II. DISPERSIONSTHEORIE

Dieser Abschnitt II ist dem Ausbau der Theorie der sogenannten Dispersionen gewidmet. Dies sind gewisse Funktionen einer unabhängigen Veränderlichen, die bei Transformationen *oszillatorischer* Differentialgleichungen (q) auftreten und als Lösungen bestimmter nichtlinearer Differentialgleichungen 3. Ordnung definiert werden können. Die Dispersionen werden in sogenannte Zentraldispersionen und allgemeine Dispersionen eingeteilt. Die Kapitel 1 und 2 dieses Abschnittes sind den Zentraldispersionen, deren Theorie und Anwendung gewidmet, während sich das Kapitel 3 mit den allgemeinen Dispersionen befaßt.

A. THEORIE DER ZENTRALDISPERSIONEN

In der Theorie der Zentraldispersionen werden wir zum erstenmal in diesem Buche mit Transformationen linearer Differentialgleichungen 2. Ordnung in Berührung kommen (§ 13, Nr. 5). Aus diesem Grunde wollen wir an die Spitze dieses Kapitels das Transformationsproblem selbst stellen. Mag es an dieser Stelle vielleicht als isoliert erscheinen, so wird es im Laufe unserer Untersuchungen immer mehr in den Vordergrund rücken.

§ 11. Das Transformationsproblem

1. Historisches. Das Transformationsproblem für lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung stammt von dem deutschen Mathematiker E. E. KUMMER. Aus diesem Grunde werden wir gelegentlich von dem Kummerschen Transformationsproblem sprechen.

In seiner Abhandlung „*De generali quadam aequatione differentiali tertii ordinis*", die zunächst im Jahre 1834 in dem Programm des evangelischen Königl. und Stadtgymnasiums in Liegnitz veröffentlicht und später, im Jahre 1887, in dem J. reine angew. Math. (Vol. 100) neu abgedruckt wurde, befaßt sich KUMMER mit der nichtlinearen Differentialgleichung 3. Ordnung

$$2\frac{d^3z}{dz\,dx^2} - 3\left(\frac{d^2z}{dz\,dx}\right)^2 - Z\frac{dz^2}{dx^2} + X = 0. \tag{1}$$

Es dürfte vielleicht interessant sein, den Ausgangspunkt der Kummerschen Betrachtungen in Übersetzung seiner ursprünglichen Fassung wiederzugeben (l. c.):

„Zunächst bemerken wir, daß unsere Gleichung, die von der dritten Ordnung ist, auf zwei lineare Gleichungen zweiter Ordnung

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+qy=0, \tag{2}$$

$$\frac{d^2v}{dz^2}+P\frac{dv}{dz}+Qv=0, \tag{3}$$

in denen p und q Funktionen der Veränderlichen x, P und Q Funktionen der Größe z sind, zurückgeführt werden kann.

Dennoch werden wir unsere an sich schwierige Aufgabe klarer fassen, wenn wir umgekehrt aus den Gleichungen (2) und (3) die Gleichung (1) herleiten. Zu diesem Zweck betrachten wir z als eine Funktion der Größe x und nehmen an, daß der Wert $y = w \cdot v$, wobei w eine bestimmte Funktion der Veränderlichen x bezeichnet, die Gleichung (2) befriedige. Dann folgt durch Differentiation, indem das Differential dx konstant gehalten wird,

$$y = wv,$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dw}{dx}v+w\frac{dv}{dz}\frac{dz}{dx},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2w}{dx^2}v+2\frac{dw}{dx}\frac{dz}{dx}\frac{dv}{dz}+w\frac{d^2z}{dx^2}\frac{dv}{dz}+w\frac{dz^2}{dx^2}\frac{d^2v}{dz^2},$$

und wenn diese Werte in die Gleichung (2) eingesetzt werden, erhalten wir

$$w\frac{dz^2}{dx^2}\frac{d^2v}{dz^2}+\left(2\frac{dw}{dx}\frac{dz}{dx}+w\frac{d^2z}{dx^2}+pw\frac{dz}{dx}\right)\frac{dv}{dz}+\left(\frac{d^2w}{dx^2}+p\frac{dw}{dx}+qw\right)v=0. \tag{4}$$

Diese in bezug auf die Größe v lineare Gleichung zweiter Ordnung muß mit der Gleichung (3), die von derselben Form ist, identisch sein; dies wird ausgedrückt, wenn wir

$$2\frac{dw}{dx}\frac{dz}{dx}+w\frac{d^2z}{dx^2}+pw\frac{dz}{dx}-Pw\frac{dz^2}{dx^2}=0, \tag{5}$$

$$\frac{d^2w}{dx^2}+p\frac{dw}{dx}+\left(q-Q\frac{dz^2}{dx^2}\right)w=0. \tag{6}$$

setzen.

Aus diesen Gleichungen (5) und (6) folgt durch Elimination der Veränderlichen w und ihrer Differentialquotienten die Gleichung dritter Ordnung

$$2\frac{d^3z}{dz\,dx^2}-3\left(\frac{d^2z}{dz\,dx}\right)^2-\left(2\frac{dP}{dz}+P^2-4Q\right)\frac{dz^2}{dx^2}+\left(2\frac{dp}{dx}+p^2-4q\right)=0, \tag{7}$$

die für

$$2\frac{dP}{dz}+P^2-4Q=Z;\quad Q=\frac{1}{4}\left(2\frac{dP}{dz}+P^2-Z\right), \tag{8}$$

$$2\frac{dp}{dx}+p^2-4q=X;\quad q=\frac{1}{4}\left(2\frac{dp}{dx}+p^2-X\right) \tag{9}$$

in unsere Gleichung übergeht.

Wir finden also, daß die Gleichung (1) die notwendige zwischen den Veränderlichen z und x bestehende Beziehung ausdrückt, damit $y = wv$ ein Integral der Gleichung (2) sei, falls die Größen y und v vermöge der Gleichungen (2) und (3) und q und Q vermöge der Gleichungen (8) und (9) bestimmt sind.

Ferner wird die Größe w, die wir Multiplikator nennen wollen, aus der Gleichung (5) gefunden; diese letztere ergibt durch Division durch $\frac{dz}{dx} w$ (womit die drei Veränderlichen w, z und x separiert werden) und durch Integration die Formel

$$w^2 = c \cdot e^{\int P dz} \cdot e^{-\int p dz} \cdot \frac{dx}{dz}; \tag{10}$$

e bezeichnet die Basis der natürlichen Logarithmen und c eine beliebige Konstante.“

2. Formulierung des Transformationsproblems. Das Transformationsproblem, mit dem wir uns zu befassen haben, ist folgendes:

Es seien zwei lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung

$$y'' = q(t)\, y, \tag{q}$$

$$\ddot{Y} = Q(T)\, Y \tag{Q}$$

in den (offenen) beschränkten oder unbeschränkten Intervallen $j = (a, b)$, $J = (A, B)$ gegeben. Wir setzen voraus, daß die Träger q, Q dieser Differentialgleichungen in ihren Definitionsintervallen j, J stetig sind.

Unter einer *Transformation* der Differentialgleichung (Q) in die Differentialgleichung (q) verstehen wir eine zweigliedrige Folge $[w, X]$ von Funktionen $w(t)$, $X(t)$, die in einem (offenen) Intervall $i \subset j$ definiert und so beschaffen sind, daß für jedes Integral Y der Differentialgleichung (Q) die Funktion

$$y(t) = w(t) \cdot Y[X(t)] \tag{11}$$

eine Lösung der Differentialgleichung (q) ist.

Von den Funktionen w, X wird vorausgesetzt:

1. $w \in C_2$, $\quad X \in C_3$;
2. $wX' \neq 0$ für alle $t \in i$;
3. $X(i) \subset J$.

Die Funktion X nennen wir *transformierende Funktion* der Differentialgleichungen (q), (Q) (man beachte die Anordnung!), kürzer: Transformierende; wir nennen sie gelegentlich auch den *Kern der Transformation* $[w, X]$.

Die Funktion w wird als der *Multiplikator* der Transformation $[w, X]$ bezeichnet.

In diesen Definitionen ist natürlich auch der Begriff einer Transformation der Differentialgleichung (q) in die Differentialgleichung (Q) enthalten.

Das eingangs erwähnte Transformationsproblem kann nun wie folgt formuliert werden:

Es sollen alle gegenseitigen Transformationen der Differentialgleichungen (q), (Q) *bestimmt und ihre Eigenschaften beschrieben werden.*

Ist $[w, X]$ eine Transformation der Differentialgleichung (Q) in die Differentialgleichung (q) und Y ein Integral von (Q), so wird die im Intervall $i \subset j$ vermöge der Formel (11) definierte Lösung von (q) als das *Bild* und das dieses Bild als Teil enthaltende Integral der Differentialgleichung (q) als das *Bildintegral* von Y in der Transformation $[w, X]$ bezeichnet; kürzer: Bild bzw. Bildintegral von Y.

Die obigen Untersuchungen von E. E. Kummer ergeben (Formeln (7) und (10) für $p = P = 0$ und $t, T, -q, -Q$ an Stelle von x, z, q, Q):

Jede transformierende Funktion X der Differentialgleichungen (q), (Q) *ist in ihrem Definitionsintervall i eine Lösung der nichtlinearen Differentialgleichung 3. Ordnung:*

$$-\{X, t\} + Q(X)\, X'^2 = q(t). \tag{Qq}$$

Der Multiplikator w jeder Transformation $[w, X]$ der Differentialgleichungen (q), (Q) *ist durch ihren Kern X bis auf eine multiplikative Konstante k ($\neq 0$) eindeutig bestimmt:*

$$w(t) = \frac{k}{\sqrt{|X'(t)|}}. \tag{12}$$

§ 12. Einleitung in die Theorie der Zentraldispersionen

Wir werden nun gewisse Funktionen einer unabhängigen Veränderlichen, die wir Zentraldispersionen von der 1., 2., 3., 4. Art nennen, untersuchen. Die Zentraldispersionen von der $\varkappa$-ten Art ($\varkappa = 1, 2, 3, 4$) kommen nur bei Differentialgleichungen mit $\varkappa$-konjugierten Zahlen in Betracht. Zwecks Vereinfachung unserer Untersuchungen wollen wir weiter in diesem Kapitel stets voraussetzen, daß die betrachteten Differentialgleichungen (q) konjugierte Zahlen von allen vier Arten zulassen. Außerdem nehmen wir an, daß die betrachteten Träger q in ihren Definitionsintervallen stets negativ sind: $q < 0$. Diese Annahme kommt bei Betrachtungen von konjugierten Zahlen 1. Art nicht zur Geltung.

1. Vorbereitung. Wir betrachten eine Differentialgleichung (q), $t \in j = (a, b)$. Nach unserer Voraussetzung läßt die Differentialgleichung (q) konjugierte Zahlen von allen vier Arten zu; außerdem haben wir $q < 0$ für alle $t \in j$.

Nach § 3, Nr. 11 bilden bei jeder Art $\varkappa$ ($= 1, 2, 3, 4$) diejenigen Zahlen $t \in j$, zu denen die ν-te linksseitig bzw. rechtsseitig $\varkappa$-konjugierte Zahl existiert, ein offenes Intervall $i_{\varkappa,\nu}$ bzw. $j_{\varkappa,\nu}$; $\nu = 1, 2, \ldots$ Diese Intervalle $i_{\varkappa,\nu}$, $j_{\varkappa,\nu}$ haben wir a. a. O. ausführlich beschrieben. Wir wissen, daß jedes Intervall $i_{\varkappa,\nu}$, $j_{\varkappa,\nu}$ ein Teilintervall von j ist. Ferner erinnern wir an folgendes: Ist die Differentialgleichung (q) links- bzw. rechtsseitig oszillatorisch, so fallen alle Intervalle $i_{\varkappa,\nu}$ bzw. $j_{\varkappa,\nu}$ mit j zusammen; ist die Differentialgleichung (q) oszillatorisch, so sind alle Intervalle $i_{\varkappa,\nu}$, $j_{\varkappa,\nu}$ gleich j ($\varkappa = 1, 2, 3, 4$; $\nu = 1, 2, \ldots$).

