21. Rozklady vytvořené podgrupami

Velmi důležitá vlastnost grup záleží v tom, že každá podgrupa v libovolné grupě určuje na ní jisté rozklady.

21.1. Pojem levých a pravých rozkladů

Uvažujme o systému všech podmnožin v $\mathfrak{G}$, které jsou levými třídami vzhledem k $\mathfrak{A}$ vždy některého prvku v $\mathfrak{G}$. Podle věty **20.2.1** je každý prvek $p \in \mathfrak{G}$ obsažen v levé třídě $p\mathfrak{A}$ a ta je ovšem prvkem našeho systému; podle věty **20.2.4** jsou každé dva prvky našeho systému disjunktní. Systém, o nějž jde, je tedy rozkladem grupy $\mathfrak{G}$. Tento rozklad grupy $\mathfrak{G}$ se nazývá *rozklad grupy $\mathfrak{G}$ v levé třídy vytvořený podgrupou $\mathfrak{A}$*, stručněji *levý rozklad vytvořený podgrupou $\mathfrak{A}$*. Označujeme jej $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$.

Podobně se ukáže, že systém všech podmnožin v $\mathfrak{G}$, které jsou pravými třídami vzhledem k $\mathfrak{A}$ vždy některého prvku v $\mathfrak{G}$, je rozkladem grupy $\mathfrak{G}$, a to tzv. *rozkladem grupy $\mathfrak{G}$ v pravé třídy vytvořeným podgrupou $\mathfrak{A}$*, stručněji *pravým rozkladem vytvořeným podgrupou $\mathfrak{A}$*. Označujeme jej symbolem $\mathfrak{G}/_p\mathfrak{A}$.

Např. máme vzorce: $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{G} = \mathfrak{G}/_p\mathfrak{G} = \bar{G}_{\max}$, $\mathfrak{G}/_l\{\underline{1}\} = \mathfrak{G}/_p\{\underline{1}\} = \bar{G}_{\min}$; $\bar{G}_{\max}$, $\bar{G}_{\min}$ představují ovšem největší a nejmenší rozklad grupy $\mathfrak{G}$.

V dalších větách popíšeme vlastnosti levých rozkladů grupy. Vlastnosti pravých rozkladů jsou analogické a proto je pro úsporu místa neuvádíme. V závěru této kapitoly jsou popsány vzájemné vztahy mezi levým a pravým rozkladem grupy $\mathfrak{G}$ vzhledem k téže podgrupě $\mathfrak{A}$.

21.2. Průseky a obaly v souvislosti s levými rozklady

1. Buďtež $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ libovolné podgrupy v $\mathfrak{G}$. Vezměme v úvahu průsek $\mathfrak{A}/_l\mathfrak{B} \sqcap \mathfrak{C}$ a obal $\mathfrak{C} \sqsubset \mathfrak{A}/_l\mathfrak{B}$. Protože je $A \cap C \neq \emptyset$, nejsou tyto útvary prázdné; $A \supset B$, C značí ovšem pole příslušných podgrup.

Ukážeme, že *platí vzorec*:

(1) $$\mathfrak{A}/_l\mathfrak{B} \sqcap \mathfrak{C} = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})/_l(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}).$$

Když jsou podgrupy $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}, \mathfrak{B}$ zaměnitelné, platí též rovnost:

(2) $$\mathfrak{C} \sqsubset \mathfrak{A}/_l\mathfrak{B} = (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\,\mathfrak{B}/_l\mathfrak{B}.$$

