V. SOUŘADNICE, GRAFY, NEROVNOSTI

§ 1. Pojem funkce. Přímá úměrnost. Tangens ostrého úhlu

Jedním z nejdůležitějších pojmů vyšší matematiky je pojem funkce, který si v tomto paragrafu objasníme na několika příkladech z elementární geometrie. Říkáme, že jedna veličina je *funkcí* veličiny druhé, je-li první veličina určitým způsobem *závislá* na veličině druhé; to znamená, že když známe určitou hodnotu veličiny druhé, můžeme z ní vypočítat příslušnou hodnotu veličiny první.

Nechť na př. písmeno s znamená délku strany čtverce a nechť o znamená obvod téhož čtverce. Veličina o je funkcí veličiny s; jak je známo, je

$$o = 4s\,. \tag{1,1}$$

Připomeňme si, že vzorec (1,1) platí pouze tehdy, jsou-li obě veličiny s a o vyjádřeny ve stejné jednotce. V theoretických úvahách se za délkovou jednotku volí nejčastěji 1 cm.

Také obsah čtverce, který označíme p, je funkcí veličiny s; jak známo, je $p = s\,.\,s$ neboli

$$p = s^2\,. \tag{1,2}$$

Vzorec (1,2) ovšem předpokládá, že délková jednotka a plošná jednotka byly voleny *souhlasně.* Je-li délkovou jednotkou 1 cm, je příslušnou jednotkou plošnou 1 cm^2.

(1,1) a (1,2) jsou příklady na funkce *jedné proměnné*, t. j. v každém příkladě se vyskytují dvě veličiny, z nichž jedna (v obou příkladech je to veličina s) je t. zv. *nezávisle proměnná*, druhá pak (v prvním příkladě veličina o, ve druhém veličina p) je funkcí této nezávisle proměnné, a říká se jí proto někdy *závisle proměnná.*

Poznámka 1,1. O slově proměnná viz poznámku IV 7,1.

Jsou také funkce dvou, tří i více proměnných. Nechť na př. a, b jsou rozměry obdélníka a nechť O znamená jeho obvod, P jeho obsah. Jak známo, je $O = 2a + 2b$ neboli

$$O = 2(a + b) \tag{1,3}$$

a dále $P = a\,.\,b$ neboli

$$P = ab\,. \tag{1,4}$$

Ve vzorci (1,3) se vyskytují tři veličiny a, b, O; veličiny a, b jsou nezávisle proměnné, třetí veličina O je závisle proměnná a je funkcí prvních dvou. Podobně ve vzorci (1,4) veličina P je funkcí dvou nezávisle proměnných a, b.

Abychom dostali jednoduché funkce tří proměnných, všimněme si kvádru, jehož rozměry označíme a, b, c. Známe-li tyto tři rozměry, můžeme vypočíst jak objem kvádru, který označíme V, tak i povrch kvádru, který označíme S; jak známo, je

$$V = abc, \tag{1,5}$$

$$S = 2(ab + ac + bc)\,. \tag{1,6}$$

Budeme se zabývat především funkcemi *jedné* proměnné, jednak proto, že je to nejjednodušší případ, jednak proto, že všech výsledků, které získáme studiem funkcí jedné proměnné, dá se užít i na funkce několika proměnných. Všímáme-li si totiž na př. ve vzorcích (1,3) a (1,4) jen těch obdélníků, u kterých rozměr b má určitou číselnou hodnotu, třeba

$$b = 2,\, b = 5,\, b = \tfrac{2}{3} \quad \text{atd.}, \tag{1,7}$$

bude obvod O a obsah P takového obdélníka funkcí jedné proměnné, totiž rozměru a; podle (1,3) a (1,4) máme v jednotlivých případech (1,7):

$$O = 2a + 4,\ O = 2a + 10,\ O = 2a + \tfrac{4}{3} \quad \text{atd.},$$
$$P = 2a,\ P = 5a,\ P = \tfrac{2}{3}a \quad \text{atd.}$$

Tedy z funkce (1,3) nebo (1,4) dvou proměnných a, b dostaneme funkci jedné proměnné a, jestliže za proměnnou b dosadíme jakoukoli určitou číselnou hodnotu.

Poznámka 1,2. Vyjdeme-li od funkce dvou proměnných, můžeme dospět k funkci jedné proměnné také jinými způsoby než tím, že za jednu z obou nezávisle proměnných dosadíme určitou číselnou hodnotu. Všímáme-li si na př. ve vzorcích (1,3) a (1,4) pouze takových obdélníků, jejichž oba rozměry a, b jsou si rovny, t. j. čtverců, dostaneme z (1,3) a (1,4) vzorce

$$O = 4a\,, \quad P = a^2\,,$$

které se liší pouze označením od vzorců (1,1) a (1,2).