2. Definition der Zentraldispersionen. Es sei $\varkappa$ eine der Zahlen 1, 2, 3, 4. Ferner sei $n_\varkappa$ ($= n$) eine natürliche Zahl; wir nehmen an, es gäbe im Intervall j Zahlen, zu denen die n-te rechts- bzw. linksseitig $\varkappa$-konjugierte Zahl existiert. Die ersteren bilden also das Intervall $j_{\varkappa,n}$ bzw. $i_{\varkappa,n}$. Ist z. B. die Differentialgleichung (q) von endlichem Typus (m), $m \geqq 2$, so ist $n_1 \leqq m$.

1. Es sei $\varkappa = 1$. Wir definieren im Intervall $j_{1,n}$ $(i_{1,n})$ die Funktion φ_n (φ_{-n}) wie folgt:

Für $t \in j_{1,n}$ $(t \in i_{1,n})$ ist $\varphi_n(t)$ $(\varphi_{-n}(t))$ die n-te mit t rechtsseitig (linksseitig) konjugierte Zahl 1. Art.

$\varphi_n(t)$ $(\varphi_{-n}(t))$ ist also die n-te rechts (links) von t liegende Nullstelle eines jeden an der Stelle t verschwindenden Integrals der Differentialgleichung (q).

Wir nennen die Funktion φ_n (φ_{-n}) die *n-te ($-n$-te) Zentraldispersion 1. Art* oder die *1-Zentraldispersion mit dem Index n ($-n$)*. Für $n = 1$ sprechen wir von der *Fundamentaldispersion 1. Art.* Die Fundamentaldispersion 1. Art, φ_1, ist also im Intervall $j_{1,1}$ definiert, und ihr Wert $\varphi_1(t)$ stellt die erste nach t folgende Nullstelle eines jeden an der Stelle t verschwindenden Integrals der Differentialgleichung (q) dar.

2. Es sei $\varkappa = 2$. Wie definieren im Intervall $j_{2,n}$ $(i_{2,n})$ die Funktion ψ_n (ψ_{-n}) wie folgt:

Für $t \in j_{2,n}$ $(t \in i_{2,n})$ ist $\psi_n(t)$ $(\psi_{-n}(t))$ die n-te mit t rechtsseitig (linksseitig) konjugierte Zahl 2. Art.

$\psi_n(t)$ $(\psi_{-n}(t))$ ist also die n-te rechts (links) von t liegende Nullstelle der Ableitung eines jeden Integrals der Differentialgleichung (q), dessen Ableitung an der Stelle t verschwindet.

Wir nennen die Funktion ψ_n (ψ_{-n}) die *n-te ($-n$-te) Zentraldispersion 2. Art*, oder: die *2-Zentraldispersion mit dem Index n ($-n$)*. Für $n = 1$ sprechen wir von der *Fundamentaldispersion 2. Art.* Die Fundamentaldispersion 2. Art, ψ_1, ist also im Intervall $j_{2,1}$ definiert, und ihr Wert $\psi_1(t)$ stellt die erste nach t folgende Nullstelle der Ableitung eines jeden Integrals der Differentialgleichung (q), dessen Ableitung an der Stelle t verschwindet, dar.

Man sieht: *Wenn die Differentialgleichung* (q) *die begleitende Differentialgleichung* $(\hat{q}_1)$ *zuläßt, so fallen die 2-Zentraldispersionen von* (q) *mit den 1-Zentraldispersionen von* $(\hat{q}_1)$ *zusammen.*

3. Es sei $\varkappa = 3$. Wir definieren im Intervall $j_{3,n}$ $(i_{3,n})$ die Funktionen χ_n (χ_{-n}) wie folgt:

Für $t \in j_{3,n}$ $(t \in i_{3,n})$ ist $\chi_n(t)$ $(\chi_{-n}(t))$ die n-te mit t rechtsseitig (linksseitig) konjugierte Zahl 3. Art.

$\chi_n(t)$ $(\chi_{-n}(t))$ ist also die n-te rechts (links) von t liegende Nullstelle der Ableitung eines jeden an der Stelle t verschwindenden Integrals der Differentialgleichung (q).

Wir nennen die Funktion χ_n (χ_{-n}) die *n-te ($-n$-te) Zentraldispersion 3. Art* oder die *3-Zentraldispersion mit dem Index n ($-n$)*. Für $n = 1$ sprechen wir von der *Fundamentaldispersion 3. Art.* Die Fundamentaldispersion 3. Art, χ_1, ist also im Intervall $j_{3,1}$ definiert, und ihr Wert $\chi_1(t)$ stellt die erste nach t folgende Nullstelle der Ableitung eines jeden an der Stelle t verschwindenden Integrals der Differentialgleichung (q) dar.

4. Schließlich sei $\varkappa = 4$. Wir definieren im Intervall $j_{4,n}$ $(i_{4,n})$ die Funktion ω_n (ω_{-n}) wie folgt:

Für $t \in j_{4,n}$ $(t \in i_{4,n})$ ist $\omega_n(t)$ $(\omega_{-n}(t))$ die n-te mit t rechtsseitig (linksseitig) konjugierte Zahl 4. Art.

$\omega_n(t)$ $(\omega_{-n}(t))$ ist also die n-te rechts (links) von t liegende Nullstelle eines jeden Integrals der Differentialgleichung (q), dessen Ableitung an der Stelle t verschwindet.

Wir nennen die Funktion ω_n (ω_{-n}) die n-te $(-n$-te) *Zentraldispersion 4. Art* oder die *4-Zentraldispersion mit dem Index* n $(-n)$. Für $n = 1$ sprechen wir von der *Fundamentaldispersion 4. Art.* Die Fundamentaldispersion 4. Art, ω_1, ist also im Intervall $j_{4,1}$ definiert, und ihr Wert $\omega_1(t)$ stellt die erste nach t folgende Nullstelle eines jeden Integrals der Differentialgleichung (q), dessen Ableitung an der Stelle t verschwindet, dar.

Die Benennung der Zentraldispersionen soll auf die Verteilung (Dispersion) der Nullstellen von Integralen der Differentialgleichung (q) und deren Ableitungen erinnern; das Attribut „Zentral" deutet auf gewisse mit dem gruppentheoretischen Begriff des Zentrums zusammenhängende Eigenschaften der Zentraldispersionen 1. und 2. Art hin (§ 21, Nr. 6,4., Nr. 7).

3. Zentraldispersionen oszillatorischer Differentialgleichungen (q). Die Zentraldispersionen, die wir soeben definiert haben, sind je nach Art und Index in verschiedenen Intervallen, die im allgemeinen echte Teilintervalle von j dar-

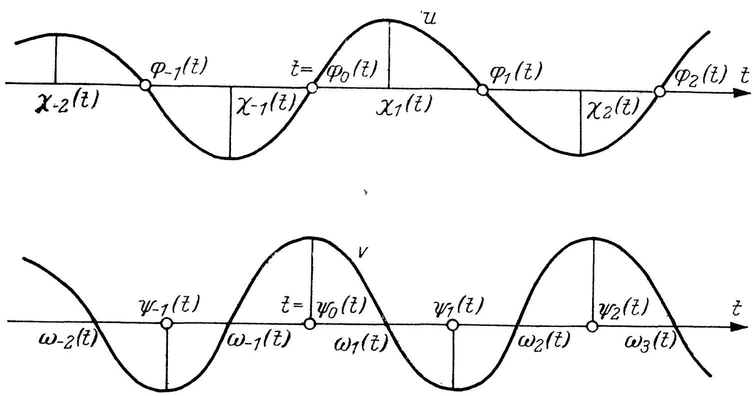

Abb. 3

stellen, erklärt. Wenn die Differentialgleichung (q) oszillatorisch ist, so fallen die Definitionsintervalle aller Zentraldispersionen mit j zusammen. Wegen dieser Vereinfachung wollen wir uns im folgenden nur mit oszillatorischen Differentialgleichungen (q) befassen.

Im folgenden setzen wir also voraus: Die Differentialgleichung (q) ist oszillatorisch in ihrem Definitionsintervall $j = (a, b)$. Außerdem gilt $q < 0$ für alle $t \in j$.

In diesem Fall haben die Integrale der Differentialgleichung (q) unendlich viele Nullstellen, die sich gegen a und b häufen. Ferner sind im Intervall j vier abzählbare Systeme von Zentraldispersionen, und zwar Systeme von den Zentraldispersionen 1., 2., 3., 4. Art $\varphi_\nu, \psi_\nu, \chi_\nu, \omega_\nu$; $\nu = \pm 1, \pm 2, \ldots$, erklärt. Zusätzlich wollen wir die nullten Zentraldispersionen 1. und 2. Art im Sinne der folgenden Formeln einführen: $\varphi_0(t) = t$, $\psi_0(t) = t$ für $t \in j$.

Nach den obigen Definitionen stellen die Werte der Zentraldispersionen an jeder beliebigen Stelle $t \in j$ die Nullstellen von Integralen der Differentialgleichung (q) oder deren Ableitungen dar, und zwar von Integralen, die selbst oder deren Ableitungen an der Stelle t verschwinden. Siehe Abb. 3.

4. Beziehungen zwischen den Zentraldispersionen. Offenbar bestehen an jeder Stelle $t \in j$ die folgenden Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} \cdots < \chi_{-2}(t) < \varphi_{-1}(t) < \chi_{-1}(t) < t < \chi_1(t) < \varphi_1(t) < \chi_2(t) < \cdots, \\ \cdots < \omega_{-2}(t) < \psi_{-1}(t) < \omega_{-1}(t) < t < \omega_1(t) < \psi_1(t) < \omega_2(t) < \cdots. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

In unseren weiteren Betrachtungen benutzen wir oft folgende Bezeichnungen:

Für zwei im Intervall j definierte Funktionen f, g bezeichnen wir mit fg die zusammengesetzte Funktion $f[g(t)]$. f^{-1} soll die zu f inverse Funktion bedeuten, sofern diese existiert. Ist ν eine ganze Zahl, so bedeutet f^ν die ν-mal oder $-\nu$-mal iterierte Funktion f oder f^{-1}, je nachdem, ob $\nu > 0$ oder $\nu < 0$ ist, also: $\underbrace{ff\cdots f}_{\nu}$ oder $\underbrace{f^{-1}f^{-1}\cdots f^{-1}}_{-\nu}$; außerdem setzen wir $f^0 = t$.

Ferner sei Φ bzw. Ψ, X, Ω die Menge aller Zentraldispersionen von der 1. bzw. 2., 3., 4. Art und Γ die Vereinigung aller dieser Mengen: $\Gamma = \Phi \vee \Psi \vee X \vee \Omega$.

Zwischen den Zentraldispersionen derselben Art und denjenigen verschiedener Arten bestehen gewisse Beziehungen, die durch Zusammensetzung dieser Funktionen erklärt sind. Wir wollen diese Beziehungen in der folgenden „Multiplikationstafel" schematisch deuten:

	Φ	Ψ	X	Ω	
Φ	Φ	—	—	Ω	
Ψ	—	Ψ	X	—	
X	X	—	—	Ψ	
Ω	—	Ω	Φ	—	

Diese Tafel hat folgende Bedeutung: Die Zusammensetzung von zwei Zentraldispersionen $a \in A$, $b \in B$ (A, B stellen je eine der Mengen Φ, Ψ, X, Ω dar) ergibt entweder keine Zentraldispersion oder eine Zentraldispersion ab aus der im Schnittpunkt der A-Zeile und B-Spalte stehenden Menge C: $ab \in C$.

Wir wollen nun die erwähnten Beziehungen genau angeben.

Es seien μ, ν und $\varrho \neq 0$, $\sigma \neq 0$ beliebige ganze Zahlen.

1. $\varphi_\mu \varphi_\nu = \varphi_{\mu+\nu}$.

