Základy teorie grupoidů a grup

25. Faktorové grupy

In: Otakar Borůvka (author): Základy teorie grupoidů a grup. (Czech). Praha: Nakladatelství Československé akademie věd, 1962. pp. 187--191.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401452

Terms of use:

© Akademie věd ČR

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

25. Faktorové grupy

25.1. Definice

Uvažujme nyní o libovolném faktoroidu $\overline{\mathfrak{G}}$ na grupě $\mathfrak{G}$. Podle definice faktoroidu je polem faktoroidu $\overline{\mathfrak{G}}$ jistý vytvořující rozklad grupy $\mathfrak{G}$ a je tedy vytvořen jistou podgrupou $\mathfrak{A}$, která je invariantní v $\mathfrak{G}$ (**24.3.2**). Podle definice násobení faktoroidu je součin $p\mathfrak{A} \,.\, q\mathfrak{A}$ libovolného prvku $p\mathfrak{A} \in \overline{\mathfrak{G}}$ s libovolným prvkem $q\mathfrak{A} \in \overline{\mathfrak{G}}$ onen prvek faktoroidu $\overline{\mathfrak{G}}$, který obsahuje množinu $p\mathfrak{A} \,.\, q\mathfrak{A}$. Protože tato množina splývá, jak jsme viděli, s prvkem $pq\mathfrak{A} \in \overline{\mathfrak{G}}$, máme pro násobení faktoroidu $\overline{\mathfrak{G}}$ tento vzorec:

(1) $$p\mathfrak{A} \circ q\mathfrak{A} = pq\mathfrak{A}\,.$$

Nyní ukážeme, že *faktoroid $\overline{\mathfrak{G}}$ je grupa, v níž jednotkou je pole invariantní podgrupy $\mathfrak{A}$ a prvek inverzní vzhledem k libovolnému prvku $a\mathfrak{A}$ je $a^{-1}\mathfrak{A}$.*

Skutečně, především podle **15.6.3** je $\overline{\mathfrak{G}}$ grupoid asociativní. Dále, podle **18.7.5**, je pole A invariantní podgrupy $\mathfrak{A}$ jednotkou grupoidu $\overline{\mathfrak{G}}$. Konečně máme tyto rovnosti:

$$p\mathfrak{A} \circ p^{-1}\mathfrak{A} = pp^{-1}\mathfrak{A} = \underline{1}\mathfrak{A} = A\,,$$

a z nich vidíme, že $p^{-1}\mathfrak{A} \in \overline{\mathfrak{G}}$ je inverzní prvek vzhledem k prvku $p\mathfrak{A} \in \overline{\mathfrak{G}}$.

Každý faktoroid $\overline{\mathfrak{G}}$ na grupě $\mathfrak{G}$ je tedy grupou a je jednoznačně určen jistou podgrupou $\mathfrak{A}$ invariantní v $\mathfrak{G}$, a to tím způsobem, že pole faktoroidu $\overline{\mathfrak{G}}$ je rozklad grupy $\mathfrak{G}$ vytvořený podgrupou $\mathfrak{A}$. Faktoroid $\overline{\mathfrak{G}}$ nazýváme *faktorová grupa* neboli *grupa tříd* a pravíme, že je *vytvořena invariantní podgrupou* $\mathfrak{A}$; označujeme ji symbolem $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$.

25.2. Faktoroidy na grupě

Na základě výsledku v odst. **24.3.2** máme tento přehled o všech možných faktoroidech na libovolné grupě $\mathfrak{G}$:

Všechny faktoroidy grupy $\mathfrak{G}$ jsou právě jenom faktorové grupy na $\mathfrak{G}$ vytvořené jednotlivými invariantními podgrupami v $\mathfrak{G}$.

Všimněme si, že *největším (nejmenším) faktoroidem na grupě $\mathfrak{G}$ je tzv. největší (nejmenší) faktorová grupa $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}$ $(\mathfrak{G}/\{\underline{1}\})$; je vytvořena největší (nejmenší) invariantní podgrupou v $\mathfrak{G}$, tj. podgrupou $\mathfrak{G}$ $(\{\underline{1}\})$.*

25.3. Vlastnosti faktorových grup

Vlastnosti faktorových grup plynou z vlastností vytvořujících rozkladů grupy (**24.4**).

Nechť $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$, $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ jsou libovolné faktorové grupy na grupě $\mathfrak{G}$.