Podobně z funkce (1,5) nebo (1,6) *tří* proměnných a, b, c vznikne funkce *jedné* proměnné a, jestliže za proměnné b, c dosadíme určité číselné hodnoty. Na př. dosazením

$$b = 5,\, c = 4 \quad \text{nebo} \quad b = \tfrac{2}{3},\, c = \tfrac{4}{5}$$

vzniknou funkce jedné proměnné a:

$$V = 20a,\ S = 2(9a + 20) \quad \text{nebo} \quad V = \tfrac{8}{15}a,\ S = \tfrac{4}{15}(11a + 4).$$

Z funkce (1,5) nebo (1,6) *tří* proměnných a, b, c dostaneme funkci *dvou* proměnných a, b, jestliže za proměnnou c dosadíme určitou číselnou hodnotu. Na př. dosazením $c = 3$ nebo $c = \frac{2}{3}$ vzniknou funkce dvou proměnných a, b:

$$V = 3ab,\ S = 2ab + 6(a + b) \quad \text{nebo} \quad V = \tfrac{2}{3}ab,\ S = 2ab + \tfrac{4}{3}(a + b).$$

Příklad funkce dvou proměnných dává mimo jiné známá *Pythagorova věta*, podle které lze vypočítat délku přepony pravoúhlého trojúhelníka, známe-li délky obou odvěsen. Délka přepony je funkcí délek obou odvěsen, Pythagorova věta říká, jak se tato funkce počítá. Znamenají-li písmena a, b délky obou odvěsen, c délku přepony, je

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}\,. \tag{1,8}$$

V tomto případě máme tedy tři veličiny a, b, c, z nichž a, b jsou nezávisle proměnné a c je jejich funkcí.

Je mnoho druhů funkcí a pro začátečníka mají největší význam právě ty nejjednodušší. Věnujme trochu pozornosti zcela elementárnímu a všem čtenářům dobře známému příkladu přímé úměrnosti. Vyjděme od prostého praktického příkladu. Dejme tomu, že auto se pohybuje po silnici rychlostí 45 km za hodinu. Dráha, kterou auto ujede za určitou dobu, závisí na této době neboli je funkcí doby. Zvolíme-li minutu za časovou jednotku a 1 km za délkovou jednotku, můžeme sestavit tabulku:

doba	10	20	30	40	50	60	70
dráha	$7\frac{1}{2}$	15	$22\frac{1}{2}$	30	$37\frac{1}{2}$	45	$52\frac{1}{2}$

Tabulku bychom mohli ovšem libovolně rozšířit. Zákonitost závislosti dráhy na době se dá vyslovit různými způsoby. Zvolíme si ten, který je nejvhodnější pro naše další úvahy. Poměr dvou veličin, tedy zlomek

$$\frac{\text{dráha}}{\text{doba}} \tag{1,9}$$

má ve všech případech stejnou hodnotu

$$\frac{7\frac{1}{2}}{10} = \frac{15}{20} = \frac{22\frac{1}{2}}{30} = \frac{30}{40} = \ldots = \frac{3}{4}\,.$$

Říkáme, že tento poměr je *stálý* neboli že je to *konstanta*. Slovo konstanta v matematice znamená takovou veličinu, která v průběhu prováděné úvahy má stále touž číselnou hodnotu. V našem případě konstanta (1,9) má číselnou hodnotu $\frac{3}{4}$. Označíme-li dobu písmenem t a dráhu písmenem s, je tedy

$$\frac{s}{t} = \frac{3}{4}$$

neboli

$$s = \tfrac{3}{4}t\,. \tag{1,10}$$

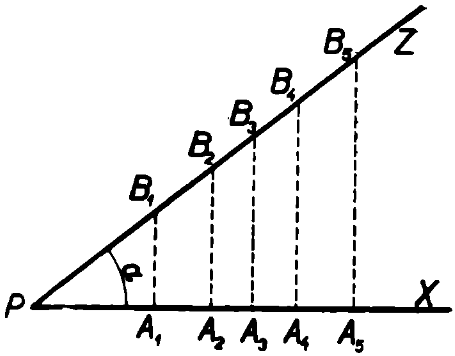
Jiný velmi známý příklad přímé úměrnosti máme v závislosti obvodu kružnice na jejím poloměru. Kolikrát větší je poloměr, tolikrát větší je obvod. Proto zlomek

