Doplňky

In: Vojtěch Jarník (author): Matematická analýza pro 3. semestr. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1978. pp. 234--244.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402341

Doplňky

Tyto doplňky obsahují v § 1 - 4 několik věcí z teorie posloupností a z diferenciálního počtu, které se někdy přednášejí již v 1.ročníku, ale nejsou obsaženy ve většině úvodních knih. Budu mluvit jen o reálných číslech a funkcích, proto budu slovo reálný často vynechávat.

Odchylný charakter má § 5. V něm definuji pojem spojitosti, limity a derivace funkce komplexní proměnné a dokazuji, že věta 52 (o derivování mocninné řady) platí i pro komplexní x.

§ 1. Limes superior a limes inferior posloupnosti.

Budiž dána posloupnost reálných čísel

(1) $$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

Tato posloupnost může a nemusí mít limitu. Zavedeme nyní dva pojmy, které jsou jakousi náhražkou limity, když limita neexistuje, a které splývají s limitou, když limita existuje.

I. Nechť především posloupnost (1) je shora omezená, takže existuje číslo

$$G_1 = \sup\{a_1, a_2, a_3, \ldots\} .$$

Vynechávejme nyní postupně členy $a_1, a_2, \ldots$ a definujme

$$G_2 = \sup\{a_2, a_3, a_4, \ldots\} ,$$

$$G_3 = \sup\{a_3, a_4, a_5, \ldots\} ,$$

obecně

(2) $$G_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\} .$$

Zřejmě je $G_1 \geqq G_2 \geqq G_3 \geqq \ldots$, takže existuje limita (vlastní nebo $-\infty$)

$$\lim_{n\to\infty} G_n .$$

Tuto limitu nazveme limes superior posloupnosti (1); znak

(3) $$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} G_n .$$

II. Nechť za druhé posloupnost (1) není shora omezená, takže ani žádná z posloupností $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$ není shora omezená. Potom definujeme (což je zcela přirozené)

(4) $$\limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty \ .$$

Podobně zavedeme limes inferior posloupnosti (1), znak $\liminf_{n\to\infty} a_n$:

I. Je-li posloupnost (1) zdola omezená, klademe $g_1 = \inf\{a_1, a_2, \ldots\}$ a obecně pro $n = 1, 2, 3, \ldots$

(5) $$g_n = \inf\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\} \ .$$

Je zřejmě $g_1 \leqq g_2 \leqq g_3 \leqq \ldots$, takže existuje limita (vlastní nebo $+\infty$) $\lim_{n\to\infty} g_n$.

Definujme pak

(6) $$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} g_n \ .$$

II. Není-li posloupnost (1) zdola omezená, definujeme (což je rovněž zcela přirozené)

(7) $$\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty \ .$$

<u>Poznámka.</u> Dosud jsme symbolů $+\infty$, $-\infty$ užívali jen k stručnému vyjádření jistých vztahů. Např. znak $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ byl jen zkráceným zápisem tohoto výroku: Ke každému reálnému číslu K existuje přirozené číslo n_0 tak, že pro všechna přirozená $n \geqq n_0$ je $a_n > K$. Abychom mohli následující věty vyslovit v jednoduchém tvaru, bude vhodné zavést $+\infty$, $-\infty$ jako samostatné objekty našich úvah. Rozšíříme tedy množinu E_1 všech reálných čísel o dva nové prvky, které označíme $+\infty$, $-\infty$. Množinu, která vznikne přidáním prvků $+\infty$, $-\infty$ k množině E_1, označím E_1^*. Prvkům $+\infty$, $-\infty$ budu říkat nevlastní čísla; název "reálné číslo" zachovám jako dosud pro čísla z E_1. Bude pro nás účelné, rozšířit na E_1^* uspořádání množiny E_1 takto:

Je-li $a \in E_1$, klademe $-\infty < a$, $a < +\infty$, a konečně $-\infty < +\infty$. Základní zákony o uspořádání (věty 11 a 12 z DI) platí i při tomto rozšíření. Je jistě jasné, co znamenají znaky $>$, $\leqq$, $\geqq$. Po tomto rozšíření má E_1^* na rozdíl od E_1 největší a nejmenší prvek (totiž $+\infty$ a $-\infty$).