Důkaz. a) Ukážeme, že každý prvek rozkladu na pravé (levé) straně vzorce (1) je prvkem rozkladu na levé (pravé) straně. Každý prvek $\bar{a} \in (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})/_l(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C})$ má tvar $\bar{a} = a(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}) = a\mathfrak{B} \cap a\mathfrak{C}$, přičemž $a \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$. Ze vztahů $a \in \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ máme $a\mathfrak{B} \in \mathfrak{A}/_l\mathfrak{B}$ a ze vztahu $a \in \mathfrak{C}$ plyne $a\mathfrak{C} = C$. Vidíme, že platí vztahy: $\bar{a} = a\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C} \in \in \mathfrak{A}/_l\mathfrak{B} \sqcap \mathfrak{C}$. Budiž nyní $\bar{a} \in \mathfrak{A}/_l\mathfrak{B} \sqcap \mathfrak{C}$ libovolný prvek, tedy $\bar{a} = a\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$ $(\neq \emptyset)$, $a \in \mathfrak{A}$. Dále budiž $x \in \bar{a}$ libovolný bod. Ze vztahu $x \in a\mathfrak{B}$ plyne $a\mathfrak{B} = x\mathfrak{B}$ a protože $x \in \mathfrak{C}$ platí $C = x\mathfrak{C}$, a tedy $\bar{a} = x\mathfrak{B} \cap x\mathfrak{C} = x(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C})$. Protože dále z $a \in \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ následuje vztah $a\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$, vychází $x \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$, takže $\bar{a} \in (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})/_l(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C})$. Tím je ukončen důkaz vzorce (1).

b) Nyní předpokládejme, že podgrupy $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}$ jsou vzájemně zaměnitelné. Tato situace nastane např. tehdy, když jsou vzájemně zaměnitelné podgrupy $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ (**22.2.1**).

Při důkazu vzorce (2) budeme postupovat analogicky jako v případě a). Každý prvek $\bar{a} \in (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\,\mathfrak{B}/_l\mathfrak{B}$ má tvar $x\mathfrak{B}$, přičemž $x \in (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\,\mathfrak{B}$; vidíme, že prvek x představuje součin ab vhodného bodu $a \in \mathfrak{C} \cap \mathfrak{A}$ a vhodného bodu $b \in \mathfrak{B}$. Platí tedy rovnosti: $\bar{a} = (ab)\mathfrak{B} = a(b\mathfrak{B}) = a\mathfrak{B}$ (poslední rovnost platí vzhledem ke vztahu $b\mathfrak{B} = = B$, který je správný podle **20.2.2**). Ze vztahů $a \in \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ vychází $a\mathfrak{B} \in \mathfrak{A}/_l\mathfrak{B}$ a z toho, že platí $a \in \mathfrak{C}$, vidíme, že levá třída $a\mathfrak{B}$ inciduje s $\mathfrak{C}$. Tímto způsobem docházíme ke vzorci: $\bar{a} \in \mathfrak{C} \sqsubset \mathfrak{A}/_l\mathfrak{B}$. Budiž nyní $\bar{a}$ libovolný prvek rozkladu $\mathfrak{C} \sqsubset \mathfrak{A}/_l\mathfrak{B}$, tedy $\bar{a} = a\mathfrak{B}$, přičemž a je bodem v $\mathfrak{A}$ a $a\mathfrak{B}$ inciduje s $\mathfrak{C}$; dále budiž $c \in \mathfrak{C} \cap a\mathfrak{B}$ libovolný bod. Ze vztahu $c \in a\mathfrak{B}$ soudíme podle vět **20.2.1** a **20.2.4** na platnost rovnosti $\bar{a} = c\mathfrak{B}$, z níž (vzhledem k $\bar{a} \subset \mathfrak{A}$) následuje $c \in \mathfrak{A}$. Máme tedy $c \in \mathfrak{C} \cap \mathfrak{A}$ a tedy též $c = c \,.\, \underline{1} \in \in (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\,\mathfrak{B}$. Z této situace a ze vztahu $\mathfrak{B} \subset (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\,\mathfrak{B}$ vychází $\bar{a} \in (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\,\mathfrak{B}/_l\mathfrak{B}$. Tím je důkaz vzorce (2) ukončen.

Všimněme si zejména *zvláštního případu, kdy podgrupa* $\mathfrak{A}$ *splývá s grupou* $\mathfrak{G}$. *V tomto případě máme*:

(1′) $$\mathfrak{G}/_l\mathfrak{B} \sqcap \mathfrak{C} = \mathfrak{C}/_l(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}),$$

a dále, za předpokladu, že podgrupy $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ *jsou vzájemně zaměnitelné,*

(2′) $$\mathfrak{C} \sqsubset \mathfrak{G}/_l\mathfrak{B} = \mathfrak{C}\mathfrak{B}/_l\mathfrak{B}.$$

2. Hořejší úvahy rozšíříme nyní v tom směru, že na místo podgrupy v grupě $\mathfrak{G}$ nastoupí levý rozklad na některé podgrupě v $\mathfrak{G}$.