$$\frac{\text{obvod}}{\text{poloměr}}$$

má u všech kružnic touž číselnou hodnotu, je to konstanta. Polovina této konstanty je známé „Ludolfovo“ číslo π. Znamená-li tedy r poloměr kružnice, l obvod, je

$$l = 2\pi r\,. \tag{1,11}$$

Uveďme si ještě jeden důležitý příklad přímé úměrnosti. Budiž dán nějaký ostrý úhel $\sphericalangle XPZ = \alpha$. Zvolíme-li si na ramenu PX úhlu α libovolný bod A a v něm vztyčíme kolmici k přímce PX, protne tato kolmice druhé rameno PZ úhlu α v bodě B. Tím vznikne pravoúhlý trojúhelník PAB s pravým úhlem při vrcholu A. Jelikož poloha bodu A na ramenu PX úhlu α je libovolná, můžeme si takových trojúhelníků myslit nekonečně mnoho. V obr. 4 je vyznačeno pět možných poloh, které jsou rozlišeny indexy. Všecky naše pravoúhlé trojúhelníky si jsou podobné. Proto poměr



Obr. 4.

$$\frac{AB}{PA} \tag{1,12}$$

je konstanta, jejíž velikost je určena úhlem α. Jak známo, jmenuje se tato konstanta *tangens* ostrého úhlu α a značí se $\operatorname{tg} \alpha$. Je tedy

$$\frac{AB}{PA} = \operatorname{tg} \alpha \tag{1,12'}$$

neboli

$$AB = \operatorname{tg} \alpha \,.\, PA \,. \tag{1,13}$$

Délka úsečky AB je přímo úměrná délce úsečky PA.

Poznámka 1,3. Vedle poměru (1,12) jsou také

$$\frac{AB}{PB}, \quad \frac{PA}{PB} \tag{1,14}$$

konstanty; jak známo, jmenuje se první z obou konstant (1,14) *sinus* ostrého úhlu α a značí se $\sin \alpha$, druhá pak se jmenuje *kosinus* ostrého úhlu α a značí se $\cos \alpha$. Je tedy

$$\frac{AB}{PB} = \sin \alpha \,, \qquad \frac{PA}{PB} = \cos \alpha$$

neboli

$$AB = \sin \alpha \,.\, PB \,, \quad PA = \cos \alpha \,.\, PB \,. \tag{1,15}$$

Podle (1,12') a (1,15) je pro každý ostrý úhel α

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \,. \tag{1,16}$$

Poznámka 1,4. Poměr

$$\frac{PA}{AB} \,,$$

jak známo, se jmenuje *kotangens* úhlu α a značí se $\operatorname{cotg} \alpha$. Je tedy

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{cotg} \alpha}, \quad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \,. \tag{1,17}$$

Poznámka 1,5. Souvislosti mezi čísly $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{cotg} \alpha$ plynou ze vzorců (1,16), (1,17) a z Pythagorovy věty. Volíme-li pravoúhlý trojúhelník PAB tak, aby jeho přepona PB byla rovna jednotce délky, je $PB = 1$ a podle (1,15) je $AB = \sin \alpha$, $PA = \cos \alpha$, takže Pythagorova věta dává vzorec

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \,. \tag{1,18}$$

Jestliže obě strany vzorce (1,18) dělíme číslem $\cos^2\alpha$, dostaneme

$$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}\,; \tag{1,19}$$

jestliže obě strany vzorce (1,18) dělíme číslem $\sin^2\alpha$, dostaneme

$$1 + \operatorname{cotg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}\,. \tag{1,20}$$

Ze vzorců (1,16) až (1,20) plyne, že pro každý ostrý úhel α je

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}\,,\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}\,,\\ \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}\,; \end{aligned}\right\} \tag{1,21}$$

$$\left.\begin{aligned} \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}\,,\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}\,,\\ \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}\,; \end{aligned}\right\} \tag{1,22}$$

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}\,,\quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}\,,\quad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\,; \tag{1,23}$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\alpha}}\,,\quad \cos\alpha = \frac{\operatorname{cotg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\alpha}}\,,\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha}\,. \tag{1,24}$$

Poznámka 1,6. Jak známo, je součet obou ostrých úhlů pravoúhlého trojúhelníka roven 90°. Z toho plynou pro každý ostrý úhel α známé vzorce

$$\begin{aligned} \sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha,\quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha,\\ \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{cotg}\alpha,\quad \operatorname{cotg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha\,. \end{aligned} \tag{1,25}$$

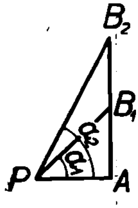
Nahradíme-li ostrý úhel α úhlem $90^\circ - \alpha$, což je jistě dovoleno, protože zároveň s α je také $90^\circ - \alpha$ ostrý úhel, vzniknou ze vzorců (1,21) vzorce (1,22) a obráceně z (1,22) vzniknou znovu (1,21); touž záměnou vzniknou ze vzorců (1,23) vzorce (1,24) a obráceně ze (1,24) vzniknou znovu (1,23).