<u>Věta A</u> I. Vždy je

(8) $$\liminf_{n\to\infty} a_n \leqq \limsup_{n\to\infty} a_n .$$

II. Limita $\lim_{n\to\infty} a_n$ (vlastní nebo nevlastní) existuje tehdy a jen tehdy, platí-li v (8) znamení rovnosti, načež je

(9) $$\lim_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n .$$

Důkaz. I. Není-li (1) shora omezená, je pravá strana v (8) $+\infty$ a tedy (8) jistě platí. Není-li (1) zdola omezená, je levá strana v (8) $-\infty$, a tedy (8) jistě platí. Je-li konečně (1) omezená (shora i zdola), je podle (2), (5) $g_n \leqq G_n$ a tedy $\lim\limits_{n\to\infty} g_n \leqq \lim\limits_{n\to\infty} G_n$, což podle (3), (6) dává (8).

II. Také důkaz tvrzení II rozdělíme na tři části. Napřed vezměme případ, že (1) je posloupnost omezená. Potom podle definice je

$$-\infty < \liminf_{n\to\infty} a_n \leqq \limsup_{n\to\infty} a_n < +\infty .$$

Rovněž limita $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ může být jen vlastní. Předpokládejme napřed, že

(10) $$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = A$$

tj. $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = \lim\limits_{n\to\infty} G_n = A$. Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje n_0 tak, že pro všechna $n \geqq n_0$ je $A - \varepsilon \leqq g_n \leqq G_n \leqq A + \varepsilon$, speciálně tedy $A - \varepsilon \leqq g_{n_0} \leqq$ $\leqq G_{n_0} \leqq A + \varepsilon$. Ale z definice čísel g_{n_0}, G_{n_0} plyne, že pro všechna $n \geqq n_0$ je $g_{n_0} \leqq a_n \leqq G_{n_0}$, tedy $A - \varepsilon \leqq a_n \leqq A + \varepsilon$, tj.

(11) $$\lim_{n\to\infty} a_n = A .$$

Předpokládejme za druhé, že platí (11); je to ovšem vlastní limita. Potom ke každému $\varepsilon > 0$ existuje n_0 tak, že pro všechna $n \geqq n_0$ je $A - \varepsilon \leqq a_n \leqq A + \varepsilon$.

Číslo $A + \varepsilon$ je tedy horním a číslo $A - \varepsilon$ dolním odhadem posloupnosti $a_{n_0}, a_{n_0+1}, \ldots$, takže $A - \varepsilon \leqq g_{n_0} \leqq G_{n_0} \leqq A + \varepsilon$.

Ježto pro $n \geqq n_0$ je $g_{n_0} \leqq g_n \leqq G_n \leqq G_{n_0}$, je $A - \varepsilon \leqq g_n \leqq G_n \leqq A + \varepsilon$ pro všechna $n \geqq n_0$; to znamená, že platí (10). Pro omezenou posloupnost (1) jsme tedy již dokázali, že z (10) plyne (11) a že z (11) plyne (10).

Nechť za druhé posloupnost (1) není shora omezená, takže podle definice je $\limsup a_n = +\infty$; limita $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ (existuje-li) nemůže být jiná než $+\infty$. Stačí tedy dokázat toto: Rovnost

(12) $$\liminf_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

platí tehdy a jen tehdy, když

(13) $$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty .$$

Platí-li (12), potom jistě posloupnost (1) je zdola omezená (jinak by platilo (7)), tedy podle definice $\lim_{n\to\infty} q_n = +\infty$. K libovolnému K existuje tedy jistě n_0 tak, že $q_{n_0} \geqq K$, načež ovšem (podle definice q_n) je $a_n \geqq K$ pro všechna $n \geqq n_0$; tedy platí (13). Nechť naopak platí (13). Potom k libovolnému K existuje n_0 tak, že $a_n \geqq K$ pro všechna $n \geqq n_0$. Číslo K je tedy dolním odhadem posloupnosti $a_{n_0}, a_{n_0+1}, \ldots$, takže $q_{n_0} \geqq K$ a tedy (monotonie!) $q_n \geqq K$ pro všechna $n \geqq n_0$. Tedy $\lim_{n\to\infty} q_n = +\infty$, tj. platí (12).