Faktorová grupa $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$) *je zákrytem* (*zjemněním*) *faktorové grupy* $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ ($\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$) *tehdy a jen tehdy, když* $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$.

Největší společné zjemnění $(\mathfrak{G}/\mathfrak{A}, \mathfrak{G}/\mathfrak{B})$ *faktorových grup* $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$, $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ *je faktorová grupa* $\mathfrak{G}/(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})$.

Nejmenší společný zákryt $[\mathfrak{G}/\mathfrak{A}, \mathfrak{G}/\mathfrak{B}]$ *faktorových grup* $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$, $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ *je faktorová grupa* $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}\mathfrak{B}$.

Faktorové grupy $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$, $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ *jsou doplňkové.*

Na každé grupě je systém všech faktorových grup vzhledem k operacím ( ), [ ] *uzavřený a spolu s násobeními, v nichž je ke každé uspořádané dvojici faktorových grup přiřazeno jednou jejich největší společné zjemnění a po druhé nejmenší společný zákryt, představuje modulární svaz s krajními prvky. Těmito prvky jsou největší a nejmenší faktorová grupa.*

Zejména si všimněme, že *grupy patří ke grupoidům, které se vyznačují tím, že na nich jsou každé dva faktoroidy doplňkové.*

25.4. Faktorové grupy v grupách

1. *Průseky a obaly.* Buďte $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ libovolné podgrupy v $\mathfrak{G}$, přičemž podgrupa $\mathfrak{B}$ je invariantní v $\mathfrak{A}$.

Vezměme v úvahu faktoroidy $\mathfrak{A}/\mathfrak{B} \sqcap \mathfrak{C}$ a $\mathfrak{C} \sqsubset \mathfrak{A}/\mathfrak{B}$. Z odst. **24.5.1** víme, že podgrupy $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$ a $\mathfrak{B}$ jsou vzájemně zaměnitelné a dále, že podgrupa $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$ je v $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$ a podgrupa $\mathfrak{B}$ v $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\,\mathfrak{B}$ invariantní. Mimoto z oněch úvah vychází, že pole zmíněných faktoroidů jsou dána vytvořujícími rozklady $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})/_l(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C})$ a $(\mathfrak{A} \cap \cap\, \mathfrak{C})\,\mathfrak{B}/_l\mathfrak{B}$ (**21.2.1**).

Z těchto poznatků plynou vzorce

$$\mathfrak{A}/\mathfrak{B} \sqcap \mathfrak{C} = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})/(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}), \quad \mathfrak{C} \sqsubset \mathfrak{A}/\mathfrak{B} = (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\,\mathfrak{B}/\mathfrak{B}, \tag{1}$$

takže docházíme k tomuto výsledku:

Faktoroidy $\mathfrak{A}/\mathfrak{B} \sqcap \mathfrak{C}$ *a* $\mathfrak{C} \sqsubset \mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ *jsou faktorové grupy vyjádřené vzorci* (1).

Zejména (pro $\mathfrak{A} = \mathfrak{G}$) platí tato věta:

Buďte $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ *libovolné podgrupy v* $\mathfrak{G}$, *přičemž podgrupa* $\mathfrak{B}$ *je invariantní v* $\mathfrak{G}$. *Pak faktoroidy* $\mathfrak{G}/\mathfrak{B} \sqcap \mathfrak{C}$ *a* $\mathfrak{C} \sqsubset \mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ *představují faktorové grupy a platí vzorce:*

$$\mathfrak{G}/\mathfrak{B} \sqcap \mathfrak{C} = \mathfrak{C}/(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}), \quad \mathfrak{C} \sqsubset \mathfrak{G}/\mathfrak{B} = \mathfrak{C}\mathfrak{B}/\mathfrak{B}.$$

2. *Speciální věta o pěti grupách.* Vraťme se k situaci popsané v odst. **24.5.2**.

Vezměme v úvahu faktoroidy $\mathring{\mathfrak{A}}$, $\mathring{\mathfrak{C}}$ (**15.3.3**), jež jsou, jak víme, zákryty následujících faktorových grup, vynucené faktorovou grupou $\bar{\mathfrak{B}} = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})/\mathfrak{A}$:

$$(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\,\mathfrak{B}/\mathfrak{B} \sqcap (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\,\mathfrak{D} = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})/(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})\,.$$
$$(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\,\mathfrak{D}/\mathfrak{D} \sqcap (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\,\mathfrak{B} = (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})/(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D})\,.$$

Pole faktoroidů $\mathring{\mathfrak{A}}$, $\mathring{\mathfrak{C}}$ jsou dána (vytvořujícími) rozklady $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\,\mathfrak{B}/_l\mathfrak{U}\mathfrak{B}$ a $(\mathfrak{C} \cap \cap\, \mathfrak{A})\,\mathfrak{D}/_l\mathfrak{U}\mathfrak{D}$ (**24.5.2**).