Buďte $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$, $\mathfrak{C} \supset \mathfrak{D}$ libovolné podgrupy v $\mathfrak{G}$. Vezměme v úvahu průsek $\mathfrak{A}/_l\mathfrak{B} \sqcap \mathfrak{C}/_l\mathfrak{D}$ a obal $\mathfrak{C}/_l\mathfrak{D} \sqsubset \mathfrak{A}/_l\mathfrak{B}$. Protože platí $A \cap C \neq \emptyset$, nejsou tyto útvary prázdné. $A \supset B$, $C \supset D$ značí ovšem pole příslušných podgrup.

Ukážeme, že *platí vzorec*

(3) $$\mathfrak{A}/_l\mathfrak{B} \sqcap \mathfrak{C}/_l\mathfrak{D} = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})/_l(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{D}),$$

a dále, za předpokladu, že podgrupy $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}$ *jsou vzájemně zaměnitelné, také*:

(4) $$\mathfrak{C}/_l\mathfrak{D} \sqsubset \mathfrak{A}/_l\mathfrak{B} = (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\,\mathfrak{B}/_l\mathfrak{B}.$$

Důkaz. a) Každý prvek $\bar{a} \in (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})/_l(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{D})$ má tvar $\bar{a} = a(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{D}) =$

$= a\mathfrak{B} \cap a\mathfrak{D}$, přičemž $a \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$. Ze vztahů $a \in \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ vychází: $a\mathfrak{B} \in \mathfrak{A}/_l\mathfrak{B}$. Podobně ze vztahů $a \in \mathfrak{C}$, $\mathfrak{C} \supset \mathfrak{D}$ máme $a\mathfrak{D} \subset \mathfrak{C}/_l\mathfrak{D}$. Vidíme, že $\bar{a}$ představuje neprázdný průnik prvků $a\mathfrak{B}$ a $a\mathfrak{D}$ rozkladů $\mathfrak{A}/_l\mathfrak{B}$ a $\mathfrak{C}/_l\mathfrak{D}$, takže $\bar{a} \in \mathfrak{A}/_l\mathfrak{B} \sqcap \mathfrak{C}/_l\mathfrak{D}$.

Budiž nyní $\bar{a} \in \mathfrak{A}/_l\mathfrak{B} \sqcap \mathfrak{C}/_l\mathfrak{D}$ libovolný prvek, takže $\bar{a} = a\mathfrak{B} \cap c\mathfrak{D}$ $(\neq \emptyset)$, $a \in \mathfrak{A}$, $c \in \mathfrak{C}$; dále buď $x \in \bar{a}$ libovolný bod. Ze vztahu $x \in a\mathfrak{B}$ máme $a\mathfrak{B} = x\mathfrak{B}$ a podobně z $x \in c\mathfrak{D}$ plyne $c\mathfrak{D} = x\mathfrak{D}$; máme tedy $\bar{a} = a\mathfrak{B} \cap c\mathfrak{D} = x\mathfrak{B} \cap x\mathfrak{D} = x(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{D})$.

Protože vzhledem k $a \in \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$, $c \in \mathfrak{C} \supset \mathfrak{D}$ je $a\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$, $c\mathfrak{D} \subset \mathfrak{C}$, vidíme že $x \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$. Tak docházíme k výsledku $\bar{a} \in (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})/_l(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{D})$. Tím je dokázána platnost vzorce (3).

b) Vzorec (4) plyne bezprostředně ze vztahů $\mathfrak{C}/_l\mathfrak{D} \sqsubset \mathfrak{A}/_l\mathfrak{B} = \mathbf{s}(\mathfrak{C}/_l\mathfrak{D}) \sqsubset \mathfrak{A}/_l\mathfrak{B}$, $\mathbf{s}(\mathfrak{C}/_l\mathfrak{D}) = C$ a ze vzorce (2) na str. 159.