Poslední případ (když (1) není zdola omezená) se řeší obdobně.

Poznámka. Místo $\lim\sup$, $\lim\inf$ se někdy píše $\overline{\lim}$, $\underline{\lim}$.

§ 2. Podmínka Bolzanova - Cauchyova pro posloupnosti.

Z věty A odvodíme nyní důležitou nutnou a postačující podmínku pro konvergenci posloupnosti, tzv. podmínku Bolzanovu-Cauchyovu [1].

Věta B. Posloupnost

(1) $$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

(reálných čísel) je konvergentní (tj. má vlastní limitu) tehdy a jen tehdy, je-li splněna tato podmínka:

(B.C.) Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje přirozené n_0 tak, že pro všechna přirozená p je $|a_{n_0+p} - a_{n_0}| \leqq \varepsilon$.

Důkaz. 1. Nechť existuje vlastní $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Budiž $\varepsilon > 0$. Potom existuje přirozené n_0 tak, že pro všechna přirozená $n \geqq n_0$ je $|a_n - a| \leqq \frac{1}{2}\varepsilon$. Je-li tedy p přirozené číslo, je

$$|a_{n_0+p} - a| \leqq \frac{1}{2}\varepsilon, \quad |a_{n_0} - a| \leqq \frac{1}{2}\varepsilon,$$

a odtud vskutku $|a_{n_0+p} - a_{n_0}| \leqq \varepsilon$.

2. Nechť podmínka (B.C.) je splněna. Potom např. k číslu $\varepsilon = 1$ existuje n_1 tak, že pro všechna přirozená p je $|a_{n_1+p} - a_{n_1}| < 1$, tj. $a_{n_1} - 1 < a_n < a_{n_1} + 1$ pro všechna $n > n_1$. Tj. posloupnost $a_{n_1+1}, a_{n_1+2}, \ldots$ je omezená, a tedy i celá posloupnost $a_1, a_2, a_3, \ldots$ je omezená. Čísla $\lim_{n\to\infty}\sup a_n$,

[1] Jiný důkaz (přímo pro posloupnost s komplexními členy) je podán v kap. III. § 1.

$\lim\limits_{n\to\infty} \inf a_n$ jsou tedy jistě konečná: $-\infty < \lim \inf a_n \leq \lim \sup a_n < +\infty$. Označme: $\lim\limits_{n\to\infty} \inf a_n = \alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sup a_n = \beta$. Stačí dokázat, že $\alpha = \beta$, neboť potom podle věty A existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$. Užijeme-li označení (2), (5), z § 1, je zřejmě $\beta \leq G_n$, $\alpha \geq g_n$ pro každé n (neboť $\beta = \lim\limits_{n\to\infty} G_n$, $G_n \geq G_{n+1}$, $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} g_n$, $g_n \leq g_{n+1}$). Tedy je $0 \leq \beta - \alpha \leq G_n - g_n$ pro každé n. Budiž $\varepsilon > 0$. Podle podmínky (B.C.) existuje přirozené n_0 tak, že pro všechna přirozená p je

$$a_{n_0} - \frac{\varepsilon}{2} \leq a_{n_0+p} \leq a_{n_0} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tedy číslo $a_{n_0} + \frac{\varepsilon}{2}$ je horním odhadem posloupnosti $a_{n_0}, a_{n_0+1}, \ldots$ a číslo $a_{n_0} - \frac{\varepsilon}{2}$ je jejím dolním odhadem, tedy $a_{n_0} - \frac{\varepsilon}{2} \leq g_{n_0} \leq G_{n_0} \leq$ $\leq a_{n_0} + \frac{\varepsilon}{2}$. Odtud $G_{n_0} - g_{n_0} \leq \varepsilon$, tedy $0 \leq \beta - \alpha \leq \varepsilon$. Poslední nerovnost platí pro každé kladné ε, tedy nemůže být $\beta - \alpha$ kladné číslo, tedy $\beta - \alpha = 0$, $\beta = \alpha$. Důkaz je hotov.