Platí tedy vzorce:

$$\mathring{\mathfrak{A}} = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\,\mathfrak{B}/\mathfrak{U}\mathfrak{B}\,, \quad \mathring{\mathfrak{C}} = (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\,\mathfrak{D}/\mathfrak{U}\mathfrak{D}\,,$$

takže faktoroidy $\mathring{\mathfrak{A}}$, $\mathring{\mathfrak{C}}$ jsou faktorovými grupami vyjádřenými těmito vzorci.

Z odst. **15.3.3** víme, že faktorové grupy $\mathring{\mathfrak{A}}$, $\mathring{\mathfrak{C}}$ jsou spřažené a tedy též izomorfní (**16.1.2**).

Tím jsme došli k tzv. *speciální větě o pěti grupách*:

Buďte $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$, $\mathfrak{C} \supset \mathfrak{D}$ podgrupy v $\mathfrak{G}$, přičemž podgrupa $\mathfrak{B}$ je invariantní v $\mathfrak{A}$ a podgrupa $\mathfrak{D}$ má touž vlastnost v $\mathfrak{C}$. Pak jsou podgrupy $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}$, $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}$ invariantní v $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$. Dále buď $\mathfrak{U}$ invariantní podgrupa v $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$, taková, že platí

$$\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C} \supset \mathfrak{U} \supset (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D})\,(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})\,.$$

Za těchto předpokladů jsou podgrupy $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$ a $\mathfrak{U}$ zaměnitelné s každou podgrupou $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$ a podgrupa $\mathfrak{U}\mathfrak{B}$, popř. $\mathfrak{U}\mathfrak{D}$ je invariantní v $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\,\mathfrak{B}$, popř. v $(\mathfrak{C} \cap \cap\, \mathfrak{A})\,\mathfrak{D}$. Dále jsou podgrupy $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\,\mathfrak{B}/\mathfrak{U}\mathfrak{B}$ a $(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\,\mathfrak{D}/\mathfrak{U}\mathfrak{D}$ spřažené a tedy též izomorfní, takže máme:

$$(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\,\mathfrak{B}/\mathfrak{U}\mathfrak{B} \cong (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\,\mathfrak{D}/\mathfrak{U}\mathfrak{D}\,.$$

Zejména pro $(\mathfrak{U} = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D})\,(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}))$ platí tato tzv. *věta o čtyřech grupách* (H. ZASSENHAUS):

Buďte $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$, $\mathfrak{C} \supset \mathfrak{D}$ podgrupy v $\mathfrak{G}$, přičemž podgrupa $\mathfrak{B}$ je invariantní v $\mathfrak{A}$ a podgrupa $\mathfrak{D}$ v $\mathfrak{C}$. Pak jsou podgrupy $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}$, $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}$ invariantní v $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$. Dále jsou podgrupy $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$, $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}$ zaměnitelné s $\mathfrak{B}$ a podgrupy $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A}$, $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}$ s $\mathfrak{D}$. Mimoto je podgrupa $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D})\,\mathfrak{B}$ invariantní v $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\,\mathfrak{B}$ a podgrupa $(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})\,\mathfrak{D}$ v $(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\,\mathfrak{D}$. Faktorové grupy $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\,\mathfrak{B}/(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D})\,\mathfrak{B}$ a $(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\,\mathfrak{D}/(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})\,\mathfrak{D}$ jsou spřažené a tedy též izomorfní, takže máme:

$$(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\,\mathfrak{B}/(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D})\,\mathfrak{B} \simeq (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\,\mathfrak{D}/(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})\mathfrak{D}\,.$$