Ze všech čtyř čísel $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{cotg}\alpha$ má pro tuto knihu důležitost pouze číslo $\operatorname{tg}\alpha$. Podle (1,17) a (1,25) je

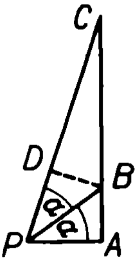
$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \tag{1,26}$$

pro každý ostrý úhel α. Dosadíme-li $\alpha = 45^\circ$, vyjde $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$.

Jestliže v našem pravoúhlém trojúhelníku PAB je $PA = 1$, je $AB = \operatorname{tg}\alpha$. Z toho je patrné, že zvětšíme-li úhel α, zvětší se také číslo $\operatorname{tg}\alpha$; viz obr. 5, ve kterém $PA = 1$, $AB_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$, $AB_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$. *Není* však pravda, že *kolikrát* zvětšíme úhel α, *tolikrát* se snad zvětší číslo $\operatorname{tg}\alpha$. V obr. 6 je $PA = 1$, tedy $AB = \operatorname{tg}\alpha$, $AC = \operatorname{tg} 2\alpha$; D je pata kolmice spuštěné z bodu B na PC, trojúhelníky PAB, PDB jsou shodné, a je tedy také $BD = \operatorname{tg}\alpha$; avšak v pravoúhlém trojúhelníku BCD je strana BD odvěsnou, strana BC přeponou, takže BC je větší než BD neboli větší než $\operatorname{tg}\alpha$, a tedy AC neboli $\operatorname{tg} 2\alpha$ je větší než dvojnásobek čísla $\operatorname{tg}\alpha$.



Obr. 5.



Obr. 6.

Následující tabulka udává zaokrouhleně na tři desetinná místa tangens ostrého úhlu rovného

$$1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, \ldots, 88^\circ, 89^\circ\,. \tag{1,27}$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
017	$03\overline{5}$	052	$07\overline{0}$	087	105	$12\overline{3}$	$14\overline{1}$	158	176	194	$21\overline{3}$	$23\overline{1}$	249	$26\overline{8}$
57 $29\overline{0}$	28 636	19 081	14 $30\overline{1}$	11 430	9 514	8 144	7 115	6 $31\overline{4}$	5 671	5 $14\overline{5}$	4 $70\overline{5}$	4 331	4 $01\overline{1}$	3 732
89	88	87	86	85	84	83	82	81	80	79	78	77	76	75

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
28$\overline{7}$	30$\overline{6}$	32$\overline{5}$	344	36$\overline{4}$	38$\overline{4}$	404	424	445	466	48$\overline{8}$	51$\overline{0}$	53$\overline{2}$	554	577
3 487	3 27$\overline{1}$	3 07$\overline{8}$	2 904	2 747	2 605	2 475	2 35$\overline{6}$	2 246	2 14$\overline{5}$	2 050	1 96$\overline{3}$	1 881	1 804	1 732
74	73	72	71	70	69	68	67	66	65	64	63	62	61	60

31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
60$\overline{1}$	62$\overline{5}$	649	67$\overline{5}$	700	72$\overline{7}$	75$\overline{4}$	781	81$\overline{0}$	839	869	900	93$\overline{3}$	96$\overline{6}$	1 000
1 664	1 600	1 54$\overline{0}$	1 48$\overline{3}$	1 428	1 376	1 327	1 28$\overline{0}$	1 23$\overline{5}$	1 19$\overline{2}$	1 150	1 11$\overline{1}$	1 072	1 03$\overline{6}$	1 000
59	58	57	56	55	54	53	52	51	50	49	48	47	46	45