Poznámka 1. Podmínka (B.C.) je důležitá z tohoto důvodu: Chceme-li dokázat přímo z definice limity, že posloupnost $a_1, a_2, \ldots$ je konvergentní, musíme nějak předem uhodnout hodnotu a té limity - jinak bychom nemohli ověřovat nerovnost $|a_n - a| < \varepsilon$. Podmínka (B.C.) je důležitá právě proto, že obsahuje jen členy dané posloupnosti, takže můžeme pomocí této podmínky zjišťovat konvergenci posloupnosti, i když nevíme, jaká by asi mohla být hodnota její limity. Mimoto je to podmínka zcela vyčerpávající, totiž nutná a postačující. Nevýhodou je, že se tato podmínka často obtížně ověřuje. Proto saháme často k podmínkám speciálnějším, které se snadněji ověřují. Zjistím-li např., že posloupnost je omezená a monotonní, vím už, že je konvergentní. Tyto speciálnější podmínky ovšem leckdy selžou, takže podmínka (B.C.) zůstává podmínkou základní důležitosti pro teoretické a často i pro praktické zkoumání konvergence.

Poznámka 2. Podmínce (B.C.) lze dát tento ekvivalentní tvar:

(B.C.)′ Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje přirozené n_0 tak, že pro všechna přirozená $m \geq n_0$, $n \geq n_0$ je $|a_m - a_n| \leq \varepsilon$.

Důkaz. 1. Je-li splněna (B.C.)′, smím do ní dosadit speciálně $n = n_0$, $m = n_0 + p$ (p jakékoliv přirozené číslo), a odtud je patrno, že je splněna podmínka (B.C.).

2. Nechť je splněna podmínka (B.C.). Budiž $\varepsilon > 0$. Potom existuje přir. n_0 tak, že pro všechna přirozená p je $|a_{n_0+p} - a_{n_0}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Tedy pro všechna přirozená $n \geq n_0$ platí $|a_n - a_{n_0}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ (pro $n = n_0$ je to jasné, a každé $n > n_0$ lze psát ve tvaru $n_0 + p$). Je-li tedy $n \geq n_0$, $m \geq n_0$, je

$$|a_n - a_{n_0}| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad , \quad |a_m - a_{n_0}| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad ,$$

tedy $|a_m - a_n| \leq \varepsilon$; tj. je splněna podmínka (B.C.)'.

§ 3. Podmínka Bolzanova - Cauchyova pro funkce.

Omezím se na reálné funkce jedné reálné proměnné. Budiž $c \in E_1$. Mohli bychom zavést např. limes superior funkce f v bodě c zprava (znak $\limsup_{x \to c+} f(x)$) takto: Jestliže neexistuje žádný interval $(c, c + \Delta)$ $(\Delta > 0)$, ve kterém by f byla shora omezená, definujeme $\limsup_{x \to c+} f(x) = +\infty$. Jestliže však existuje $\Delta > 0$ tak, že f je omezená v intervalu $(c, c + \Delta)$, definujeme pro $x \in (c, c + \Delta)$

$$G(x) = \sup_{\xi \in (c, x)} f(\xi) .$$

Tato funkce je neklesající v $(c, c + \Delta)$ a tedy existuje limita (vlastní nebo $-\infty$) $\lim_{x \to c+} G(x)$, kterou nazvu $\limsup_{x \to c+} f(x)$. Podobně lim inf a podobně zleva. Daly by se odvodit obdobné výsledky jako v § 1. Nebudu to však provádět, nýbrž použiji pouze věty B z § 2, abych odvodil obdobnou podmínku pro existenci vlastní limity funkce. Přitom vyjdu z tvaru (B.C.)'.