Aus dieser Beziehung folgt

$$\left.\begin{aligned} \varphi_0\varphi_\nu = \varphi_\nu\varphi_0 = \varphi_\nu, \quad \varphi_\nu\varphi_{-\nu} = \varphi_0\,(= t), \\ \varphi_1\varphi_\nu = \varphi_\nu\varphi_1 = \varphi_{\nu+1}, \quad \varphi_\nu = \varphi_1^\nu. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

2. $\psi_\mu \psi_\nu = \psi_{\mu+\nu}$.

Daraus folgt

$$\left.\begin{aligned} \psi_0\psi_\nu = \psi_\nu\psi_0 = \psi_\nu, \quad \psi_\nu\psi_{-\nu} = \psi_0\,(= t). \\ \psi_1\psi_\nu = \psi_\nu\psi_1 = \psi_{\nu+1}, \quad \psi_\nu = \psi_1^\nu. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

$$3.\ \varphi_\nu\omega_\varrho = \begin{cases} \omega_{\nu+\varrho} & \text{für } \varrho > 0,\ \nu \geqq -\varrho+1 \text{ und für } \varrho < 0,\ \nu \leqq -\varrho-1; \\ \omega_{\nu+\varrho-1} & \text{für } \varrho > 0,\ \nu \leqq -\varrho; \\ \omega_{\nu+\varrho+1} & \text{für } \varrho < 0,\ \nu \geqq -\varrho. \end{cases}$$

$$4.\ \psi_\nu\chi_\varrho = \begin{cases} \chi_{\nu+\varrho} & \text{für } \varrho > 0,\ \nu \geqq -\varrho+1 \text{ und für } \varrho < 0,\ \nu \leqq -\varrho-1; \\ \chi_{\nu+\varrho-1} & \text{für } \varrho > 0,\ \nu \leqq -\varrho; \\ \chi_{\nu+\varrho+1} & \text{für } \varrho < 0,\ \nu \geqq -\varrho. \end{cases}$$

$$5.\ \chi_\varrho\varphi_\nu = \begin{cases} \chi_{\varrho+\nu} & \text{für } \varrho > 0,\ \nu \geqq -\varrho+1 \text{ und für } \varrho < 0,\ \nu \leqq -\varrho-1; \\ \chi_{\varrho+\nu-1} & \text{für } \varrho > 0,\ \nu \leqq -\varrho; \\ \chi_{\varrho+\nu+1} & \text{für } \varrho < 0,\ \nu \geqq -\varrho. \end{cases}$$

$$6.\ \omega_\varrho\psi_\nu = \begin{cases} \omega_{\varrho+\nu} & \text{für } \varrho > 0,\ \nu \geqq -\varrho+1 \text{ und für } \varrho < 0,\ \nu \leqq -\varrho-1; \\ \omega_{\varrho+\nu-1} & \text{für } \varrho > 0,\ \nu \leqq -\varrho; \\ \omega_{\varrho+\nu+1} & \text{für } \varrho < 0,\ \nu \geqq -\varrho. \end{cases}$$

$$7.\ \chi_\varrho\omega_\sigma = \begin{cases} \psi_{\varrho+\sigma} & \text{für } \varrho > 0,\ \sigma < 0 \text{ und für } \varrho < 0,\ \sigma > 0; \\ \psi_{\varrho+\sigma-1} & \text{für } \varrho > 0,\ \sigma > 0; \\ \psi_{\varrho+\sigma+1} & \text{für } \varrho < 0,\ \sigma < 0. \end{cases}$$

Insbesondere haben wir für $\sigma = -\varrho$

$$\chi_\varrho\omega_{-\varrho} = \psi_0\ (= t). \tag{4}$$

$$8.\ \omega_\varrho\chi_\sigma = \begin{cases} \varphi_{\varrho+\sigma} & \text{für } \varrho > 0,\ \sigma < 0 \text{ und für } \varrho < 0,\ \sigma > 0; \\ \varphi_{\varrho+\sigma-1} & \text{für } \varrho > 0,\ \sigma > 0; \\ \varphi_{\varrho+\sigma+1} & \text{für } \varrho < 0,\ \sigma < 0. \end{cases}$$

Insbesondere haben wir für $\sigma = -\varrho$

$$\omega_\varrho\chi_{-\varrho} = \varphi_0\ (= t). \tag{5}$$

Von den obigen Beziehungen wollen wir hier die folgenden hervorheben:

$$\varphi_\nu\varphi_{-\nu} = t, \quad \psi_\nu\psi_{-\nu} = t, \quad \chi_\varrho\omega_{-\varrho} = t, \quad \omega_\varrho\chi_{-\varrho} = t \tag{6}$$

und ferner

$$\left.\begin{aligned} \varphi_n &= \varphi_1\varphi_{n-1}, & \psi_n &= \psi_1\psi_{n-1}, & \chi_n &= \chi_1\varphi_{n-1}, & \omega_n &= \omega_1\psi_{n-1}, \\ \varphi_{-n} &= \varphi_{-1}\varphi_{-n+1}, & \psi_{-n} &= \psi_{-1}\psi_{-n+1}, & \chi_{-n} &= \chi_1\varphi_{-n}, & \omega_{-n} &= \omega_1\psi_{-n} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

und

$$\left.\begin{gathered} \varphi_n = \varphi_1^n, \quad \psi_n = \psi_1^n, \quad \chi_n = \chi_1\varphi_1^{n-1} = \psi_1^{n-1}\chi_1, \\ \omega_n = \omega_1\psi_1^{n-1} = \varphi_1^{n-1}\omega_1, \\ \varphi_{-n} = \varphi_{-1}^n, \quad \psi_{-n} = \psi_{-1}^n, \quad \chi_{-n} = \chi_{-1}\varphi_{-1}^{n-1} = \psi_{-1}^{n-1}\chi_{-1}, \\ \omega_{-n} = \omega_{-1}\psi_{-1}^{n-1} = \varphi_{-1}^{n-1}\,\omega_{-1} \\ (n = 1, 2, \ldots). \end{gathered}\right\} \tag{8}$$

Die Formeln (6) zeigen:

Zu jeder Zentraldispersion gibt es eine Zentraldispersion als die zu ihr inverse Funktion, und zwar stellen die folgenden Zentraldispersionen die zueinander inversen Funktionen dar: $\varphi_\nu, \varphi_{-\nu}$; $\psi_\nu, \psi_{-\nu}$; $\chi_\varrho, \omega_{-\varrho}$; $\omega_\varrho, \chi_{-\varrho}$.

Aus (8) folgt, daß sich jede Zentraldispersion aus den Fundamentaldispersionen und den zu ihnen inversen Funktionen zusammensetzen läßt.

5. Algebraische Struktur der Menge der Zentraldispersionen. In der Menge $\Gamma = \Phi \vee \Psi \vee X \vee \Omega$ wollen wir eine binäre Multiplikation (Verknüpfungsregel) einführen, und zwar vermöge Zusammensetzung von Funktionen. Dann haben, wie aus der obigen Tafel ersichtlich ist, gewisse zweigliedrige Folgen von Zentraldispersionen $a \in A$, $b \in B$ (A, B stellen je eine der Mengen Φ, Ψ, X, Ω dar) das Produkt $ab = c \in \Gamma$, während andere zweigliedrige Folgen von Zentraldispersionen kein in der Menge Γ enthaltenes Produkt besitzen. Die Menge Γ zusammen mit dieser Multiplikation bildet ein algebraisches Gebilde, ein sogenanntes *Halbgruppoid.*

Aus den Formeln (6), (8) sehen wir: Die Menge Φ (zusammen mit der betrachteten Multiplikation) bildet eine unendliche zyklische Gruppe mit dem erzeugenden Element φ_1. Das Einselement $\underline{1}$ der Gruppe Φ ist das Element φ_0 $(= t)$. Für jede ganze Zahl ν stellen die Zentraldispersionen φ_ν und $\varphi_{-\nu}$ zwei zueinander inverse Elemente der Gruppe Φ dar.

Ähnlich verhält sich die Menge Ψ: Die Menge Ψ bildet eine unendliche zyklische Gruppe mit dem erzeugenden Element ψ_1. Das Einselement $\underline{1}$ der Gruppe Ψ ist φ_0 $(= t)$ und stimmt also mit demjenigen der Gruppe Φ überein. Für jede ganze Zahl ν stellen ψ_ν und $\psi_{-\nu}$ zwei zueinander inverse Elemente der Gruppe Ψ dar.

Die Gruppen Φ, Ψ haben also das Einselement $\underline{1}$ gemeinsam.

Ferner ergeben die Formeln (6): Jede der beiden Mengen X, Ω besteht aus Elementen, die zu den Elementen der anderen invers sind. Man sieht, daß je zwei Elemente $\chi_\varrho \in X$ und $\omega_{-\varrho} \in \Omega$ zueinander invers sind, d. h., bei Multiplikation das Einselement ergeben: $\chi_\varrho \omega_{-\varrho} = \omega_{-\varrho} \chi_\varrho = \underline{1}$.

Offenbar haben die Mengen X, Ω mit den Gruppen Φ, Ψ keine gemeinsamen Elemente.

Wir fassen zusammen:

Das Halbgruppoid Γ besteht aus zwei unendlichen zyklischen Gruppen Φ, Ψ, die das Einselement $\underline{1} = t$ gemeinsam haben, und ferner aus zwei mit diesen Gruppen disjunkten abzählbaren Mengen X, Ω, deren Elemente paarweise zueinander invers sind. Im übrigen ist die Multiplikation im Halbgruppoid Γ durch die in Nr. 4 *angeführten Formeln beschrieben.*

§ 13. Eigenschaften der Zentraldispersionen

In diesem Paragraphen werden wir einige elementare Eigenschaften der Zentraldispersionen, insbesondere ihren Verlauf, Stetigkeit und andere Eigenschaften, die mit der Existenz von Ableitungen der Zentraldispersionen zusammenhängen, untersuchen.

1. Monotonie und Stetigkeit. 1. *Der Wertevorrat jeder Zentraldispersion von beliebiger Art ist das Intervall j.*

In der Tat, ist $\varDelta$ eine Zentraldispersion von beliebiger Art und $t \in j$ eine beliebige Zahl, so nimmt die Funktion $\varDelta$ an der Stelle $\varDelta^{-1}(t)$ den Wert t an.

2. *Jede Zentraldispersion von beliebiger Art ist eine wachsende Funktion.*

Beweis. Da sich jede Zentraldispersion von beliebiger Art aus den Fundamentaldispersionen und aus den zu ihnen inversen Funktionen zusammensetzen läßt (§ 12, Nr. 4), genügt es, die Richtigkeit der Behauptung nur für die Fundamentaldispersionen festzustellen. Es sei also δ eine Fundamentaldispersion von beliebiger Art. In dieser Nr. wollen wir die Fundamentaldispersionen kurz mit φ, ψ, χ, ω bezeichnen.

Es seien $t < x$ beliebige Zahlen im Intervall j. Wir haben zu zeigen, daß $\delta(t) < \delta(x)$ ist.

Nach § 12, (1) haben wir $t < \delta(t)$, $x < \delta(x)$. Ist $\delta(t) < x$, so haben wir bereits $\delta(t) < \delta(x)$. Es genügt also festzustellen, daß aus $t < x < \delta(t)$ die Ungleichung $\delta(t) < \delta(x)$ folgt. Dies erreichen wir, indem wir auf Grund der Ordnungssätze das Bestehen der Ungleichungen $t < x < \delta(x) < \delta(t)$ ausschließen. Die Gleichung $\delta(t) = \delta(x)$ ist offenbar wegen der Existenz der inversen Funktion δ^{-1} nicht möglich.

