé dvě levé třídy $p\mathfrak{A}$, $q\mathfrak{B}$ incidentní, pak jejich průnik $p\mathfrak{A} \cap q\mathfrak{B}$ je levou třídou každého svého prvku vzhledem k podgrupě $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$.*

Vskutku, když některé dvě třídy $p\mathfrak{A}$, $q\mathfrak{B}$ mají společný prvek $c \in \mathfrak{G}$, pak podle vět 1 a 2 platí rovnosti $p\mathfrak{A} = c\mathfrak{A}$, $q\mathfrak{B} = c\mathfrak{B}$, takže $p\mathfrak{A} \cap q\mathfrak{B} = c\mathfrak{A} \cap c\mathfrak{B}$. Každý prvek $x \in c\mathfrak{A} \cap c\mathfrak{B}$ je součinem prvku c a jistého prvku $a \in \mathfrak{A}$ a současně součinem prvku c a jistého prvku $b \in \mathfrak{B}$, takže $x = ca = cb$. Odtud vidíme, že $a = b \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$, a tedy $x \in c(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})$. Tím jsme zjistili, že platí vztah: $p\mathfrak{A} \cap q\mathfrak{B} \subset c(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})$. Dále je každý prvek $x \in c(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})$ součinem prvku c a jistého prvku $a \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$, takže $x = ca \in$ $\in c\mathfrak{A} \cap c\mathfrak{B}$. Z toho soudíme na platnost vztahu $c(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}) \subset p\mathfrak{A} \cap q\mathfrak{B}$. Tím je důkaz ukončen.

7. *Když $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$, pak z incidence levých tříd $p\mathfrak{A}$, $q\mathfrak{B}$ plyne $p\mathfrak{A} \subset q\mathfrak{B}$.*

Vskutku, ze vztahu $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ plyne $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} = \mathfrak{A}$, podle **1.10**.3; z předešlých vět 6 a 4 soudíme, že platí rovnost: $p\mathfrak{A} \cap q\mathfrak{B} = p\mathfrak{A}$ a odtud vychází $p\mathfrak{A} \subset q\mathfrak{B}$ podle **1.10**.3.

Jak jsme se již zmínili, mají pravé třídy vzhledem k podgrupě $\mathfrak{A}$ vlastnosti analogické. Mezi levými a pravými třídami vzhledem k podgrupě $\mathfrak{A}$ je tento vztah:

8. *Levá třída $p\mathfrak{A}$ se zobrazí inverzí $\mathbf{n}$ grupy $\mathfrak{G}$ na pravou třídu $\mathfrak{A}p^{-1}$, takže máme: $\mathbf{n}(p\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}p^{-1}$. Současně platí obdobný vzorec: $\mathbf{n}(\mathfrak{A}p) = p^{-1}\mathfrak{A}$.*

Důkaz. Ze vztahu $x \in p\mathfrak{A}$ plyne $x = pa$ $(a \in \mathfrak{A})$ a ze vzorce $x^{-1} = a^{-1}p^{-1}$ $(a^{-1} \in \mathfrak{A})$ máme $x^{-1} \in \mathfrak{A}p^{-1}$. Odtud plyne $\mathbf{n}(p\mathfrak{A}) \subset \mathfrak{A}p^{-1}$. Mimoto je každý bod $y = a'p^{-1} \subset \mathfrak{A}p^{-1}$ $(a' \in \mathfrak{A})$ $\mathbf{n}$-obrazem prvku $pa'^{-1} \in p\mathfrak{A}$ $(a'^{-1} \in \mathfrak{A})$, takže máme $\mathfrak{A}p^{-1} \subset \mathbf{n}(p\mathfrak{A})$. Vychází tedy rovnost $\mathbf{n}(p\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}p^{-1}$.

Poznámka. Každou z obou tříd $p\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}p^{-1}$ nazýváme *inverzní* vzhledem k druhé a mluvíme o třídách *vzájemně inverzních*. Jestliže jsme jednu z nich označili např. $\bar{a}$, označujeme druhou $\bar{a}^{-1}$.

9. *Levá třída $p\mathfrak{A}$ a pravá třída $\mathfrak{A}q$ jsou ekvivalentní množiny.*

Důkaz. Máme ukázat, že existuje prosté zobrazení množiny $p\mathfrak{A}$ na $\mathfrak{A}q$. Podle věty 8 a podle **7.3.4** jsou množiny $p\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{A}p^{-1}$ vzájemně ekvivalentní; podle věty, obdobné větě 5, platné pro pravé třídy, mají touž vlastnost množiny $\mathfrak{A}p^{-1}$ a $\mathfrak{A}q$. Odtud plyne tvrzení podle **6.10.7**.

20.3. Cvičení

1. Když je grupa $\mathfrak{G}$ abelovská, je levá třída libovolného prvku $p \in \mathfrak{G}$ vzhledem k nějaké podgrupě $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$ současně pravou třídou, takže $p\mathfrak{A} = \mathfrak{A}p$.

2. Buďtež $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ libovolné podgrupy a C komplex v $\mathfrak{G}$. Ukažte, že platí tato tvrzení: a) součet všech levých (pravých) tříd vzhledem k podgrupě $\mathfrak{A}$, incidentních s komplexem C, splývá s komplexem $C\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}C$); b) součet $\mathfrak{B}p\mathfrak{A}$ všech levých tříd vzhledem k $\mathfrak{A}$, incidentních s některou pravou třídou $\mathfrak{B}p$ ($p \in \mathfrak{G}$), splývá se součtem všech pravých tříd vzhledem k $\mathfrak{B}$, incidentních s levou třídou $p\mathfrak{A}$.

3. Budiž $p \in \mathfrak{G}$ libovolný prvek a nechť $\mathring{\mathfrak{G}}$ je (p)-grupa přidružená ke grupě $\mathfrak{A}$ (**19.7.11**). Dále buď $\mathfrak{A}$ libovolná podgrupa v $\mathfrak{G}$. Ukažte, že pak nastane tato situace: a) levá (pravá) třída $p\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}p$) prvku p vzhledem k podgrupě $\mathfrak{A}$ je polem jisté podgrupy $\mathring{\mathfrak{A}}_l \subset \mathring{\mathfrak{G}}$ ($\mathring{\mathfrak{G}}_p \subset \mathring{\mathfrak{G}}$) v grupě $\mathring{\mathfrak{G}}$; b) pro každý prvek x v $\mathring{\mathfrak{G}}$ splývá levá (pravá) třída $x \circ \mathring{\mathfrak{A}}_l$ ($\mathring{\mathfrak{A}}_p \circ x$) s levou (pravou) třídou $x\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}x$).