<u>Věta C.</u> Budiž $c \in E_1$, f reálná funkce jedné reálné proměnné. Funkce f má vlastní limitu zprava v bodě c tehdy a jen tehdy, je-li splněna tato podmínka:

(B.C.)'' Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna x', x'' intervalu $(c, c + \delta)$ je $|f(x') - f(x'')| \leq \varepsilon$.

<u>Důkaz.</u> 1. Nechť $\lim_{x \to c+} f(x) = \alpha$ (vlastní). Budiž $\varepsilon > 0$. Potom existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $x' \in (c, c + \delta)$ je $|f(x') - \alpha| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Je-li tedy také $x'' \in (c, c + \delta)$, je $|f(x'') - \alpha| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, a tedy $|f(x') - f(x'')| \leq \varepsilon$, podmínka (B.C.)'' je splněna.

2. Nechť naopak je splněna podmínka (B.C.)'' . Položme $x_n = c + \frac{1}{n}$; nezáleží na speciální volbě čísel x_n , je jen důležité, aby bylo

$$(1) \qquad x_n > c , \quad \lim_{n \to \infty} x_n = c .$$

Tvrdím, že posloupnost čísel

$$(2) \qquad f(x_1), f(x_2), \ldots$$

je konvergentní. K tomu stačí dokázat, že posloupnost (2) splňuje podmínku (B.C.)' z poznámky 2, § 2. Budiž $\varepsilon > 0$; podle podmínky (B.C.)'' existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna x', x'' intervalu $(c, c+\delta)$ je $|f(x') - f(x'')| \leqq \varepsilon$. Ale z (1) plyne, že k našemu $\delta > 0$ existuje n_0 tak, že pro všechna $n \geqq n_0$ je $x_n \in (c, c+\delta)$. Je-li tedy $n \geqq n_0$, $m \geqq n_0$, je

$$|f(x_m) - f(x_n)| \leqq \varepsilon .$$

Posloupnost (2) tedy vskutku splňuje podmínku (B.C.)', a tedy existuje vlastní

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \alpha . \tag{3}$$

Stačí nyní, abychom dokázali, že

$$\lim_{x \to c+} f(x) = \alpha . \tag{4}$$

(Populárně řečeno: už jsme dokázali, že $f(x)$ se blíží číslu α, když x se blíží číslu c zprava hodnotami x_1, x_2, x_3, ...; máme ještě dokázat, že se $f(x)$ blíží číslu α, ať se x jakkoliv blíží zprava číslu c.) Rovnost (4) dokážeme pomocí (1), (3) a pomocí podmínky (B.C.)''. Budiž $\varepsilon > 0$. Existuje především (podle (B.C.)'') číslo $\delta > 0$ tak, že pro všechna x', x'' intervalu $(c, c+\delta)$ platí

$$|f(x') - f(x'')| \leqq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5}$$

Za druhé existuje podle (3) n_1 tak, že

$$|f(x_n) - \alpha| \leqq \frac{\varepsilon}{2} \tag{6}$$

pro všechna $n \geqq n_1$. Za třetí existuje podle (1) n_2 tak, že

$$x_n \in (c, c+\delta) \quad \text{pro všechna} \quad n \geqq n_2. \tag{7}$$

Zvolme $n_0 = \mathrm{Max}(n_1, n_2)$. Potom především je $x_{n_0} \in (c, c+\delta)$, tedy mohu do (5) dosadit $x'' = x_{n_0}$ a vidím, že platí

$$|f(x') - f(x_{n_0})| \leqq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pro každé} \quad x' \in (c, c+\delta) .$$

Za druhé je $n_0 \geqq n_1$, a tedy podle (6) je $|f(x_{n_0}) - \alpha| \leqq \frac{\varepsilon}{2}$.