Ve zvláštním případě, kdy podgrupy $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$ splývají s grupou $\mathfrak{G}$, takže rozklady $\mathfrak{A}/_l\mathfrak{B}$ $(= \mathfrak{G}/_l\mathfrak{B})$, $\mathfrak{C}/_l\mathfrak{D}$ $(= \mathfrak{G}/_l\mathfrak{D})$ leží na grupě $\mathfrak{G}$, splývá průsek $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{B} \sqcap \mathfrak{G}/_l\mathfrak{D}$ s jejich největším společným zjemněním $(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}, \mathfrak{G}/_l\mathfrak{D})$ (**3.5**). Tak *docházíme ke vzorci*: $(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}, \mathfrak{G}/_l\mathfrak{D}) = \mathfrak{G}/_l(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{D})$.

21.3. Zákryty a zjemnění levých rozkladů

Nechť jsou v grupě $\mathfrak{G}$ dány dvě podgrupy $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$. Zkoumejme, kdy levý rozklad grupy $\mathfrak{G}$ vytvořený podgrupou $\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{B}$) je zákrytem (zjemněním) levého rozkladu vytvořeného podgrupou $\mathfrak{B}$ ($\mathfrak{A}$), tj. $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A} \geqq \mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}$.

Když levý rozklad grupy $\mathfrak{G}$ vytvořený podgrupou $\mathfrak{A}$ je zákrytem levého rozkladu vytvořeného podgrupou $\mathfrak{B}$, pak zejména pole A podgrupy $\mathfrak{A}$ je součtem některých levých tříd vzhledem k podgrupě $\mathfrak{B}$ a mezi těmito levými třídami je pole B podgrupy $\mathfrak{B}$, neboť obě množiny A, B mají společný prvek $\underline{1}$. Z toho soudíme, že podgrupa $\mathfrak{A}$ je nadgrupou na $\mathfrak{B}$, tj. $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$. Když naopak podgrupa $\mathfrak{A}$ leží na $\mathfrak{B}$, soudíme, podle věty **20.2.7**, že každá levá třída vzhledem k $\mathfrak{A}$ je součtem všech levých tříd vzhledem k podgrupě $\mathfrak{B}$, které jsou s ní incidentní. Vidíme tedy, že pak levý rozklad grupy $\mathfrak{G}$ vytvořený podgrupou $\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{B}$) je zákrytem (zjemněním) levého rozkladu vytvořeného podgrupou $\mathfrak{B}$ ($\mathfrak{A}$). Došli jsme k tomuto výsledku:

Levý rozklad grupy $\mathfrak{G}$ vytvořený podgrupou $\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{B}$) je zákrytem (zjemněním) levého rozkladu vytvořeného podgrupou $\mathfrak{B}$ ($\mathfrak{A}$) tehdy a jen tehdy, když podgrupa $\mathfrak{A}$ je nadgrupou na $\mathfrak{B}$. Jinými slovy, *vztah $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A} \geqq \mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}$ platí právě tehdy, když je $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$.*

21.4. Největší společné zjemnění dvou levých rozkladů

Nechť v grupě $\mathfrak{G}$ jsou dány dvě podgrupy $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$.

Ukážeme, že *největší společné zjemnění levých rozkladů grupy* $\mathfrak{G}$ *vytvořených podgrupami* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ *je levý rozklad vytvořený podgrupou* $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$, *tj.* $(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}, \mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}) = \mathfrak{G}/_l(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})$.

Vskutku, největší společné zjemnění rozkladů $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}, \mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}$ je systém všech neprázdných průniků vždy některé levé třídy $p\mathfrak{A}$ s některou levou třídou $q\mathfrak{B}$ (**3.5**). Každý neprázdný průnik $p\mathfrak{A} \cap q\mathfrak{B}$ je levou třídou každého prvku v něm ležícího vzhledem k podgrupě $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$. Každá levá třída $c(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})$ je průnikem levých tříd $c\mathfrak{A}, c\mathfrak{B}$ (**20.2.6**). Tím je důkaz proveden. (Srv. týž výsledek v odst. **21.2.**)

21.5. Nejmenší společný zákryt dvou levých rozkladů

Nechť jsou v grupě $\mathfrak{G}$ dány dvě *vzájemně zaměnitelné* podgrupy $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$.