25.5. Další vlastnosti faktorových grup

1. *Vynucené zákryty faktorových grup.* Nechť $\mathfrak{B}$ značí libovolnou invariantní podgrupu v grupě $\mathfrak{G}$ a $\mathfrak{B}_1$ libovolnou invariantní podgrupu ve faktorové grupě $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$. Prvky podgrupy $\mathfrak{B}_1$ jsou tedy třídy vzhledem k invariantní podgrupě $\mathfrak{B}$ a mezi těmito

prvky je pole B invariantní podgrupy $\mathfrak{B}$, neboť B je, jak víme (**25.1**), jednotkou faktorové grupy $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ a je tedy prvkem každé podgrupy v grupě $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$. Součet všech prvků podgrupy $\mathfrak{B}_1$ je tedy jistá nadmnožina A na B, která obsahuje jednotku $\underline{1}$ grupy $\mathfrak{G}$, tedy $\underline{1} \in B \subset A$. Podgrupa $\mathfrak{B}_1$ vytvořuje na $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ faktorovou grupu $(\mathfrak{G}/\mathfrak{B})/\mathfrak{B}_1$ a jak víme z odst. **15.4.1**, vynucuje tato faktorová grupa jistý zákryt $\overline{\mathfrak{A}}$ faktorové grupy $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$. Připomeňme si, že $\overline{\mathfrak{A}}$ je faktoroid na grupě $\mathfrak{G}$ a každý jeho prvek je součtem všech prvků faktorové grupy $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$, které jsou obsaženy vždy v témž prvku faktorové grupy $(\mathfrak{G}/\mathfrak{B})/\mathfrak{B}_1$. Zejména je tedy množina A prvkem faktoroidu $\overline{\mathfrak{A}}$, a protože obsahuje jednotku $\underline{1}$ grupy $\mathfrak{G}$, je podle úvahy v odst. **24.3.2** polem jisté invariantní podgrupy $\mathfrak{A}$ v $\mathfrak{G}$ a faktoroid $\overline{\mathfrak{A}}$ je faktorová grupa $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$. Podgrupa $\mathfrak{B}$ je invariantní v $\mathfrak{A}$, neboť má tuto vlastnost dokonce v $\mathfrak{G}$, a je zřejmé, že platí rovnost $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{A}/\mathfrak{B}$.

Došli jsme k tomuto výsledku:

Zákryt faktorové grupy $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ vynucený faktorovou grupou $(\mathfrak{G}/\mathfrak{B})/\mathfrak{B}_1$ je faktorová grupa $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$, přičemž pole invariantní podgrupy $\mathfrak{A}$ v $\mathfrak{G}$ je součet všech prvků grupy $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$, z nichž se skládá invariantní podgrupa $\mathfrak{B}_1$ v $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$. Podgrupa $\mathfrak{B}_1$ je faktorová grupa $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$.

2. *Řady faktorových grup.* Vezměme v úvahu řadu faktoroidů $(\overline{\mathfrak{A}})$ na grupě $\mathfrak{G}$, a to:

$$((\overline{\mathfrak{A}}) =) \quad \overline{\mathfrak{A}}_1 \geqq \ldots \geqq \overline{\mathfrak{A}}_\alpha \quad (\alpha \geqq 1)\,.$$

Podle **25.2** představuje každý člen $\overline{\mathfrak{A}}_\gamma$ této řady faktorovou grupu $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}_\gamma$ grupy $\mathfrak{G}$. Tato faktorová grupa je vytvořena jistou podgrupou $\mathfrak{A}_\gamma$, invariantní v grupě $\mathfrak{G}$ $(\gamma = 1, \ldots, \alpha)$. Řada $(\overline{\mathfrak{A}})$ se tedy skládá z faktorových grup ležících na grupě $\mathfrak{G}$:

$$((\overline{\mathfrak{A}}) =) \, \mathfrak{G}/\mathfrak{A}_1 \geqq \ldots \geqq \mathfrak{G}/\mathfrak{A}_\alpha\,,$$

přičemž podgrupy $\mathfrak{A}_\gamma$ vytvářejí rovněž jistou řadu $(\mathfrak{A})$ (**25.3**):

$$((\mathfrak{A}) =) \quad \mathfrak{A}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{A}_\alpha\,.$$

Pravíme, že $(\overline{\mathfrak{A}})$ je *řada faktorových grup na grupě* $\mathfrak{G}$; označení: $(\mathfrak{G}/\mathfrak{A})$.

Teorie řad faktorových grup na grupě $\mathfrak{G}$ představuje zvláštní případ teorie řad faktoroidů, kterou jsme vyvinuli v kap. **17**. Nové v tomto případě je to, že se jisté situace, které bylo nutno v teorii řad faktoroidů postulovat, u řad faktorových grup vyskytují automaticky. Tím se tato nová teorie stává v porovnání s řadami faktoroidů jednodušší a průhlednější.