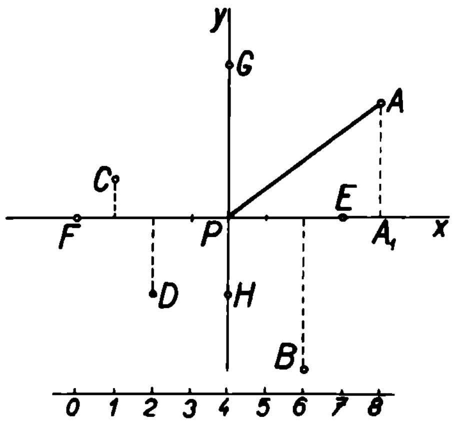
K úhlům 1°, 2°, 3°, ..., 45° je tangens udán ve druhém řádku, při čemž počet stupňů je udán v řádku prvém; ve všech případech (až na poslední případ 45°) je tangens menší než 1; ani desetinná čárka, ani nula před ní nejsou v tabulce vyznačeny. K úhlům 89°, 88°, ..., 45° je tangens udán ve třetím řádku, při čemž počet stupňů je udán v řádku čtvrtém; ve všech případech (až zase na případ tg 45° = 1) je tangens větší než 1, celé číslo před desetinnou čárkou je udáno drobným tiskem a obyčejným tiskem jsou naznačena prvá desetinná místa. Skutečná hodnota tg α je buďto poněkud větší, nebo poněkud menší než zaokrouhlená hodnota udaná v tabulce (s výjimkou jediného případu $\alpha = 45°$, kdy je přesně tg $\alpha = 1$); jestliže skutečná hodnota tg α je *menší* než zaokrouhlená hodnota udaná v tabulce, je to v tabulce naznačeno tím, že je nad poslední číslicí vodorovná čára, takže tabulka udává číslo tg α s chybou menší než $\frac{1}{2000}$. Podle tabulky je na př.

$$\text{tg } 25° = 0{,}466^{+};\quad \text{tg } 65° = 2{,}145^{-};$$

to znamená, že hodnota tg 25°, zaokrouhlená na tři desetinná místa, je 0,466, hodnota tg 65°, zaokrouhlená na tři desetinná místa, je 2,145, při čemž přesná hodnota tg 25° je trochu větší než 0,466 (je však menší než 0,4665), přesná hodnota tg 65° je trochu menší než 2,145 (je však větší než 2,1445).

Poznámka 1,7. Dá se dokázat (ale v této knize to dokazovat nebudeme), že je-li α kterýkoli z našich úhlů (1,27), nestane se nikdy, že by skutečná hodnota čísla tg α byla *přesně* dána desetinným zlomkem, s jedinou výjimkou $\alpha = 45°$, tg $\alpha = 1$.

S pomocí naší tabulky můžeme sestrojit ostrý úhel $\alpha = \sphericalangle XOZ$ dané velikosti mnohem přesněji než s pomocí úhloměru. Nejprve sestrojíme úsečku PX vhodně volené délky (ne však příliš malou, aby konstrukce byla dosti přesná; ani příliš velkou, aby se konstrukce vešla na papír), potom vztyčíme v bodě X kolmici na přímku PX a na ni naneseme $XZ = \text{tg}\,\alpha \,.\, PX$. Je-li na př. $\alpha = 23°$, volíme třeba $PX = 8$ cm; podle tabulky bude potom XZ přibližně rovno 33,9 mm. Je-li α větší než 45°, volíme raději XZ a z tabulky určíme $PX = \text{tg}\,(90° - \alpha)\,.\,XZ$. Je-li na př. $\alpha = 70°$, volíme třeba $XZ = 7$ cm; podle tabulky bude potom PX přibližně rovné 25,5 mm.



Obr. 7.

§ 2. Pravoúhlé souřadnice v rovině

Při studiu funkcí jedné proměnné prokazuje neocenitelné služby grafické znázornění, o kterém si promluvíme v § 4. Před tím však bude třeba, abychom se obeznámili s počátky analytické geometrie v rovině.

V rovině, kterou si v dalším představujeme ve svislé poloze, zvolíme si určitý bod P, kterému říkáme *počátek*. Počátkem si vedeme *vodorovnou* přímku, které se říká *první osa souřadnic* nebo také *osa x*, dále *svislou* přímku, které se říká *druhá osa souřadnic* nebo také *osa y*. (Pro naše účely není osa y tak důležitá jako osa x.) Kromě toho si musíme zvolit ještě určitou *jednotku délky*, abychom mohli vyjadřovat délky nepojmenovanými čísly.