Spojením těchto dvou nerovností dostáváme toto: K libovolně danému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $x' \in (c, c+\delta)$ je $|f(x') - \alpha| \leqq \varepsilon$. To však právě znamená, že platí (4).

Poznámka. Podobné podmínky platí pro existenci vlastní limity v bodě c zleva, v bodě c (oboustranně), v bodě $+\infty$, v bodě $-\infty$. Postup je všude stejný, pouze při limitě zleva se volí (např.) $x_n = c - \frac{1}{n}$, při limitě v bodě $+\infty$ se může volit $x_n = n$, při limitě v bodě $-\infty$ lze volit

$x_n = -n$. Vcelku to můžeme zapsat do schematu: Funkce f má vlastní limitu (v některém z těchto pěti významů) tehdy a jen tehdy, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje množina M tak, že pro všechna x', x'' této množiny je $|f(x') - f(x'')| \leqq \varepsilon$. Přitom tvar množiny M je dán touto tabulkou:

limita v bodě c zprava	$M = (c, c+\delta)$ $(\delta > 0)$
limita v bodě c zleva	$M = (c-\delta, c)$ $(\delta > 0)$
limita v bodě c	$M = (c-\delta, c) \cup (c, c+\delta)$ $(\delta > 0)$
limita v bodě $+\infty$	$M = (x_0, +\infty)$ $(x_0 \in E_1)$
limita v bodě $-\infty$	$M = (-\infty, x_0)$ $(x_0 \in E_1)$

Vše je tak názorné, že snad nepotřebuje dalších výkladů. Obdobné věty by se daly zcela obdobně odvodit pro limity funkcí několika proměnných. Např. funkce f (k proměnných) má vlastní limitu v bodě $c = [c_1, \ldots, c_k]$ tehdy a jen tehdy, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna x', x'' redukovaného okolí $U^*_\delta(c)$ je $|f(x') - f(x'')| \leqq \varepsilon$.

Ježto limita komplexní funkce se definuje rovnicí

$$\lim (g(x) + ih(x)) = \lim g(x) + i \lim h(x),$$

dají se tyto výsledky o existenci vlastní limity přenést okamžitě na komplexní funkce (ovšem pojmy lim sup, lim inf, které spočívají na uspořádání reálných čísel, se nedají přenést do oboru komplexních čísel).

§ 4. Jedna věta o derivaci.

Věta D. Nechť funkce f (reálná funkce jedné reálné proměnné) je spojitá zprava v bodě c a nechť existuje limita (vlastní nebo nevlastní)

(1) $$\lim_{x \to c+} f'(x) = \alpha .$$

Potom existuje derivace zprava v bodě

(2) $$f'_+(c) = \alpha .$$

Důkaz. Z (1) plyne, že existuje $\Delta > 0$ tak, že f má vlastní derivaci v intervalu $(c, c+\Delta)$. Ježto je f spojitá zprava v bodě c, je spojitá v $\langle c, c+\Delta)$. Buďiž $x \in (c, c+\Delta)$. Potom lze na interval $\langle c, x\rangle$ užít věty o přírůstku funkce. To znamená: existuje ξ tak, že

(3) $$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(\xi) .$$

Ježto ξ leží mezi c, x a ježto platí (1), plyne z (3) existence limity

$$(4) \qquad \lim_{x \to c+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \alpha \,, \text{ [1]}$$

tj. platí (1).

Podobná věta platí ovšem i pro derivaci zleva a tedy i pro oboustrannou derivaci. Věta je užitečná tehdy, jestliže bod c je jakýsi "obtížný" bod takový, že podle běžných pravidel dovedeme počítat $f'(x)$ např. v jistém redukovaném okolí bodu c, ale ne v bodě c samotném. Potom lze někdy existenci a hodnotu derivace $f'(c)$ (popříp. derivace zprava nebo zleva) zjistit limitním přechodem podle věty D. Nezapomeňte na předpoklad spojitosti funkce f v bodě c !