Za této situace existuje součin $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ podgrup $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ a je podgrupou v $\mathfrak{G}$.

Ukážeme, *že nejmenší společný zákryt levých rozkladů grupy* $\mathfrak{G}$ *vytvořených podgrupami* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ *je levý rozklad vytvořený podgrupou* $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$. Jinak řečeno, *platí vzorec*: $[\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}, \mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}] = \mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}\mathfrak{B}$.

Vskutku, především se zřetelem na vztahy $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ a k větě v **21.3** vidíme, že rozklad $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ je společným zákrytem rozkladů $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}, \mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}$. Máme ukázat, že se dvě třídy $c\mathfrak{A}, p\mathfrak{A} \in \mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$ dají spojit v rozkladu $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}$ tehdy a jen tehdy, když leží v téže třídě rozkladu $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}\mathfrak{B}$.

a) Když levé třídy $c\mathfrak{A}, p\mathfrak{A}$ leží v téže třídě rozkladu $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, je $p = cba$, přičemž $b \in \mathfrak{B}$, $a \in \mathfrak{A}$ značí vhodné prvky. Vidíme, že obě třídy $c\mathfrak{A}, p\mathfrak{A}$ jsou incidentní s třídou $c\mathfrak{B} \in \mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}$. Tím je zjištěno, že se dají spojit v rozkladu $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}$.

b) Když existuje vazba v $\{\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}, \mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}\}$ od $c\mathfrak{A}$ do $p\mathfrak{A}$,

$$c_1\mathfrak{A}, \ldots, c_\alpha\mathfrak{A} \quad (c_1 = c,\ c_\alpha = p),$$

jsou každé dvě sousední třídy $c_\beta\mathfrak{A}, c_{\beta+1}\mathfrak{A}$ incidentní s jistou třídou $d_\beta\mathfrak{B}$, takže existují prvky $x_\beta \in c_\beta\mathfrak{A} \cap d_\beta\mathfrak{B}$, $y_\beta \in d_\beta\mathfrak{B} \cap c_{\beta+1}\mathfrak{A}$ $(\beta = 1, \ldots, \alpha - 1)$. Prvky $x_\gamma, y_{\gamma-1}$ $(\gamma = 1, \ldots, \alpha;\ y_0 = c_1,\ x_\alpha = c_\alpha)$ leží v téže třídě $c_\gamma\mathfrak{A}$ a podobně prvky x_β, y_β v téže třídě $d_\beta\mathfrak{B}$. Z toho soudíme, že platí vzorce $x_\gamma = y_{\gamma-1}a_\gamma$, $y_\beta = x_\beta b_\beta$, v nichž $a_\gamma \in \mathfrak{A}$, $b_\beta \in \mathfrak{B}$ značí vhodné prvky. Z těchto vzorců vychází $c_\alpha = c_1 a_1 b_1 \ldots b_{\alpha-1} a_\alpha \in c_1\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ a tím je zjištěno, že levé třídy $c\mathfrak{A}, p\mathfrak{A}$ leží v téže třídě $c\mathfrak{A}\mathfrak{B} \in \mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}\mathfrak{B}$.

21.6. Doplňkové levé rozklady

Vezměme v úvahu libovolné podgrupy $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \subset \mathfrak{G}$ v grupě $\mathfrak{G}$.

Ukážeme, že levé rozklady $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$, $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}$ grupy $\mathfrak{G}$ jsou doplňkové právě tehdy, když podgrupy $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ jsou vzájemně zaměnitelné.