Zejména jsou každé dvě řady faktorových grup na grupě $\mathfrak{G}$ vzájemně doplňkové (**25.3**) a tedy platí (**17.6**; **25.3**) tato věta:

Buďte

$$((\mathfrak{G}/\mathfrak{A}) =) \quad \mathfrak{G}/\mathfrak{A}_1 \geqq \ldots \geqq \mathfrak{G}/\mathfrak{A}_\alpha\,,$$

$$((\mathfrak{G}/\mathfrak{B}) =) \quad \mathfrak{G}/\mathfrak{B}_1 \geqq \ldots \geqq \mathfrak{G}/\mathfrak{B}_\beta$$

libovolné řady faktorových grup na grupě $\mathfrak{G}$, o délkách $\alpha, \beta \geqq 1$. Řady $(\mathfrak{G}/\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{G}/\mathfrak{B})$ mají kobaziálně spjatá zjemnění $(\mathfrak{G}/\mathfrak{A}_*)$, $(\mathfrak{G}/\mathfrak{B}_*)$ se splývajícími počátečními a koncovými členy. Tato zjemnění $(\mathfrak{G}/\mathfrak{A}_*)$, $(\mathfrak{G}/\mathfrak{B}_*)$ jsou dána konstrukcí popsanou *v odst.* **17.6.** *Jejich členy* $\mathring{\mathfrak{A}}_{\gamma,\nu} = \mathfrak{G}/\mathfrak{A}_{\gamma,\nu}$, *popř.* $\mathring{\mathfrak{B}}_{\delta,\mu} = \mathfrak{G}/\mathfrak{B}_{\delta,\mu}$ *jsou faktorové grupy vytvořené invariantními podgrupami*

$$\mathfrak{A}_{\gamma,\nu} = \mathfrak{A}_\gamma(\mathfrak{A}_{\gamma-1} \cap \mathfrak{B}_\nu)\,(= \mathfrak{A}_{\gamma-1} \cap \mathfrak{A}_\gamma\mathfrak{B}_\nu)\,,$$

popř.

$$\mathfrak{B}_{\delta,\mu} = \mathfrak{B}_\delta(\mathfrak{B}_{\delta-1} \cap \mathfrak{A}_\mu)\,(= \mathfrak{B}_{\delta-1} \cap \mathfrak{B}_\gamma\mathfrak{A}_\mu)\,,$$

kde $\gamma, \mu = 1, 2, \ldots, \alpha + 1$; $\delta, \nu = 1, 2, \ldots, \beta + 1$ *a dále* $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{B}_0 = \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A}_{\alpha+1} = \mathfrak{B}_{\beta+1} = \mathfrak{A}_\alpha \cap \mathfrak{B}_\beta$.

25.6. Cvičení

1. Řád faktorové grupy na libovolné konečné grupě řádu N je dělitelem čísla N.

2. V úplné grupě euklidovských pohybů na přímce nebo v rovině je ona podgrupa, která se skládá ze všech euklidovských pohybů $\boldsymbol{f}[a]$ nebo $\boldsymbol{f}[\alpha; a, b]$, invariantní (**19.7.1**). Příslušná faktorová grupa má právě dva prvky: jeden se skládá ze všech euklidovských pohybů $\boldsymbol{f}[a]$ nebo $\boldsymbol{f}[\alpha; a, b]$, druhý pak z $\boldsymbol{g}[a]$ nebo $\boldsymbol{g}[\alpha; a, b]$.

3. Buďte $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$, $\mathfrak{C} \supset \mathfrak{D}$ podgrupy v $\mathfrak{G}$, přičemž podgrupa $\mathfrak{B}$ je invariantní v $\mathfrak{A}$ a podgrupa $\mathfrak{D}$ má touž vlastnost v $\mathfrak{C}$. V této situaci jsou faktorové grupy $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}/\mathfrak{D}$ adjungované vzhledem k podgrupám $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$ (**15.3.4**; **23.3**).

4. Každé dva řetězce faktorových grup v grupě $\mathfrak{G}$, od $\mathfrak{G}$ do $\{1\}$, mají izomorfní zjemnění. (*Věta* JORDANOVA-HÖLDEROVA-SCHREIEROVA) (viz **16.4.4**).