Wir wollen also $t < x < \delta(x) < \delta(t)$ annehmen.

a) $\delta = \varphi$. Nach der Definition der Funktion φ sind die Zahlen t, $\delta(t)$ bzw. x, $\delta(x)$ zwei benachbarte Nullstellen eines Integrals u bzw. v der Differentialgleichung (q). Offenbar sind die Integrale u, v voneinander unabhängig. Nach dem 1. Ordnungssatz (§ 2, Nr. 3) gibt es zwischen t und $\delta(t)$ genau eine Nullstelle des Integrals v, was jedoch den obigen Ungleichungen widerspricht.

b) $\delta = \psi$. Der Beweis verläuft auf Grund des 2. Ordnungssatzes analog wie im Fall a).

c) $\delta = \chi$. Nach der Definition der Funktion χ sind die Zahlen t, $\delta(t)$ zwei benachbarte Nullstellen eines Integrals v der Differentialgleichung (q) und seiner Ableitung v'. Die Funktion v' ist folglich zwischen t und $\delta(t)$ von Null verschieden. Ähnlich sind x, $\delta(x)$ zwei benachbarte Nullstellen eines Integrals u der Differentialgleichung (q) und seiner Ableitung u'. Offenbar sind die Integrale u, v voneinander unabhängig. Nach dem 4. Ordnungssatz hat die Funktion v' eine Nullstelle zwischen t und $\delta(x)$, also nach den obigen Ungleichungen eine Nullstelle zwischen t und $\delta(t)$. Dies ergibt einen Widerspruch.

d) $\delta = \omega$. Der Beweis verläuft auf Grund des 3. Ordnungssatzes analog wie im Fall c).

Damit ist der Beweis beendet.

3. *Jede Zentraldispersion von beliebiger Art ist überall stetig.*

Dies ist eine unmittelbare Folgerung aus den vorangehenden Sätzen 1 und 2.

2. Die Funktionalgleichungen der Zentraldispersionen. In dieser Nr. bezeichnen wir mit $\varphi, \psi, \chi, \omega$ eine beliebige Zentraldispersion von der 1., 2., 3., 4. Art.

Es seien u, v beliebige voneinander unabhängige Integrale der Differentialgleichung (q).

Nach dem Satz in § 3, Nr. 12 schließen wir:
Im Intervall j bestehen die identischen Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} u(t)\, v[\varphi(t)] - u[\varphi(t)]\, v(t) &= 0, \\ u'(t)\, v'[\psi(t)] - u'[\psi(t)]\, v'(t) &= 0, \\ u(t)\, v'[\chi(t)] - u'[\chi(t)]\, v(t) &= 0, \\ u'(t)\, v[\omega(t)] - u[\omega(t)]\, v'(t) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Diese Beziehungen nennen wir die *Funktionalgleichungen der Zentraldispersionen.*

Man sieht, daß die aus den Integralen und deren Ableitungen u', v' gebildeten Verhältnisse $u : v$, $u' : v'$ im Intervall j gegenüber Zusammensetzungen mit Zentraldispersionen im Sinne der folgenden Formeln invariant sind:

$$\left.\begin{aligned} \frac{u(t)}{v(t)} &= \frac{u[\varphi(t)]}{v[\varphi(t)]}, & \frac{u'(t)}{v'(t)} &= \frac{u'[\psi(t)]}{v'[\psi(t)]}, \\ \frac{u(t)}{v(t)} &= \frac{u'[\chi(t)]}{v'[\chi(t)]}, & \frac{u'(t)}{v'(t)} &= \frac{u[\omega(t)]}{v[\omega(t)]}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

3. Die Ableitungen. Es sei wiederum φ, ψ, χ, ω eine beliebige Zentraldispersion von der 1., 2., 3., 4. Art.

Wir wollen den folgenden Satz beweisen:

1. *Alle Zentraldispersionen von beliebiger Art haben an jeder Stelle $t \in j$ stetige Ableitungen (1. Ordnung). Diese lassen sich vermöge beliebiger voneinander unabhängiger Integrale u, v der Differentialgleichung* (q) *und deren Ableitungen u', v' wie folgt ausdrücken*:

$$\left.\begin{aligned} \varphi'(t) &= -\frac{u'(t)\, v[\varphi(t)] - u[\varphi(t)]\, v'(t)}{u(t)\, v'[\varphi(t)] - u'[\varphi(t)]\, v(t)}; \\ \psi'(t) &= -\frac{q(t)}{q[\psi(t)]} \cdot \frac{u(t)\, v'[\psi(t)] - u'[\psi(t)]\, v(t)}{u'(t)\, v[\psi(t)] - u[\psi(t)]\, v'(t)}; \\ \chi'(t) &= -\frac{1}{q[\chi(t)]} \cdot \frac{u'(t)\, v'[\chi(t)] - u'[\chi(t)]\, v'(t)}{u(t)\, v[\chi(t)] - u[\chi(t)]\, v(t)}; \\ \omega'(t) &= -q(t) \cdot \frac{u(t)\, v[\omega(t)] - u[\omega(t)]\, v(t)}{u'(t)\, v'[\omega(t)] - u'[\omega(t)]\, v'(t)}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Beweis. Wir wollen uns auf den Beweis etwa im Fall der Zentraldispersion φ beschränken.

Es seien u, v zwei voneinander unabhängige Integrale der Differentialgleichung (q).

Wir betrachten die Basenfunktion (§ 2, Nr. 6; $Q = q$)

$$F(t, x) = u(t)\, v(x) - u(x)\, v(t).$$

Es sei $t_0 \in j$ eine beliebige Zahl und $x_0 = \varphi(t_0)$ der entsprechende Wert von φ. Dann haben wir $F(t_0, x_0) = 0$ (§ 3, Nr. 12).

Nach § 2, Nr. 6 gibt es genau eine in einer Umgebung i ($\subset j$) von t_0 definierte und stetige Funktion $x(t)$, die an der Stelle t_0 den Wert x_0 annimmt und im Intervall i die Gleichung $F[t, x(t)] = 0$ befriedigt. Diese Funktion x besitzt im Intervall i die stetige Ableitung

$$x'(t) = -\frac{u'(t)\, v[x(t)] - u[x(t)]\, v'(t)}{u(t)\, v'[x(t)] - u'[x(t)]\, v(t)}. \tag{4}$$

Nun ist aber die Funktion φ im Intervall (j und folglich auch) i definiert und stetig, und auch sie nimmt an der Stelle t_0 den Wert x_0 an und befriedigt im Intervall i die obige Gleichung: $F[t, \varphi(t)] = 0$. Es gilt also $x(t) = \varphi(t)$ für $t \in i$. Daraus folgt die Existenz von $\varphi'(t_0)$ und im Hinblick auf (4) die erste Formel (3).

2. *Die Ableitungen der Zentraldispersionen lassen sich mit Hilfe eines Integrals u der Differentialgleichung* (q) *und seiner Ableitung u' wie folgt ausdrücken:*

$$\varphi'(t) = \begin{cases} \dfrac{u^2[\varphi(t)]}{u^2(t)} & \text{für} \quad u(t) \neq 0, \\[2ex] \dfrac{u'^2(t)}{u'^2[\varphi(t)]} & \text{für} \quad u(t) = 0; \end{cases} \tag{5}$$

$$\psi'(t) = \begin{cases} \dfrac{q(t)}{q[\psi(t)]} \cdot \dfrac{u'^2[\psi(t)]}{u'^2(t)} & \text{für} \quad u'(t) \neq 0, \\[2ex] \dfrac{q(t)}{q[\psi(t)]} \cdot \dfrac{u^2(t)}{u^2[\psi(t)]} & \text{für} \quad u'(t) = 0; \end{cases} \tag{6}$$

$$\chi'(t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{q[\chi(t)]} \cdot \dfrac{u'^2[\chi(t)]}{u^2(t)} & \text{für} \quad u(t) \neq 0, \\[2ex] -\dfrac{1}{q[\chi(t)]} \cdot \dfrac{u'^2(t)}{u^2[\chi(t)]} & \text{für} \quad u(t) = 0; \end{cases} \tag{7}$$

$$\omega'(t) = \begin{cases} -q(t) \cdot \dfrac{u^2[\omega(t)]}{u'^2(t)} & \text{für} \quad u'(t) \neq 0. \\[2ex] -q(t) \cdot \dfrac{u^2(t)}{u'^2[\omega(t)]} & \text{für} \quad u'(t) = 0, \end{cases} \tag{8}$$

Beweis. Wir wollen uns auf den Beweis etwa der Formel (5) beschränken. Im wesentlichen geht es um eine Umformung der ersten Formel (3).

Im Fall $u(t) \neq 0$ multiplizieren wir in dieser letzteren den Zähler und Nenner mit $u(t)$ und wenden im Nenner die Beziehung $u(t)\, v[\varphi(t)] = u[\varphi(t)]\, v(t)$ an; dann multiplizieren wir analog mit $u[\varphi(t)]$ und machen von derselben Beziehung im Zähler Gebrauch. Nach Division durch die Wronskische Determinante $w(t) = w[\varphi(t)]$ von u, v ergibt sich die Formel (5).

Im Fall $u(t) = 0$ haben wir $u'(t)\, u'[\varphi(t)] \neq 0$. Wir multiplizieren ähnlich wie oben den Zähler und Nenner mit $u'(t)$, dann mit $u'[\varphi(t)]$ und erhalten somit Formel (5).

3. *Die Ableitungen der Zentraldispersionen lassen sich mit Hilfe der ersten bzw. zweiten Amplitude r bzw. s einer beliebigen Basis* (u, v) *der Differentialgleichung* (q) *wie folgt ausdrücken*:

$$\left.\begin{aligned} \varphi'(t) &= \frac{r^2[\varphi(t)]}{r^2(t)}, & \psi'(t) &= \frac{q(t)}{q[\psi(t)]}\cdot\frac{s^2[\psi(t)]}{s^2(t)}, \\ \chi'(t) &= -\frac{1}{q[\chi(t)]}\cdot\frac{s^2[\chi(t)]}{r^2(t)}, & \omega'(t) &= -q(t)\cdot\frac{r^2[\omega(t)]}{s^2(t)}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Beweis (z. B. der ersten Formel). Es sei (u, v) eine Basis der Differentialgleichung (q) und r, s die entsprechende erste und zweite Amplitude. Es sei $t \in j$ eine beliebige Zahl. Von den Zahlen $u(t), v(t)$ ist wenigstens eine, z. B. $u(t)$, von Null verschieden: $u(t) \neq 0$. Für die Funktion $\lambda = v : u$ haben wir (nach (2)) $\lambda(t) = \lambda[\varphi(t)]$. Folglich gilt

$$\varphi'(t) = \frac{u^2[\varphi(t)]}{u^2(t)} = \frac{1+\lambda^2(t)}{1+\lambda^2[\varphi(t)]}\cdot\frac{r^2[\varphi(t)]}{r^2(t)} = \frac{r^2[\varphi(t)]}{r^2(t)},$$

w. z. b. w.

4. Höhere Ableitungen. Aus den obigen Resultaten sehen wir:

Unter der Voraussetzung, daß der Träger q der Differentialgleichung (q) *im Intervall j stetig ist, haben alle Zentraldispersionen von der 1. Art im Intervall j stetige Ableitungen 3. Ordnung und alle übrigen Zentraldispersionen stetige Ableitungen 1. Ordnung.*

Allgemeiner gilt:

Gehört der Träger q der Differentialgleichung (q) *der Klasse* C_k *an* $(k = 0, 1, \ldots)$, *so gehören alle Zentraldispersionen 1. Art der Klasse* C_{k+3} *und alle übrigen Zentraldispersionen der Klasse* C_{k+1} *an.*

5. Beziehungen der Zentraldispersionen zu dem Transformationsproblem. Die Formeln (5)–(8) stehen in einer engen Beziehung zu dem Transformationsproblem (§ 11).

Es seien $\varphi_\nu, \psi_\nu, \chi_\varrho, \omega_\varrho$ $(\nu = 0, \pm 1, \ldots; \varrho = \pm 1, \ldots)$ beliebige Zentraldispersionen von der 1., 2., 3., 4. Art. Ferner sei u ein beliebiges Integral der Differentialgleichung (q). Dann bestehen die mit diesen Zentraldispersionen gebildeten Formeln (5)–(8).