Důkaz. a) Předpokládejme, že rozklady $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$, $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}$ jsou doplňkové. Budiž $\bar{u} \in [\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}, \mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}]$ prvek obsahující jednotku $\underline{1} \in \mathfrak{G}$. Ze vztahu $\underline{1} \in (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})$ vidíme, že pole podgrup $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ jsou částmi prvku $\bar{u}$. Vezměme v úvahu libovolné body $a \in \mathfrak{A}$, $b \in \mathfrak{B}$ a levé třídy $b\mathfrak{A} \in \mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$, $a^{-1}\mathfrak{B} \in \mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}$. Tyto levé třídy jsou incidentní s podgrupami $\mathfrak{B}$, popř. $\mathfrak{A}$, z čehož plyne, že jsou podmnožinami v prvku $\bar{u}$, tj. $b\mathfrak{A} \subset \bar{u}$, $a^{-1}\mathfrak{B} \subset \subset \bar{u}$. Protože však rozklady $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}$ jsou doplňkové, platí: $b\mathfrak{A} \cap a^{-1}\mathfrak{B} \neq \emptyset$. Odtud soudíme na existenci bodů $a' \in \mathfrak{A}$, $b' \in \mathfrak{B}$, vyznačujících se tím, že $ba' = a^{-1}b'$. Z této rovnosti plyne $ab = b'a'^{-1} \in \mathfrak{B}\mathfrak{A}$ a vychází vztah $\mathfrak{A}\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}\mathfrak{A}$. Obdobně se odvodí platnost vztahu $\mathfrak{B}\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}\mathfrak{B}$, takže máme $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}$.

b) Předpokládejme, že podgrupy $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ jsou vzájemně zaměnitelné.

Podle hořejší věty (**21.5**) je nejmenší společný zákryt rozkladů $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}$ rozklad $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}\mathfrak{B}$. Budiž $c\mathfrak{A}\mathfrak{B} \in \mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ libovolná třída. Každá třída rozkladu $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$ ležící v $c\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ je $cb\mathfrak{A}$, kde $b \in \mathfrak{B}$ značí vhodný prvek. Podobně každá třída rozkladu $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}$ ležící v $c\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ je $ca\mathfrak{B}$, kde $a \in \mathfrak{A}$ značí vhodný prvek. Máme ukázat, že každé dvě levé třídy $cb\mathfrak{A}$, $ca\mathfrak{B}$, ležící v $c\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, jsou incidentní, tj. že existují prvky $a_1 \in \mathfrak{A}$, $b_1 \in \mathfrak{B}$ vyhovující rovnosti $ba_1 = ab_1$. To je snadné: Protože podgrupy $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ jsou vzájemně zaměnitelné, existují prvky $a_1 \in \mathfrak{A}$, $b_1 \in \mathfrak{B}$, které hoví vztahu $a^{-1}b = b_1a_1^{-1}$ a tyto prvky splňují hořejší rovnost. Tím je důkaz proveden.

21.7. Vztahy mezi levými a pravými rozklady

Buďte $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ libovolné podgrupy v $\mathfrak{G}$.

1) *Levý (pravý) rozklad $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{G}/_p\mathfrak{A}$) se zobrazí rozšířenou inverzí* **n** *grupy $\mathfrak{G}$ na pravý (levý) rozklad $\mathfrak{G}/_p\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$), takže* $\mathbf{n}(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}) = \mathfrak{G}/_p\mathfrak{A}$, $\mathbf{n}(\mathfrak{G}/_p\mathfrak{A}) = \mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$. *Rozklady $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$, $\mathfrak{G}/_p\mathfrak{A}$ jsou tedy ekvivalentní množiny*: $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{G}/_p\mathfrak{A}$.

Důkaz. Podle **7.3.4** představuje množina $\mathbf{n}(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A})$ rozklad grupy $\mathfrak{G}$, ekvivalentní s $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$. Podle **20.2.8** je každý prvek rozkladu $\mathbf{n}(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A})$ prvkem v $\mathfrak{G}/_p\mathfrak{A}$. Odtud plyne rovnost: $\mathbf{n}(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}) = \mathfrak{G}/_p\mathfrak{A}$. Obdobně se odvodí: $\mathbf{n}(\mathfrak{G}/_p\mathfrak{A}) = \mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$.