Všimněme si nyní v obr. 7 třeba bodu A. Abychom dostali jeho *souřadnice*, spustíme z něho kolmici na osu x; pata této kolmice je v obr. 7 označena A_1. Bod A má dvě souřadnice, které označíme x (*první souřadnice*) a y (*druhá souřadnice*); při tom je

$$x = PA_1\,, \quad y = AA_1\,; \tag{2,1}$$

podle měřítka k obrazci připojeného je tedy $x = 4$, $y = 3$. Píšeme stručně

$$A = [4,3]\,.$$

To tedy znamená, že první souřadnice bodu A má hodnotu 4 a druhá hodnotu 3. Je však důležité, že se při určování souřadnic bodu používá *znaménkových pravidel*, která znějí takto: Souřadnice x bodu A se bere kladně tehdy, jestliže bod A leží napravo od osy y, t. j. jestliže bod A_1 leží napravo od počátku, záporně se bere tehdy, jestliže bod A leží nalevo od osy y, t. j. jestliže bod A_1 leží nalevo od počátku; zbývá případ, že bod A leží na ose y, t. j. že bod A_1 splyne s počátkem; pak je ovšem $x = 0$. Souřadnice y bodu A se bere kladně tehdy, jestliže bod A leží nad osou x, záporně se bere tehdy, jestliže bod A leží pod osou x; leží-li konečně bod A na ose x, je ovšem $y = 0$.

V obr. 7 jsou zachyceny všecky možné případy, každý jedním příkladem; jest

$$\begin{aligned} A &= [4, 3]\,; & B &= [2, -4]\,; & C &= [-3, 1]\,; \\ D &= [-2, -2]\,; & E &= [3, 0]\,; & F &= [-4, 0]\,; \\ G &= [0, 4]\,; & H &= [0, -2]\,; & P &= [0, 0]\,. \end{aligned}$$

Poznámka 2,1. Místo (2,1) máme v obecném případě vzorce

$$|x| = PA_1\,, \quad |y| = AA_1\,, \tag{2,2}$$

ve kterých místo čísel x, y jsou jejich *absolutní velikosti* (viz poznámku I 7,4) $|x|$, $|y|$. Je na př.

$$|3| = 3, \quad |-4| = 4, \quad |0| = 0\,.$$

Pro každé x (kladné, záporné i nulu) platí vzorec

$$\sqrt{x^2} = |x|\,. \tag{2,3}$$

Vraťme se k bodu $A = [4,3]$. V obr. 7 je narýsován pravoúhlý trojúhelník PA_1A; délky odvěsen tohoto trojúhelníka jsou souřadnice bodu A a délka přepony *je vzdálenost bodu A od počátku.* Tato vzdálenost je podle Pythagorovy věty vyjádřena vzorcem

$$PA = \sqrt{x^2 + y^2}\,. \tag{2,4}$$

Při odvození vzorce (2,4) jsme měli na mysli takový bod

$$A = [x, y]\,, \tag{2,5}$$

jehož obě souřadnice x, y jsou celá čísla kladná, vzorec však platí, i když jedna z obou souřadnic je záporná nebo když obě jsou záporné, neboť druhá mocnina x^2 čísla x (a podobně ovšem také y^2) je nezávislá na znaménku čísla x [je na př. $(-4)^2 = 4^2 = 16$]. Vzorec (2,4) platí také, když x nebo y je rovné nule. Na př. u bodů E, F v obr. 7 je $y = 0$ a vzdálenost od počátku je zřejmě rovna $|x|$, což je podle (2,3) v souladu s obecným vzorcem (2,4).

Poznámka 2,2. Souřadnice bodu, o kterých mluvíme v tomto paragrafu, se nazývají určitěji *pravoúhlé* nebo *kartézské* souřadnice, na rozlišení od jiných druhů souřadnic, o kterých však v dalším nebude řeč, takže budeme bez obavy z nedorozumění mluvit prostě o souřadnicích.

Poznámka 2,3. Označili jsme písmenem x první a písmenem y druhou souřadnici bodu a v souhlase s tím jsme první osu souřadnic nazvali osou x, druhou osu souřadnic osou y. Takové označení je velmi obvyklé a budeme ho proto zpravidla užívat; mluví-li se zároveň o několika bodech, rozlišují se jejich souřadnice indexy, mluví se tedy na př. o bodech $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$, $[x_3, y_3]$. Při studiu funkcí je někdy vhodnější užívat jiných písmen nežli právě x, y. Ale i v takových případech je zpravidla účelné zavést dvě písmena a označovat jedním z nich prvou a druhým druhou souřadnici bodu. Chceme-li souřadnice značit x, y, mluvíme o rovině xy; chceme-li na př. značit prvou souřadnici písmenem u, druhou písmenem z, mluvíme o rovině uz a pod.