Nun ergeben diese Formeln im Hinblick auf die Ordnungssätze (§ 2, Nr. 3) für alle $t \in j$ folgende Beziehungen:

$$u(t) = \frac{(-1)^\nu}{\sqrt{\varphi_\nu'(t)}}\, u[\varphi_\nu(t)], \tag{10}$$

$$\frac{u'(t)}{\sqrt{-q(t)}} = \frac{(-1)^\nu}{\sqrt{\psi_\nu'(t)}}\,\frac{u'[\psi_\nu(t)]}{\sqrt{-q[\psi_\nu(t)]}}, \tag{11}$$

$$u(t) = \frac{(-1)^\varrho}{\sqrt{\chi_\varrho'(t)}}\,\frac{u'[\chi_\varrho(t)]}{\sqrt{-q[\chi_\varrho(t)]}}, \tag{12}$$

$$\frac{u'(t)}{\sqrt{-q(t)}} = \frac{(-1)^\varrho}{\sqrt{\omega_\varrho'(t)}}\, u[\omega_\varrho(t)]. \tag{13}$$

Nach Formel (10) stellt die zweigliedrige Funktionenfolge $\left[(-1)^\nu : \sqrt{\varphi'_\nu(t)},\ \varphi_\nu(t)\right]$ eine Transformation (§ 11, Nr. 2) der Differentialgleichung (q) in sich selbst dar. In dieser Transformation wird jedes Integral u von (q) in sich selbst transformiert.

Ähnliches ergeben die Formeln (11)–(13): Nehmen wir an, die Funktion $q(<0)$ sei von der Klasse C_2, dann läßt die Differentialgleichung (q) die begleitende Differentialgleichung $(\hat{q}_1)$ zu. Wir wissen (§ 1, Nr. 9), daß die Funktion $(u_1(t) =)$ $u'(t) : \sqrt{-q(t)}$ ein Integral der Differentialgleichung $(\hat{q}_1)$, das mit u assoziierte Integral, darstellt.

Die Funktionenfolge $\left[(-1)^\nu : \sqrt{\psi'_\nu(t)},\ \psi_\nu(t)\right]$ stellt offenbar eine Transformation der begleitenden Differentialgleichung $(\hat{q}_1)$ in sich selbst dar. In dieser Transformation wird jedes Integral u_1 von $(\hat{q}_1)$ in sich selbst transformiert.

Die Funktionenfolge $\left[(-1)^\varrho : \sqrt{\chi'_\varrho(t)},\ \chi_\varrho(t)\right]$ stellt eine Transformation der begleitenden Differentialgleichung $(\hat{q}_1)$ in die Differentialgleichung (q) dar. In dieser Transformation wird jedes Integral u_1 der Differentialgleichung $(\hat{q}_1)$ in das mit ihm assoziierte Integral u von (q) transformiert.

Die Funktionenfolge $\left[(-1)^\varrho : \sqrt{\omega'_\varrho(t)},\ \omega_\varrho(t)\right]$ stellt eine Transformation der Differentialgleichung (q) in die begleitende Differentialgleichung $(\hat{q}_1)$ dar. In dieser Transformation wird jedes Integral u der Differentialgleichung (q) in das mit ihm assoziierte Integral u_1 von $(\hat{q}_1)$ transformiert.

Zusammenfassend kann man sagen, daß *die Zentraldispersionen oszillatorischer Differentialgleichungen* (q) *spezielle Lösungen des Kummerschen Transformationsproblems für die Differentialgleichungen* (q) *und ihre begleitenden Differentialgleichungen* $(\hat{q}_1)$ *bestimmen.*

6. Beziehungen zwischen Ableitungen der Zentraldispersionen und den Werten des Trägers q.

1. Es sei nun $\varphi, \psi, \chi, \omega$ die Fundamentaldispersion 1., 2., 3., 4. Art.

Es gilt der folgende

Satz. *Die Werte der Ableitungen (1. Ordnung) der Fundamentaldispersionen an jeder Stelle $t \in j$ lassen sich als Verhältnisse von geeigneten Werten des Trägers q ausdrücken, und zwar folgendermaßen:*

$$\varphi'(t) = \frac{q(t_1)}{q(t_3)}, \qquad \psi'(t) = \frac{q(t)}{q[\psi(t)]}\,\frac{q(t_4)}{q(t_2)},$$

$$\chi'(t) = \frac{q(t_1)}{q[\chi(t)]}, \quad \omega'(t) = \frac{q(t)}{q(t_2)};$$

die t_1, t_2, t_3, t_4 bedeuten geeignete Zahlen in folgender Anordnung:

$$t < t_1 < \chi(t) < t_3 < \varphi(t); \quad t < t_2 < \omega(t) < t_4 < \psi(t).$$

Beweis. Für jedes Integral u der Differentialgleichung (q) und beliebige Zahlen $t, x \in j$ gilt offenbar die Formel

$$u'^2(x) - u'^2(t) = \int_t^x q(\sigma)\,[u^2(\sigma)]'\,d\sigma, \tag{14}$$

auf die wir unseren Beweis stützen wollen.

a) Es sei u ein beliebiges an der Stelle t verschwindendes Integral der Differentialgleichung (q), also $u(t) = u'[\chi(t)] = 0$.

In der Formel (14) wählen wir $x = \chi(t)$:

$$-u'^2(t) = \int_t^{\chi(t)} q(\sigma)\,[u^2(\sigma)]'\,d\sigma.$$

Im Intervall $(t, \chi(t))$ ist die Funktion uu' und folglich auch $(u^2)'$ positiv. Nach dem Mittelwertsatz haben wir

$$\int_t^{\chi(t)} q(\sigma)\cdot[u^2(\sigma)]'\,d\sigma = q(t_1)\,u^2[\chi(t)],$$

wobei $t < t_1 < \chi(t)$ ist. Den letzten beiden Formeln entnehmen wir

$$-u'^2(t) = q(t_1)\,u^2\,[\chi(t)],$$

woraus im Hinblick auf (7)

$$\chi'(t) = \frac{q(t_1)}{q[\chi(t)]} \qquad \bigl(t < t_1 < \chi(t)\bigr)$$

folgt.

b) Es sei nun u ein beliebiges Integral der Differentialgleichung (q), dessen Ableitung u' an der Stelle t verschwindet: $u'(t) = u[\omega(t)] = 0$.

In der Formel (14) wählen wir $x = \omega(t)$:

$$u'^2[\omega(t)] = \int_t^{\omega(t)} q(\sigma)\,[u^2(\sigma)]'\,d\sigma.$$

Im Intervall $\bigl(t, \omega(t)\bigr)$ ist die Funktion uu' und folglich auch $(u^2)'$ negativ. Nach dem Mittelwertsatz haben wir

$$\int_t^{\omega(t)} q(\sigma)\,[u^2(\sigma)]'\,d\sigma = -q(t_2)\,u^2(t),$$

wobei $t < t_2 < \omega(t)$ ist. Den letzten beiden Formeln entnehmen wir

$$u'^2[\omega(t)] = -q(t_2)\,u^2(t),$$

woraus im Hinblick auf (8)

$$\omega'(t) = \frac{q(t)}{q(t_2)} \qquad \bigl(t < t_2 < \omega(t)\bigr)$$

folgt.

c) Aus der identischen Beziehung

$$\varphi(t) = \omega[\chi(t)]$$

erhalten wir bei Anwendung der obigen Resultate

$$\varphi'(t) = \omega'[\chi(t)]\,\chi'(t) = \frac{q[\chi(t)]}{q(t_3)}\cdot\frac{q(t_1)}{q[\chi(t)]} = \frac{q(t_1)}{q(t_3)},$$

wobei $\chi(t) < t_3 < \varphi(t)$ ist. Wir haben also

$$\varphi'(t) = \frac{q(t_1)}{q(t_3)} \qquad \bigl(\chi(t) < t_3 < \varphi(t)\bigr).$$

d) Ähnlich erhalten wir aus der identischen Beziehung

$$\psi(t) = \chi[\omega(t)]$$

die Formel

$$\psi'(t) = \frac{q(t)}{q(t_2)} \cdot \frac{q(t_4)}{q[\psi(t)]} \qquad \bigl(\omega(t) < t_4 < \psi(t)\bigr).$$

2. Die obigen Formeln gelten, wie gesagt, für die Fundamentaldispersionen der betreffenden Arten. Allgemeiner bestehen für $n = 1, 2, \ldots$ die folgenden Beziehungen:

$$\varphi_n'(t) = \frac{q(t_1)}{q(t_3)} \cdot \frac{q(t_5)}{q(t_7)} \cdots \frac{q(t_{4n-3})}{q(t_{4n-1})};$$

$$\chi_n'(t) = \frac{q(t_1)}{q(t_3)} \cdot \frac{q(t_5)}{q(t_7)} \cdots \frac{q(t_{4n-7})}{q(t_{4n-5})} \cdot \frac{q(t_{4n-3})}{q[\chi_n(t)]};$$

$$\varphi_{\mu-1}(t) < t_{4\mu-3} < \chi_\mu(t) < t_{4\mu-1} < \varphi_\mu(t); \quad \mu = 1, 2, \ldots, n.$$

$$\psi_n'(t) = \frac{q(t)}{q(t_2)} \cdot \frac{q(t_4)}{q(t_6)} \cdots \frac{q(t_{4n-4})}{q(t_{4n-2})} \cdot \frac{q(t_{4n})}{q[\psi_n(t)]};$$

$$\omega_n'(t) = \frac{q(t)}{q(t_2)} \cdot \frac{q(t_4)}{q(t_6)} \cdots \frac{q(t_{4n-4})}{q(t_{4n-2})};$$

$$\psi_{\mu-1}(t) < t_{4\mu-2} < \omega_\mu(t) < t_{4\mu} < \psi_\mu(t); \quad \mu = 1, 2, \ldots, n.$$

$$\varphi_{-n}'(t) = \frac{q(t_{-1})}{q(t_{-3})} \cdot \frac{q(t_{-5})}{q(t_{-7})} \cdots \frac{q(t_{-(4n-3)})}{q(t_{-(4n-1)})};$$

$$\chi_{-n}'(t) = \frac{q(t_{-1})}{q(t_{-3})} \cdot \frac{q(t_{-5})}{q(t_{-7})} \cdots \frac{q(t_{-(4n-7)})}{q(t_{-(4-n5)})} \cdot \frac{q(t_{-(4n-3)})}{q[\chi_{-n}(t)]}$$

$$\varphi_{-\mu}(t) < t_{-(4n-1)} < \chi_{-\mu}(t) < t_{-(4\mu-3)} < \varphi_{-\mu+1}(t); \quad \mu = 1, 2, \ldots, n.$$

$$\psi_{-n}'(t) = \frac{q(t)}{q(t_{-2})} \cdot \frac{q(t_{-4})}{q(t_{-6})} \cdots \frac{q(t_{-(4n-4)})}{q(t_{-(4n-2)})} \cdot \frac{q(t_{-4n})}{q[\psi_{-n}(t)]};$$

$$\omega_{-n}'(t) = \frac{q(t)}{q(t_{-2})} \cdot \frac{q(t_{-4})}{q(t_{-6})} \cdots \frac{q(t_{-(4n-4)})}{q(t_{-(4n-2)})};$$

$$\psi_{-\mu}(t) < t_{-4\mu} < \omega_{-\mu}(t) < t_{-(4\mu-2)} < \psi_{-\mu+1}(t); \quad \mu = 1, 2, \ldots, n.$$

Von der Richtigkeit dieser Formeln für φ_n', χ_n', ψ_n', ω_n' überzeugt man sich mit Hilfe vollständiger Induktion unter Anwendung der Beziehungen § 12, (7) und der obigen Formeln für φ', χ', ψ', ω'.

Ferner folgt aus $\varphi\varphi_{-1}(t) = t$, $\psi\psi_{-1}(t) = t$ im Hinblick auf die Formeln für φ', ψ'

$$\varphi'_{-1}(t) = \frac{q(t_{-1})}{q(t_{-3})}; \quad \psi'_{-1}(t) = \frac{q(t)}{q(t_{-2})} \cdot \frac{q(t_{-4})}{q[\psi_{-1}(t)]}; \tag{15}$$

dabei ist $\varphi_{-1}(t) < t_{-3} < \chi_{-1}(t) < t_{-1} < t$; $\psi_{-1}(t) < t_{-4} < \omega_{-1}(t) < t_{-2} < t$.