2) Ukážeme, že *nejmenším společným zákrytem levého rozkladu $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$ a pravého rozkladu $\mathfrak{G}/_p\mathfrak{B}$ je množina skládající se ze všech komplexů $\mathfrak{B}p\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$ ($p \in \mathfrak{G}$). Rozklady $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$, $\mathfrak{G}/_p\mathfrak{B}$ jsou doplňkové.*

Důkaz. Ke každému bodu $p \in \mathfrak{G}$ přiřaďme komplex $\mathfrak{B}p\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$ a vezměme v úvahu množinu $\bar{C}$ skládající se ze všech těchto komplexů. Především vidíme, že každý bod v $\mathfrak{G}$ leží alespoň v jednom prvku množiny $\bar{C}$. Dále ukážeme, že dva různé prvky množiny $\bar{C}$ jsou disjunktní. Vskutku, když jsou některé prvky $\mathfrak{B}p\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}q\mathfrak{A} \subset \bar{C}$

incidentní, existují body $a, a' \in \mathfrak{A}$, $b, b' \in \mathfrak{B}$ takové, že $bpa = b'qa'$. Z této rovnosti plyne $(\mathfrak{B}b)\,p(a\mathfrak{A}) = (\mathfrak{B}b')\,q(a'\mathfrak{A})$ a dále (podle věty **20.2.**2 a obdobné věty pro pravé třídy) rovnost $\mathfrak{B}p\mathfrak{A} = \mathfrak{B}q\mathfrak{A}$. Vychází tedy, že množina $\bar{C}$ představuje rozklad grupy $\mathfrak{G}$. Dále, podle **20.3.**2 je každý prvek $\mathfrak{B}p\mathfrak{A} \in \bar{C}$ součtem všech prvků levého rozkladu $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$, incidentních s pravou třídou $\mathfrak{B}p$, a současně součtem všech prvků pravého rozkladu $\mathfrak{G}/_p\mathfrak{B}$, incidentních s levou třídou $p\mathfrak{A}$. Vidíme, že rozklad $\bar{C}$ grupy $\mathfrak{G}$ představuje společný zákryt rozkladů $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$, $\mathfrak{G}/_p\mathfrak{B}$. Budiž $\bar{u} = \mathfrak{B}p\mathfrak{A} \in \bar{C}$ libovolný prvek a $\bar{a} \in \mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$, $\bar{b} \in \mathfrak{G}/_p\mathfrak{B}$ libovolné třídy ležící v $\bar{u}$. Pak máme $\bar{a} = bp\mathfrak{A}$, $\bar{b} = \mathfrak{B}pa$, přičemž je $a \in \mathfrak{A}$, $b \in \mathfrak{B}$. Protože je $bpa \in \bar{a} \cap \bar{b}$, jsou třídy $\bar{a}$, $\bar{b}$ incidentní. Následkem toho podle **5.2**, máme: $\bar{C} = [\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}, \mathfrak{G}/_p\mathfrak{B}]$. Odtud vychází, že rozklady $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$, $\mathfrak{G}/_p\mathfrak{B}$ jsou doplňkové. Tím je důkaz ukončen.

Zejména pro $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$ docházíme k tomuto poznatku:

Pro každou podgrupu $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$ představuje množina složená z komplexů $\mathfrak{A}p\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$, kde $p \in \mathfrak{G}$, nejmenší společný zákryt levého a pravého rozkladu $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$, $\mathfrak{G}/_p\mathfrak{A}$ grupy $\mathfrak{G}$. Rozklady $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$, $\mathfrak{G}/_p\mathfrak{A}$ jsou doplňkové.

21.8. Cvičení

1. Pro každou abelovskou grupu $\mathfrak{G}$ platí, že na ní levý a pravý rozklad vzhledem k libovolné podgrupě $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$ splývají; tedy $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A} = \mathfrak{G}/_p\mathfrak{A}$.

2. Levý (a současně pravý) rozklad grupy $\mathfrak{Z}$ vzhledem k podgrupě $\mathfrak{A}$, která se skládá ze všech celých násobků některého přirozeného čísla n, je rozklad $\bar{Z}_n$ popsaný v odst. **15.2**.