<u>Příklad 1.</u> Funkce $f(x) = \arcsin x$ je spojitá v $\langle -1, 1 \rangle$ a v <u>otevřeném</u> intervalu $(-1, 1)$ je $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Zřejmě je $\lim\limits_{x \to -1+} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty$, a tedy $f'_+(-1) = +\infty$. Obdobně se dostane $f'_-(1) = +\infty$.

<u>Příklad 2.</u> Funkce $f(x) = \arcsin(1 - x^2)$ je definována pro $1 - x^2 \geq -1$ (nerovnost $1 - x^2 \leq 1$ je splněna vždy), tj. pro $x^2 \leq 2$, tj. v intervalu $\langle -\sqrt{2}, \sqrt{2} \rangle$. Funkce $1 - x^2$ je v $\langle -\sqrt{2}, \sqrt{2} \rangle$ spojitá, a její hodnoty v tomto intervalu leží, jak jsme právě zjistili, v intervalu $\langle -1, 1 \rangle$, ve kterém zase "vnější" funkce $\arcsin$ je spojitá. Z toho plyne (viz JI věta 5 nebo v tomto textu věta 69), že naše funkce f je spojitá v $\langle -\sqrt{2}, \sqrt{2} \rangle$. Je-li x <u>uvnitř</u> tohoto intervalu, a přitom $x \neq 0$, je $0 < x^2 < 2$, tedy $-1 < 1 - x^2 < 1$, a lze derivovat podle běžných pravidel o složené funkci:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)^2}} \cdot (-2x) = \frac{-2x}{\sqrt{2x^2 - x^4}} = \frac{-2x}{|x| \sqrt{2 - x^2}} =$$

$$= \frac{-2 \operatorname{sgn} x}{\sqrt{2 - x^2}} \text{ [2]} .$$

---

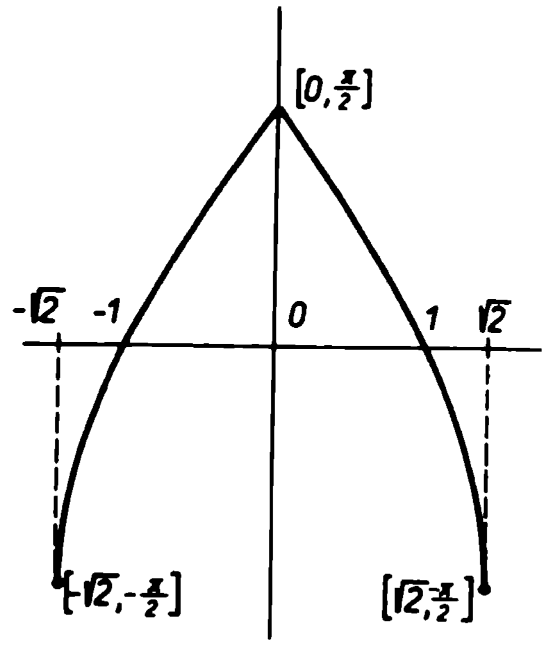
1) Podrobně: Budiž třeba limita v (1) vlastní. Budiž $\varepsilon > 0$. Existuje $\delta > 0$, $\delta < \Delta$ tak, že pro $\xi \in (c, c + \delta)$ je $|f'(\xi) - \alpha| < \varepsilon$; je-li $x \in (c, c + \delta)$, leží také ξ ze vzorce (3) v $(c, c + \delta)$, a tedy je $\left| \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} - \alpha \right| = |f'(\xi) - \alpha| < \varepsilon$; tedy platí (4). Podobně pro $\alpha = +\infty$, $\alpha = -\infty$.

2) Funkci $\operatorname{sgn} x$ (signum = znaménko) definujeme takto: $\operatorname{sgn} x = 1$ pro $x > 0$, $\operatorname{sgn} x = -1$ pro $x < 0$, $\operatorname{sgn} 0 = 0$.