Poznámka 2,4. Volili jsme svislou polohu roviny a předpokládali jsme, že první osa souřadnic je vodorovná a druhá svislá. To není nikterak podstatné a v některých úvahách to vůbec není účelné; podstatné je pouze to, že osami souřadnic jsou dvě navzájem *kolmé* přímky.

K rovnosti (2,5) jsme dospěli tak, že jsme vyšli od libovolného bodu A a určili jeho souřadnice x, y; můžeme však také obráceně vyjít od dvou libovolných čísel x, y (daných v určitém *pořadí*; prvým číslem je x, druhým y). Potom je v rovině právě jeden (viz poznámku I 5,1) takový bod A, že platí (2,5).

Zejména je důležité, že můžeme vyjít od libovolného čísla x a přiřadit mu jako *obraz* bod $[x, 0]$. Při každé volbě čísla x leží jeho obraz $[x, 0]$ na prvé ose souřadnic, která se v této souvislosti jmenuje *číselná osa*; přechod od libovolného čísla x k bodu $[x, 0]$ se nazývá *znázornění* čísel na číselné ose. Přitom je vhodné bod $[x, 0]$ nazvat krátce bodem x, t. j. označit jej stejně jako číslo tím bodem znázorněné. O znázorňování čísel na číselné ose byla v této knize už řeč v I § 9 (str. 51), II § 6 (str. 77), III § 2 (str. 107) a III § 4 (str. 117). Vrátíme se k němu v § 4; viz poznámku 4,3 a text za ní následující.

Poznámka 2,5. Slova číslo (bez dalšího dodatku) jsme v této kapitole užívali ve smyslu *reálné* číslo. K obecnému pojmu reálného čísla dospíváme postupným rozšiřováním pojmu čísla, které bylo velmi podrobně a vědecky přesně rozvedeno v prvních třech kapitolách této knihy. V kap. I jsme vyšli od oboru *přirozených* čísel

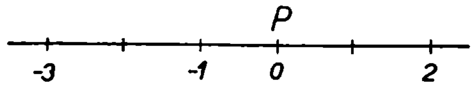
$$1, 2, 3, 4 \text{ atd.}$$

a připojením nuly a čísel opačných (viz I § 7) k přirozeným číslům jsme dospěli k oboru čísel *celých*

$$0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4 \text{ atd.},$$

kterému byla věnována kapitola I. Připojením čísel lomených a čísel opačných k číslům lomeným jsme dospěli k širšímu oboru čísel *racionálních*, kterému byla věnována kapitola II. Konečně po připojení *iracionálních* čísel jsme dostali obor čísel *reálných*, jehož vědecké studium bylo provedeno v kapitole III.

Poznámka 2,6. Znázornění čísel na číselné ose prokazuje dobré služby zejména při porovnávání čísel podle velikosti neboli při studiu *nerovností*. Je-li číslo a menší než číslo b neboli číslo b větší než číslo a, což píšeme $a < b$ nebo $b > a$ [viz I (5,1) a další text v I § 5], leží na číselné ose bod a nalevo od bodu b. Čtenáři začátečníku je třeba důrazně připomenout, že nerovnost $a < b$ má jiný smysl než nerovnost $|a| < |b|$. Na př. (viz obr. 8) je $-3 < -1$, $-3 < 2$, ačkoli $|-3| > |-1|$, $|-3| > |2|$.



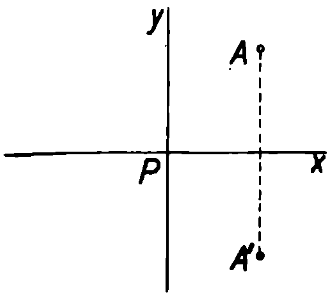
Obr. 8.

Transformací roviny nazveme pravidlo, které každému bodu A naší roviny přiřadí určitý bod A' téže roviny, zvaný *obraz* bodu A. Promluvíme si stručně o třech velmi jednoduchých transformacích roviny. Budeme je definovat *analyticky*, t. j. tak, že udáme, jak se ze souřadnic x, y libovolného bodu $A = [x, y]$ vypočtou souřadnice $[x', y']$ jeho obrazu $A' = [x', y']$.