Von der Richtigkeit der obigen Formeln für φ'_{-n}, χ'_{-n}, ψ'_{-n}, ω'_{-n} überzeugt man sich mit Hilfe vollständiger Induktion unter Anwendung der Beziehungen § 12, (7) und § 13, (15) und der Formeln für χ', ω'.

7. Beziehungen zwischen Zentraldispersionen und Phasen. Es seien α, β eine erste bzw. zweite Phase einer Basis (u, v) der Differentialgleichung (q). Wir nehmen z. B. an, daß diese Phasen in dem gemischten Phasensystem der Basis (u, v) (§ 5, Nr. 14) benachbart liegen, d. h. im Intervall j die Beziehungen $0 < \beta - \alpha < \pi$ oder $-\pi < \beta - \alpha < 0$ erfüllen. Wegen unserer Voraussetzung $q < 0$ haben wir $\operatorname{sgn} \alpha' = \operatorname{sgn} \beta'$ $(= \varepsilon)$. φ, ψ, χ, ω sollen im folgenden die Fundamentaldispersionen der vier Arten bezeichnen.

Es sei $x \in j$ eine beliebige Zahl.

Zunächst wollen wir ein Integral y der Differentialgleichung (q) betrachten, das an der Stelle x verschwindet. Nach § 5, (27) haben wir

$$\left.\begin{aligned} y(t) &= k \cdot r(t) \cdot \sin [\alpha(t) - \alpha(x)], \\ y'(t) &= \pm k \cdot s(t) \cdot \sin [\beta(t) - \alpha(x)], \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

wobei natürlich k $(\neq 0)$ eine geeignete Konstante ist.

Der Einfachheit halber setzen wir $A(t) = \alpha(t) - \alpha(x)$.

Offenbar haben wir $A(x) = 0$. Die Funktion A wächst im Intervall j nach ∞ oder nimmt nach $-\infty$ ab, je nachdem, ob $\varepsilon = 1$ oder $\varepsilon = -1$ ist. Folglich gibt es eine Zahl x_1 $(> x)$, für die die Funktion A den Wert $\varepsilon\pi$ annimmt. Nach (16) ist aber die Zahl x_1 die erste nach x folgende Nullstelle des Integrals y. Wir haben also $x_1 = \varphi(x)$ und ferner

$$\alpha\varphi(x) = \alpha(x) + \varepsilon\pi. \tag{17}$$

Wir betrachten nun die Funktion $B(t) = \beta(t) - \alpha(x)$.

Auch diese Funktion wächst im Intervall j nach ∞ oder nimmt nach $-\infty$ ab, je nachdem, ob $\varepsilon = 1$ oder $\varepsilon = -1$ ist. Folglich gibt es eine Zahl x_3 $(> x)$, für die die Funktion B den Wert $\frac{1}{2}(\varepsilon + 1)\pi$ oder $\frac{1}{2}(\varepsilon - 1)\pi$ annimmt, je nachdem, ob $0 < \beta(x) - \alpha(x) < \pi$ oder $-\pi < \beta(x) - \alpha(x) < 0$ ist. Nach (16) ist aber x_3 die erste nach x folgende Nullstelle der Funktion y'. Wir haben also $x_3 = \chi(x)$ und ferner

$$\left.\begin{aligned} \beta\chi(x) &= \alpha(x) + \frac{1}{2}(\varepsilon + 1)\pi \quad \text{im Fall} \quad 0 < \beta(x) - \alpha(x) < \pi; \\ \beta\chi(x) &= \alpha(x) + \frac{1}{2}(\varepsilon - 1)\pi \quad \text{im Fall} \quad -\pi < \beta(x) - \alpha(x) < 0. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

An zweiter Stelle wollen wir ein Integral y der Differentialgleichung (q) betrachten, dessen Ableitung y' an der Stelle x verschwindet. Nach § 5, (27) haben wir

$$y(t) = k \cdot r(t) \cdot \sin [\alpha(t) - \beta(x)],$$

$$y'(t) = \pm k \cdot s(t) \cdot \sin [\beta(t) - \beta(x)].$$

Durch Überlegungen, die den obigen analog sind, erhält man die der Formel (17) analoge Beziehung

$$\beta\psi(x) = \beta(x) + \varepsilon\pi \tag{19}$$

und ferner

$$\left.\begin{aligned} \alpha\omega(x) &= \beta(x) + \frac{1}{2}(\varepsilon - 1)\pi \quad \text{im Fall} \quad 0 < \beta(x) - \alpha(x) < \pi, \\ \alpha\omega(x) &= \beta(x) + \frac{1}{2}(\varepsilon + 1)\pi \quad \text{im Fall} \quad -\pi < \beta(x) - \alpha(x) < 0. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Die Formeln (17), (18), (19), (20) sind die sogenannten *abelschen Funktionalgleichungen für die Fundamentaldispersionen.*

Kombiniert man diese Relationen mit den Beziehungen § 12, (8), so erhält man die *allgemeinen abelschen Funktionalgleichungen für die Zentraldispersionen*, kürzer: die abelschen Funktionalgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \alpha\varphi_\nu(x) &= \alpha(x) + \varepsilon\nu\pi, \\ \beta\psi_\nu(x) &= \beta(x) + \varepsilon\nu\pi \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

und ferner im Fall $0 < \beta(x) - \alpha(x) < \pi$:

$$\left.\begin{aligned} \beta\chi_\mu(x) &= \alpha(x) + \frac{1}{2}\big((2\mu - \operatorname{sgn}\mu)\,\varepsilon + 1\big)\pi, \\ \alpha\omega_\mu(x) &= \beta(x) + \frac{1}{2}\big((2\mu - \operatorname{sgn}\mu)\,\varepsilon - 1\big)\pi \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

und ähnlich im Fall $-\pi < \beta(x) - \alpha(x) < 0$:

$$\left.\begin{aligned} \beta\chi_\mu(x) &= \alpha(x) + \frac{1}{2}\big((2\mu - \operatorname{sgn}\mu)\,\varepsilon - 1\big)\pi, \\ \alpha\omega_\mu(x) &= \beta(x) + \frac{1}{2}\big((2\mu - \operatorname{sgn}\mu)\,\varepsilon + 1\big)\pi, \\ &(x \in j; \quad \varepsilon = \operatorname{sgn}\alpha' = \operatorname{sgn}\beta'; \quad \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \quad \mu = \pm 1, \pm 2, \ldots). \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

8. Darstellung der Zentraldispersionen und ihrer Ableitungen durch Phasen. Die abelschen Funktionalgleichungen für die Zentraldispersionen ergeben offenbar im Intervall j eine Darstellung der Zentraldispersionen durch die Phasen α, β.

Die Darstellung der Zentraldispersionen 1. und 2. Art ist nach den Formeln (21)

$$\varphi_\nu(t) = \alpha^{-1}[\alpha(t) + \nu\pi \cdot \operatorname{sgn}\alpha'], \qquad \psi_\nu(t) = \beta^{-1}[\beta(t) + \nu\pi \cdot \operatorname{sgn}\beta'] \tag{24}$$

$$(\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Eine ähnliche Darstellung lassen offenbar auch die Zentraldispersionen 3. und 4. Art χ_μ, ω_μ ($\mu = \pm 1, \pm 2, \ldots$) zu, und zwar unter Anwendung der Formeln (22) bzw. (23). Eine explizite Angabe der entsprechenden Formeln ist jedoch nicht notwendig.

Aus diesen Darstellungen folgen unmittelbar die Eigenschaften der Zentraldispersionen aus Nr. 1,1–3 sowie die stetige Differenzierbarkeit aller Zentraldispersionen, da jede erste bzw. zweite Phase alle Werte annimmt, ständig wächst oder abnimmt und der Klasse C_3 bzw. C_1 angehört.

Durch Differentiation der abelschen Funktionalgleichungen erhält man im Intervall j die folgende Darstellung der Ableitungen der Zentraldispersionen:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_\nu'(t) &= \frac{\alpha'(t)}{\alpha'[\varphi_\nu(t)]}, \quad \psi_\nu'(t) = \frac{\beta'(t)}{\beta'[\psi_\nu(t)]}, \\ \chi_\mu'(t) &= \frac{\alpha'(t)}{\beta'[\chi_\mu(t)]}, \quad \omega_\mu'(t) = \frac{\beta'(t)}{\alpha'[\omega_\mu(t)]} \\ &(\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \quad \mu = \pm 1, \pm 2, \ldots). \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

9. Struktur der abelschen Funktionalgleichungen. Jede abelsche Funktionalgleichung für die Zentraldispersionen hat offenbar die Form

$$\gamma(X) = \bar{\gamma}(t); \tag{26}$$

jedes der beiden Symbole γ, $\bar{\gamma}$ stellt eine erste oder zweite Phase der (beliebig gewählten) Basis (u, v) der Differentialgleichung (q) und X eine Zentraldispersion dar.

Wählt man umgekehrt eine erste oder zweite Phase γ der Basis (u, v) und läßt $\bar{\gamma}$ alle Phasen des ersten oder zweiten Phasensystems der Basis (u, v) durchlaufen, so durchläuft die Funktion

$$X(t) = \gamma^{-1}[\bar{\gamma}(t)] \tag{27}$$

genau die Zentraldispersionen einer bestimmten Art $\varkappa$ $(= 1, 2, 3, 4)$: Ist γ eine erste (zweite) Phase und durchläuft $\bar{\gamma}$ das erste bzw. zweite Phasensystem, so durchläuft X genau die Zentraldispersionen 1. bzw. 4. (3. bzw. 2.) Art.

10. Darstellung der Zentraldispersionen durch normierte Polarfunktionen. Wir werden uns der Einfachheit halber auf die Darstellung der Fundamentaldispersionen, die wir hier wieder mit φ, ψ, χ, ω bezeichnen wollen, beschränken. Die Erweiterung der folgenden Betrachtungen auf Zentraldispersionen mit beliebigen Indizes bietet keine Schwierigkeiten.

1. *Darstellung der Fundamentaldispersionen φ, ω durch 1-normierte Polarfunktionen.* Es sei $h(\alpha)$ eine 1-normierte Polarfunktion der Differentialgleichung (q), und $\alpha(t), \beta(t)$ seien die zugehörigen Phasen. Wir haben also $\beta = \alpha + h(\alpha)$ an jeder Stelle $t \in j$. Wegen des oszillatorischen Charakters der Differentialgleichung (q) fällt das Definitionsintervall von h mit dem Intervall $(-\infty, \infty)$ zusammen, und wir haben in diesem Intervall nach § 6, (30):

1. $h \in C_1$;

2. $n\pi < h < (n + 1)\pi$ (n ganz);

3. $h^\backprime > -1$.

Wir wählen eine Zahl $t_0 \in j$ und setzen $\alpha_0 = \alpha(t_0)$, $\alpha'_0 = \alpha'(t_0)$.