Ze spojitosti funkce f plyne, že pro zjištění existence a výpočet zbývajících hodnot $f'_+(-\sqrt{2})$, $f'_-(\sqrt{2})$, $f'_+(0)$, $f'_-(0)$ se můžeme pokusit užít věty D. Vypočtěme příslušné limity (1); a dostáváme ihned:

$$f'_+(-\sqrt{2}) = +\infty \ , \ f'_-(\sqrt{2}) = -\infty \ ,$$
$$f'_+(0) = -\sqrt{2} \ , \ f'_-(0) = \sqrt{2} \ .$$

Když ještě uvážíme znaménko první a druhé derivace[3], dostáváme asi tento schematický obrázek (obr. 36):



Obr. 36.

Směrnice obou "polotečen" v bodě $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ jsou $\pm\sqrt{2}$.

§ 5. Zobecnění věty 52 na komplexní proměnnou.

Pojmy spojitosti a limity jsme definovali pro funkce reálné proměnné (nebo několika reálných proměnných). Nyní zavedeme tyto pojmy pro funkce jedné komplexní proměnné. Budiž f funkce komplexní proměnné; c, α buďte komplexní čísla. Říkáme, že f je spojitá v bodě c, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna (komplexní) x kruhu $|x - c| < \delta$ je $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$; říkáme, že $\lim_{x \to c} f(x) = \alpha$, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $x \neq c$ kruhu $|x - c| < \delta$ je $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$. Vidíte, že definice vypadají formálně stejně, jako u funkcí reálné proměnné; jde ovšem o komplexní x, c. Stejně jako u funkcí reálné proměnné se dokáže, že daná funkce f má v daném bodě c nejvýše jednu limitu.

Budiž dána opět funkce f a číslo c; zlomek $\frac{f(c+h) - f(c)}{h}$ je funkcí komplexní proměnné h. Derivaci $f'(c)$ funkce f v bodě c definujeme vzorcem

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \ ,$$

jestliže limita vpravo existuje. Dokážeme toto zobecnění věty 52:

---

[3] Snadno zjistíte, že $f''(x) < 0$ pro $0 < |x| < \sqrt{2}$.

Věta E. Nechť řada

(1) $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

má poloměr konvergence $R > 0$ $(0 < R \leq +\infty)$; pro $|x| < R$ položme

(2) $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n .$$

Potom funkce f má pro všechna komplexní $|x| < R$ derivaci

(3) $$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} .$$

Důkaz. Podle věty 51 má řada (3) rovněž poloměr konvergence R . Budiž c komplexní číslo, $|c| < R$. Máme dokázat, že funkce

$$\varphi(h) = \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(c+h)^n - c^n}{h}$$

komplexní proměnné h má v bodě $h = 0$ limitu $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n c^{n-1}$.

Zvolme číslo ρ tak, že $|c| < \rho < R$ a omezme se na h, pro něž

$0 < |h| < \rho - |c|$, takže $|c| + |h| < \rho$.

Je

(4) $$\varphi(h) - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n c^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{(c+h)^n - c^n}{h} - nc^{n-1} \right).$$

Člen s $n = 1$ dává nulu, členy s $n = 2, 3, 4, \ldots$ vypočteme z binomické poučky:

$$\frac{(c+h)^n - c^n}{h} - nc^{n-1} = \frac{1}{h} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^k c^{n-k} - \frac{c^n}{h} - nc^{n-1} =$$
$$= \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^{k-1} c^{n-k}.$$

Píši-li $|c|$, $|h|$ místo c , h , dostávám

$$\frac{(|c| + |h|)^n - |c|^n}{|h|} - n|c|^{n-1} = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |h|^{k-1} |c|^{n-k} ;$$

srovnáním obou posledních vzorců dostáváme

(5) $$\left| \frac{(c+h)^n - c^n}{h} - nc^{n-1} \right| \leq \frac{(|c| + |h|)^n - |c|^n}{|h|} - n|c|^{n-1} .$$