3. Na vhodném příkladě ukažte, že levý rozklad grupy $\mathfrak{G}$ vzhledem k dané podgrupě $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$, nemusí splývat s pravým rozkladem.

4. Buďte $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ podgrupy v $\mathfrak{G}$. Vezměme v úvahu libovolné levé (pravé) třídy $\bar{a}_l$, $\bar{c}_l$ ($\bar{a}_p$, $\bar{c}_p$) vzhledem k podgrupě $\mathfrak{A}$ a označme:

$$\bar{A}_l = \bar{a}_l \sqcap \mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}\ (= \bar{a}_l \sqsubset \mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}), \quad \bar{C}_l = \bar{c}_l \sqcap \mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}\ (= \bar{c}_l \sqsubset \mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}),$$
$$\bar{A}_p = \bar{a}_p \sqcap \mathfrak{G}/_p\mathfrak{B}\ (= \bar{a}_p \sqsubset \mathfrak{G}/_p\mathfrak{B}), \quad \bar{C}_p = \bar{c}_p \sqcap \mathfrak{G}/_p\mathfrak{B}\ (= \bar{c}_p \sqsubset \mathfrak{G}/_p\mathfrak{B}).$$

Každý prvek rozkladu $\bar{A}_l$, popř. $\bar{C}_l$, představuje levou třídu a každý prvek rozkladu $\bar{A}_p$, popř. $\bar{C}_p$, pravou třídu vzhledem k podgrupě $\mathfrak{B}$. Mimoto platí ekvivalence: $\bar{A}_l \simeq \bar{C}_l$, $\bar{A}_p \simeq \bar{C}_p$.

5. Buďte $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ podgrupy v $\mathfrak{G}$. Vezměme v úvahu libovolné vzájemně inversní třídy $\bar{a} \in \mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$, $\bar{a}^{-1} \in \mathfrak{G}/_p\mathfrak{A}$ a na nich rozklady:

$$\bar{A}_l = \bar{a} \sqcap \mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}\ (= \bar{a} \sqsubset \mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}), \quad \bar{A}_p = \bar{a}^{-1} \sqcap \mathfrak{G}/_p\mathfrak{B}\ (= \bar{a}^{-1} \sqsubset \mathfrak{G}/_p\mathfrak{B}).$$

Každý z rozkladů $\bar{A}_l$, $\bar{A}_p$ se rozšířenou inverzí $\boldsymbol{n}$ grupy $\mathfrak{G}$ zobrazí na druhý. Rozklady $\bar{A}_l$, $\bar{A}_p$ představují ekvivalentní množiny, tedy: $\bar{A}_l \simeq \bar{A}_p$.

6. Za předpokladů a při označení uvedeném ve cvič. 4 platí ekvivalence: $\bar{A}_l \simeq \bar{C}_p$.

7. Budiž $p \in \mathfrak{G}$ libovolný prvek a $\mathring{\mathfrak{G}}$ přidružená p-grupa ke grupě $\mathfrak{G}$ (**19.7.11**). Dále budiž $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$ libovolná podgrupa v $\mathfrak{G}$ a $\mathring{\mathfrak{A}}_l \subset \mathring{\mathfrak{G}}$ ($\mathring{\mathfrak{A}}_p \subset \mathring{\mathfrak{G}}$) podgrupa v $\mathring{\mathfrak{G}}$ na poli $p\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}p$) (**20.3.**3). Ukažte, že levý (pravý) rozklad grupy $\mathring{\mathfrak{G}}$ vzhledem k podgrupě $\mathring{\mathfrak{A}}_l$ ($\mathring{\mathfrak{A}}_p$) splývá s levým (pravým) rozkladem grupy $\mathfrak{G}$ vzhledem k podgrupě $\mathfrak{A}$, tj.

$$\mathring{\mathfrak{G}}/_l\mathring{\mathfrak{A}}_l = \mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}, \quad \mathring{\mathfrak{G}}/_p\mathring{\mathfrak{A}}_p = \mathfrak{G}/_p\mathfrak{A}.$$