Dann gilt (§ 6, (28)) an je zwei homologen Stellen $\alpha(t) = \alpha$ und $\alpha^{-1}(\alpha) = t \in j$ die Formel

$$t = t_0 + \frac{1}{\alpha'_0} \int_{\alpha_0}^{\alpha} \left(\exp 2 \int_{\alpha_0}^{\sigma} \cot h(\varrho)\, d\varrho \right) d\sigma. \tag{28}$$

Wir bilden diese Formel an der Stelle $\varphi(t)$ und wenden die abelsche Funktionalgleichung $\alpha[\varphi(t)] = \alpha(t) + \varepsilon\pi$ ($\varepsilon = \operatorname{sgn} \alpha'$) an. Dann erhalten wir für je zwei homologe Zahlen t, α

$$\varphi(t) = t_0 + \frac{1}{\alpha'_0} \int_{\alpha_0}^{\alpha+\varepsilon\pi} \left(\exp 2 \int_{\alpha_0}^{\sigma} \cot h(\varrho)\, d\varrho \right) d\sigma. \tag{29}$$

Diese Formel läßt sich offenbar wie folgt schreiben:

$$\varphi(t) = t + \frac{1}{\alpha'_0} \int_{\alpha}^{\alpha+\varepsilon\pi} \left(\exp 2 \int_{\alpha_0}^{\sigma} \cot h(\varrho)\, d\varrho \right) d\sigma. \tag{30}$$

Daraus folgt durch Differentiation

$$\varphi'(t) = \exp 2 \int_{\alpha}^{\alpha+\varepsilon\pi} \cot h(\varrho)\, d\varrho, \tag{31}$$

und ferner

$$\frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)} = 2\alpha'_0[\cot h(\alpha + \varepsilon\pi) - \cot h(\alpha)] \exp \left(-2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} \cot h(\varrho)\, d\varrho \right). \tag{32}$$

Ähnlich ergibt die Formel (28) für je zwei homologe Zahlen t, α

$$\omega(t) = t + \frac{1}{\alpha'_0} \int_{\alpha}^{\alpha+h(\alpha)-n\pi-\frac{1}{2}(1-\varepsilon)\pi} \left(\exp 2 \int_{\alpha_0}^{\sigma} \cot h(\varrho)\, d\varrho \right) d\sigma. \tag{33}$$

2. *Darstellung der Fundamentaldispersionen ψ, χ durch 2-normierte Polarfunktionen.* Es sei nun $-k(\beta)$ eine 2-normierte Polarfunktion der Differentialgleichung (q), und $\alpha(t)$, $\beta(t)$ seien die zugehörigen Phasen. Wir haben also $\alpha = \beta + k(\beta)$ an jeder Stelle $t \in j$. Wegen des oszillatorischen Charakters der Differentialgleichung (q) fällt das Definitionsintervall von $-k$ mit dem Intervall $(-\infty, \infty)$ zusammen, und wir haben in diesem Intervall nach § 6, (37):

1. $-k \in C_1$;

2. $n\pi < -k < (n+1)\pi$ (n ganz);

3. $-k' < 1$.

Wir wählen eine Zahl $t_0 \in j$ und setzen $\beta_0 = \beta(t_0)$, $\alpha_0' = \alpha'(t_0)$.
Dann gilt (§ 6, (35)) an je zwei homologen Stellen $\beta(t) = \beta$ und $\beta^{-1}(\beta) = t \in j$

$$t = t_0 + \frac{1}{\alpha_0'} \int_{\beta_0}^{\beta} [1 + k^{\backslash}(\sigma)] \cdot \exp\left(-2 \int_{\beta_0}^{\sigma} [1 + k^{\backslash}(\varrho)] \cot k(\varrho)\, d\varrho\right) d\sigma\,. \tag{34}$$

Wir bilden diese Formel an der Stelle $\psi(t)$ und wenden die abelsche Funktionalgleichung $\beta[\psi(t)] = \beta(t) + \varepsilon\pi$ ($\varepsilon = \operatorname{sgn} \alpha' = \operatorname{sgn} \beta'$) an. Dann erhalten wir für je zwei homologe Stellen t, β

$$\psi(t) = t_0 + \frac{1}{\alpha_0'} \int_{\beta_0}^{\beta+\varepsilon\pi} [1 + k^{\backslash}(\sigma)] \exp\left(-2 \int_{\beta_0}^{\sigma} [1 + k^{\backslash}(\varrho)] \cot k(\varrho)\, d\varrho\right) d\sigma\,. \tag{35}$$

Diese Formel läßt sich offenbar auch so schreiben:

$$\psi(t) = t + \frac{1}{\alpha_0'} \int_{\beta}^{\beta+\varepsilon\pi} [1 + k^{\backslash}(\sigma)] \exp\left(-2 \int_{\beta_0}^{\sigma} [1 + k^{\backslash}(\varrho)] \cot k(\varrho)\, d\varrho\right) d\sigma\,. \tag{36}$$

Daraus folgt durch Differentiation

$$\psi'(t) = \frac{1 + k^{\backslash}(\beta + \varepsilon\pi)}{1 + k^{\backslash}(\beta)} \exp\left(-2 \int_{\beta}^{\beta+\varepsilon\pi} [1 + k^{\backslash}(\varrho)] \cot k(\varrho)\, d\varrho\right). \tag{37}$$

Ähnlich ergibt die Formel (34) für je zwei homologe Zahlen t, β

$$\chi(t) = t + \frac{1}{\alpha_0'} \int_{\beta}^{\beta + k(\beta) + n\pi + \frac{1}{2}(1+\varepsilon)\pi} [1 + k^{\backslash}(\sigma)] \exp\left(-2 \int_{\beta_0}^{\sigma} [1 + k^{\backslash}(\varrho)] \cot k(\varrho)\, d\varrho\right) d\sigma\,. \tag{38}$$

11. Differentialgleichungen der Zentraldispersionen. Die Zentraldispersionen 1. Art der Differentialgleichung (q) befriedigen eine nichtlineare Differentialgleichung 3. Ordnung, und dasselbe gilt von den Zentraldispersionen aller höherer Arten, falls der Träger q der Klasse C_2 angehört. Diese nichtlinearen Differentialgleichungen 3. Ordnung sind, wie wir sehen werden, Spezialfälle der Kummerschen Differentialgleichung von § 11, (1), deren Bedeutung für die Transformationstheorie grundlegend ist. Wir wollen hier die erwähnten Differentialgleichungen 3. Ordnung aus den abelschen Funktionalgleichungen herleiten.

Es sei X eine Zentraldispersion von der Art $\varkappa$ ($= 1, 2, 3, 4$).

Wir wählen eine beliebige Basis (u, v) der Differentialgleichung (q). Dann gilt, wie wir wissen (vgl. (26)) im Intervall j für geeignete erste oder zweite Phasen γ, $\bar{\gamma}$ der Basis (u, v) die abelsche Funktionalgleichung

$$\gamma(X) = \bar{\gamma}(t)\,. \tag{39}$$

Im Fall $\varkappa = 1$ bzw. $\varkappa = 2$ gilt diese Beziehung dann, wenn beide Phasen γ, $\bar{\gamma}$ erste bzw. zweite Phasen der Basis (u, v) sind; im Fall $\varkappa = 3$ bzw. $\varkappa = 4$ dann, wenn γ eine zweite und $\bar{\gamma}$ eine erste Phase bzw. γ eine erste und $\bar{\gamma}$ eine zweite Phase der Basis (u, v) ist.

Aus der Formel (39) folgt für alle $t \in j$, mit Ausnahme der singulären Stellen $\left(\text{in denen die Werte der Funktionen } \gamma(X), \bar{\gamma}(t) \text{ ungerade Vielfache von } \frac{\pi}{2} \text{ sind}\right)$

$$\tan \gamma(X) = \tan \bar{\gamma}(t). \tag{40}$$

Ist die Zentraldispersion X von der Klasse C_3, so kann diese Beziehung an jeder nichtsingulären Stelle $t \in j$ nach Schwarzscher Art differenziert werden. Man erhält im Hinblick auf § 1, (17)

$$-\{X, t\} - \{\tan \gamma, X\} \cdot X'^2(t) = -\{\tan \bar{\gamma}, t\}.$$

Nun ist aber nach § 5, (18), (24)

$$-\{\tan \gamma, t\} = q(t) \quad \text{oder} \quad -\{\tan \gamma, t\} = \hat{q}_1(t),$$

je nachdem, ob γ eine erste oder zweite Phase der Basis (u, v) darstellt, und Analoges gilt von der rechten Seite der Beziehung (40). $\hat{q}_1$ bedeutet natürlich den Träger der ersten begleitenden Differentialgleichung $(\hat{\mathrm{q}}_1)$ von (q):

$$\hat{q}_1(t) = q(t) + \sqrt{|q(t)|}\left(\frac{1}{\sqrt{|q(t)|}}\right)''. \tag{41}$$

Somit kommen wir zu dem folgenden

Satz. *Alle Zentraldispersionen φ 1. Art, mit beliebigen Indizes, befriedigen im Intervall j die nichtlineare Differentialgleichung 3. Ordnung*

$$-\{\varphi, t\} + q(\varphi) \cdot \varphi'^2(t) = q(t); \tag{qq}$$

ferner, falls der Träger q der Klasse C_2 angehört, befriedigen alle Zentraldispersionen ψ, χ, ω 2., 3., 4. Art, mit beliebigen Indizes, im Intervall j die nichtlinearen Differentialgleichungen 3. Ordnung

$$-\{\psi, t\} + \hat{q}_1(\psi) \cdot \psi'^2(t) = \hat{q}_1(t). \tag{$\hat{\mathrm{q}}_1\hat{\mathrm{q}}_1$}$$

$$-\{\chi, t\} + \hat{q}_1(\chi) \cdot \chi'^2(t) = q(t), \tag{$\hat{\mathrm{q}}_1\mathrm{q}$}$$

$$-\{\omega, t\} + q(\omega) \cdot \omega'^2(t) = \hat{q}_1(t). \tag{$\mathrm{q}\hat{\mathrm{q}}_1$}$$

Dies sind die sogenannten *nichtlinearen Differentialgleichungen 3. Ordnung der Zentraldispersionen*, genauer: der Zentraldispersionen 1., 2., 3., 4. Art.

12. Lösungen der abelschen Funktionalgleichungen mit unbekannten Phasenfunktionen α, β. Die Frage nach der Bestimmung der Differentialgleichungen (q) durch die Angabe einer ihrer Zentraldispersionen führt auf die Betrachtung der abelschen Funktionalgleichungen für die Zentraldispersionen mit unbekannten Phasenfunktionen α, β.

Es sei φ_ν, ψ_ν eine Zentraldispersion 1. bzw. 2. Art einer Differentialgleichung (q). Eine Phasenfunktion α, β (§ 5, Nr. 7) von der Klasse C_3 bzw. C_1, die im Intervall j die abelsche Funktionalgleichung (21) befriedigt, stellt eine erste bzw. zweite Phase einer Differentialgleichung $(\bar{\mathrm{q}})$ dar, deren ν-te Zentraldispersion 1. bzw.

2. Art mit der Funktion φ_ν bzw. ψ_ν übereinstimmt. Der Träger $\bar{q}$ ist im Sinne der Formel § 5, (16) bzw. durch eine Lösung einer nichtlinearen Differentialgleichung 2. Ordnung (§ 5, Nr. 12) bestimmt.

Es sei nun χ_μ, ω_μ eine Zentraldispersion 3. bzw. 4. Art einer Differentialgleichung (q). Zwei Phasenfunktionen α, β von der Klasse C_3 bzw. C_1, die im Intervall j miteinander durch eine Beziehung wie § 5, (34) zusammenhängen und die abelschen Funktionalgleichungen, etwa (22), befriedigen, stellen eine erste und zweite Phase derselben Basis einer Differentialgleichung ($\bar{q}$) dar, deren μ-te Zentraldispersion 3. bzw. 4. Art mit der Funktion χ_μ bzw. ω_μ übereinstimmt. Der Träger $\bar{q}$ ist z. B. vermöge der Phase α im Sinne der Formel § 5, (16) eindeutig bestimmt.

Wir werden uns hier eingehender nur mit der Lösung der abelschen Funktionalgleichung durch Phasenfunktionen von der Klasse C_3 bei gegebenen Fundamentaldispersionen 1. Art beschränken.

Zunächst bemerken wir:

Nach § 12, (1) und § 13, Nr. 1, 3, 4, hat die Fundamentaldispersion 1. Art φ jeder Differentialgleichung (q) im Intervall $j\,(= (a, b))$ folgende Eigenschaften:

$$\left.\begin{array}{ll} 1.\ \varphi(t) > t, & \\ 2.\ \lim\limits_{t\to a+} \varphi(t) = a, & \lim\limits_{t\to b-} \varphi(t) = b, \\ 3.\ \varphi \in C_3, & \\ 4.\ \varphi'(t) > 0. & \end{array}\right\} \tag{42}$$

Nun gilt der folgende

Satz (von E. Barvínek [2]). *Zu jeder Funktion φ, die im Intervall j definiert ist und die Eigenschaften 1.–4. hat, gibt es unendlich viele Lösungen der abelschen Funktionalgleichung*

$$\alpha(\varphi) = \alpha(t) + \pi \cdot \operatorname{sgn} \alpha' \tag{43}$$

durch Phasenfunktionen $\alpha \in C_3$, und zwar Lösungen, die konstruktiv ermittelt werden können.

Beweis. Es sei φ eine im Intervall j definierte Funktion mit den obigen Eigenschaften 1.—4. Wir wollen z. B. wachsende Lösungen $\alpha \in C_3$ von (43) konstruieren.

Wir wählen eine Zahl $t_0 \in j$ und setzen $t_\nu = \varphi^\nu(t_0)$ für $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Dann zerfällt das Intervall j in die Teilintervalle $j_\nu = [t_\nu, t_{\nu+1})$.

Nun wählen wir im Intervall j_0 eine beliebige Funktion $f \in C_3$ mit einer stets positiven Ableitung f', die sich in der linksseitigen Umgebung von t_1 folgendermaßen verhält:

$$\lim_{t\to t_1-} f(t) = f(t_0) + \pi,$$

$$\lim_{t\to t_1-} f'(t) = \frac{f'^{+}(t_0)}{\varphi'(t_0)}.$$

$$\lim_{t\to t_1-} f''(t) = \frac{1}{\varphi'(t_0)} \left(\frac{f'^{+}(t)}{\varphi'(t)}\right)'^{+}_{t_0},$$

$$\lim_{t\to t_1-} f'''(t) = \frac{1}{\varphi'(t_0)} \left[\frac{1}{\varphi'(t)} \left(\frac{f'^{+}(t)}{\varphi'(t)}\right)'^{+}\right]'^{+}_{t_0}.$$

Dabei ist z. B. $f'^{+}(t_0)$ die rechtsseitige Ableitung von f an der Stelle t_0.

Vermöge der Funktion f definieren wir nun im Intervall j die Funktion α wie folgt:

$$\alpha(t) = \begin{cases} f(t) & \text{für} \quad t \in j_0, \\ \alpha[\varphi^{-1}(t)] + \pi & \text{für} \quad t \in j_\nu, \quad \nu > 0, \\ \alpha[\varphi(t)] - \pi & \text{für} \quad t \in j_\nu, \quad \nu < 0. \end{cases}$$

Die Funktion α ist offenbar eine wachsende Phasenfunktion von der Klasse C_3 und befriedigt die abelsche Funktionalgleichung (43).

Damit ist der Beweis beendet.

Wir wissen, daß vermöge einer ersten Phase α einer Differentialgleichung (q) der Träger q im Sinne der Formel § 5, (16) eindeutig bestimmt ist. Dies und der obige Satz lassen vermuten, daß es zu jeder im Intervall j definierten Funktion φ mit den Eigenschaften (42) im allgemeinen unendlich viele oszillatorische Differentialgleichungen (q) gibt, deren Fundamentaldispersion 1. Art mit φ übereinstimmt. Später (§ 15, Nr. 10) werden wir zeigen, daß die Mächtigkeit der Menge aller Differentialgleichungen (q) im Intervall $(-\infty, \infty)$ mit derselben Fundamentaldispersion 1. Art φ von der Wahl dieser letzteren unabhängig und der Mächtigkeit $\aleph$ des Kontinuums gleich ist.

Was die Lösung der abelschen Funktionalgleichungen durch Phasenfunktionen von der Klasse C_1 bei gegebenen Fundamentaldispersionen 2., 3., 4. Art anbelangt, so erlauben wir uns, den Leser auf die diesbezüglichen Arbeiten von J. Chrastina ([38]) und F. Neuman ([54]) zu verweisen. Im allgemeinen ist die Situation folgende:

Es sei $\lambda(t)$ eine im Intervall $j = (a, b)$ definierte Funktion mit den folgenden Eigenschaften:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \lambda(t) > t, \\ 2.\ \lim\limits_{t \to a+} \lambda(t) = a, \qquad \lim\limits_{t \to b-} \lambda(t) = b, \\ 3.\ \lambda \in C_1, \\ 4.\ \lambda'(t) > 0. \end{array}\right| \tag{44}$$

a) Es gibt im Intervall j unendlich viele oszillatorische Differentialgleichungen (q) mit $q < 0$, deren Fundamentaldispersion 2. Art ψ mit λ übereinstimmt: $\psi(t) = \lambda(t)$ für $t \in j$.

b) Es sei $t_0 \in j$ eine beliebige Zahl. Es gibt im Intervall $[t_0, b)$ unendlich viele rechtsseitig oszillatorische Differentialgleichungen (q) mit $q < 0$, deren Fundamentaldispersion 3. Art χ mit λ übereinstimmt: $\chi(t) = \lambda(t)$ für $t \in [t_0, b)$.

c) Es sei $t_0 \in j$ eine beliebige Zahl. Es gibt im Intervall $(a, t_0]$ unendlich viele linksseitig oszillatorische Differentialgleichungen (q) mit $q < 0$, deren Fundamentaldispersion 4. Art ω im Intervall $\big(a, \lambda^{-1}(t_0)\big]$ mit λ übereinstimmt: $\omega(t) = \lambda(t)$ für $t \in \big(a, \lambda^{-1}(t_0)\big]$.

Es sei bemerkt, daß Probleme dieser Art Zusammenhänge mit Lösungen gewisser nichtlinearer Differentialgleichungen 2. Ordnung mit nacheilendem Argument aufweisen ([54]).

13. Folgerungen aus den obigen Resultaten. Wir knüpfen an die obigen Betrachtungen an.

1. *Monotonie der Differenzen* $\varphi_\nu(t) - t$, $\psi_\nu(t) - t$, $\chi_\nu(t) - t$, $\omega_\nu(t) - t$.
Wir betrachten im Intervall j die Differenzen

$$\varphi_n(t) - t, \quad \psi_n(t) - t, \quad \chi_n(t) - t, \quad \omega_n(t) - t, \tag{45}$$

$$\varphi_{-n}(t) - t, \quad \psi_{-n}(t) - t, \quad \chi_{-n}(t) - t, \quad \omega_{-n}(t) - t \tag{46}$$

$$(n = 1, 2, \ldots).$$

Aus den Formeln in Nr. 6 schließen wir:

Wenn der Träger q im Intervall j eine nicht wachsende bzw. abnehmende Funktion ist, so sind daselbst die Werte

$$\varphi_n'(t) - 1, \quad \psi_n'(t) - 1, \quad \chi_n'(t) - 1, \quad \omega_n'(t) - 1$$

$\leqq 0$ bzw. < 0, und die Werte

$$\varphi_{-n}'(t) - 1, \quad \psi_{-n}'(t) - 1, \quad \chi_{-n}'(t) - 1, \quad \omega_{-n}'(t) - 1$$

sind $\geqq 0$ bzw. > 0.

Wir sehen also:

Wenn der Träger q im Intervall j eine nicht wachsende bzw. abnehmende Funktion ist, so gilt dasselbe von den Differenzen (45), *während die Differenzen* (46) *nicht abnehmende bzw. wachsende Funktionen darstellen.*

Ähnlich erhalten wir:

Wenn der Träger q im Intervall j eine nicht abnehmende bzw. wachsende Funktion ist, so gilt dasselbe von den Differenzen (45), *während die Differenzen* (46) *nicht wachsende bzw. abnehmende Funktionen darstellen.*

Folgerung. Es sei

$$\cdots < t_{-2} < t_{-1} < t_0 < t_1 < t_2 < \cdots$$

die Nullstellenfolge irgendeines Integrals der Differentialgleichung (q) und

$$\cdots < t_{-2m} < t_{-m} < t_0 < t_m < t_{2m} < \cdots \quad (m \geqq 1) \tag{47}$$

eine Teilfolge davon.

Wenn der Träger q im Intervall j nicht wächst bzw. wenn er abnimmt, so stellt (47) eine konkave bzw. streng konkave Folge dar. Wenn der Träger q im Intervall j nicht abnimmt bzw. wenn er wächst, so stellt (47) eine konvexe bzw. streng konvexe Folge dar.

Für $m = 1$ ergibt dies einen Satz von Sturm-Szegö.

Ein analoges Resultat gilt für die Nullstellenfolge der Ableitung irgendeines Integrals der Differentialgleichung (q).

2. *Ableitungen zusammengesetzter Funktionen.* Nach einem klassischen Satz ergibt die Zusammensetzung von zwei oder mehreren Funktionen einer Klasse C_k ($k = 0, 1, \ldots$) eine Funktion derselben Klasse. Bekanntlich kann es jedoch vor-

kommen, daß die durch Zusammensetzung erzeugten Funktionen einer höheren Klasse als ihre erzeugenden Komponenten angehören. Unsere Resultate über Ableitungen von Zentraldispersionen führen zu mehreren Situationen dieser Art. Wir wollen uns diesbezüglich mit einigen Bemerkungen begnügen, da eine Weiterführung der Untersuchungen in dieser Richtung den Rahmen unseres Themas übersteigen würde.

Wir zeigen:

Es sei q eine im Intervall $j = (a, b)$ stets negative und stetige Funktion derart, daß die Differentialgleichung (q) *oszillatorisch ist. Hier gibt es im Intervall j zwei den Ungleichungen $t < X(t) < Y(t)$ genügende Funktionen X, Y derart, daß die Funktion $q[X(t)] : q[Y(t)]$ der Klasse C_2 angehört. Ist die Funktion q streng monoton, so gibt es sogar stetige Funktionen X, Y mit der erwähnten Eigenschaft.*

In der Tat erhält man Funktionen X, Y der beschriebenen Art, wenn man ihre Werte $X(t)$, $Y(t)$ an jeder Stelle $t \in j$ gemäß dem Satz aus Nr. 6 wählt: $X(t) = t_1$, $Y(t) = t_3$; $t < t_1 < t_3$. Die Funktion $q[X(t)] : q[Y(t)]$ $\big(= \varphi'(t)\big)$ besitzt an der Stelle t eine stetige Ableitung 2. Ordnung, wie uns aus Nr. 4 bekannt ist. Ist die Funktion q streng monoton, so folgt aus dem Satz in Nr. 6 und der Beziehung $\omega\chi = \varphi$

$$X(t) = q^{-1}[q[\chi(t)] \cdot \chi'(t)]; \qquad Y(t) = q^{-1}[q[\chi(t)] : \omega'[\chi(t)]],$$

wobei natürlich q^{-1} die zu q inverse Funktion bedeutet. Aus diesen Formeln folgt, daß die Funktionen X, Y im Intervall j stetig sind.

B. SPEZIELLE PROBLEME ÜBER ZENTRALDISPERSIONEN

Dieses Kapitel ist Untersuchungen über spezielle Probleme aus der Theorie linearer oszillatorischer Differentialgleichungen 2. Ordnung gewidmet. Es handelt sich um Probleme, die mit dem Begriff der Zentraldispersionen zusammenhängen und unter Anwendung der in dem vorherigen Kapitel 1 entwickelten Theorie gelöst werden können.

§ 14. Verlängerung von Lösungen einer Differentialgleichung (q) und ihrer Ableitungen

In diesem Paragraphen behalten wir die bisherigen Voraussetzungen: (q) oszillatorisch, $j = (a, b)$, $q < 0$ für alle $t \in j$ bei. Diese letzte Voraussetzung wird jedoch in Nr. 1 (über Verlängerung von Lösungen) nicht benötigt, sondern erst in Nr. 2 (über Verlängerung der Ableitungen von Lösungen).

1. Verlängerung von Lösungen der Differentialgleichung (q). Die elementare Theorie der linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung lehrt, daß für jedes Integral v von (q) die in einer Umgebung einer von jeder Nullstelle des Integrals v