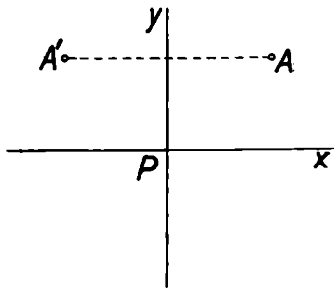
Překlopení kolem osy x. Analytické pravidlo zní

$$x' = x\,, \quad y' = -\,y\,. \tag{2,6}$$

Z definice souřadnic je patrné, že tato transformace je (viz obr. 9) *překlopení roviny kolem osy* x neboli, jak se také říká, *osová souměrnost*, při které osa x je *osou souměrnosti*. Každý bod na ose x splyne se svým obrazem; body nad osou x mají obrazy pod osou x; body pod osou x mají obrazy nad osou x.



Obr. 9.



Obr. 10.

Překlopení kolem osy y. Analytické pravidlo zní

$$x' = -x\,, \quad y' = y\,. \tag{2,7}$$

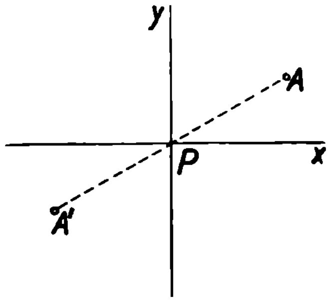
Tato transformace je (viz obr. 10) *překlopení roviny kolem osy* y neboli zase osová souměrnost, při které nyní je osou souměrnosti osa y. Každý bod na ose y splyne se svým obrazem, body napravo od osy y mají obrazy nalevo od osy y, body nalevo od osy y mají obrazy napravo od osy y.

Souměrnost vzhledem k počátku. Analytické pravidlo zní:

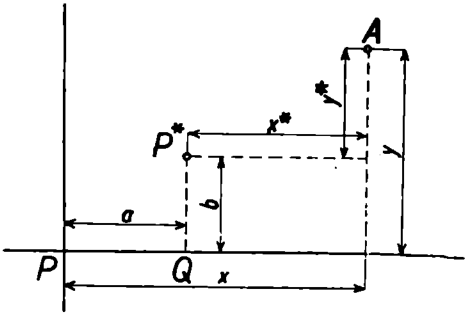
$$x' = -x\,, \quad y' = -y\,. \tag{2,8}$$

Tato transformace je (viz obr. 11) *středová souměrnost*, při které počátek je *středem souměrnosti*. Počátek P splyne se svým obrazem; je-li A kterýkoli jiný bod, leží jeho obraz A' na přímce PA tak, že bod P je právě uprostřed mezi oběma body A, A'. Přechod od bodu $A = [x, y]$ k bodu $A' = [-x, -y]$ záleží ve změně znamének *obou* souřadnic. Můžeme jej provést tak, že změníme nejprve znaménko při x a potom znaménko při y. To znamená geometricky, že od bodu A můžeme přejít k bodu A' tak, že nejprve překlopíme bod A kolem osy y a potom bod takto vzniklý překlopíme kolem osy x. Můžeme také měnit znaménka v obráceném pořadí, tedy napřed překlopit kolem osy x a potom kolem osy y.

V obr. 12 jsou vyznačeny tři body P, P^*, A. Považujeme-li P za počátek souřadnic, máme zvolenu *soustavu souřadnic*, ve které každý bod roviny má určité dvě souřadnice; buďtež a, b souřadnice bodu P^* a buďtež x, y souřadnice bodu A. Můžeme však zavést ještě druhou soustavu souřadnic, ve které počátkem je bod P^*;



Obr. 11.



Obr. 12.

také ve druhé soustavě bude mít bod A dvě souřadnice, ale jiné než dříve; označíme je x^*, y^*. V obr. 12 jsou vyznačeny všecky souřadnice a, b, x, y, x^*, y^*. Z obrazce je patrné, že

$$x^* = x - a\,, \quad y^* = y - b \qquad (2,9)$$

neboli

$$x = x^* + a\,, \quad y = y^* + b\,. \qquad (2,10)$$

Obr. 12 představuje ovšem pouze jednu znaménkovou možnost, ale vzorce (2,9), a tedy také (2,10), jsou správné ve všech případech. Nejnázorněji se o tom přesvědčíme, představíme-li si proměnnou soustavu souřadnic, jejíž počátek putuje z polohy P do polohy P^* po lomené čáře PQP^* (viz obr. 12). Tato změna soustavy souřadnic se děje ve dvou krocích. Při prvém kroku putuje počátek vodorovně z polohy P do polohy Q, při druhém kroku putuje počátek svisle z polohy Q do polohy P^*. Při prvém kroku zůstává druhá souřadnice libovolného bodu nezměněna a mění se pouze první souřadnice; při kladném a tato první souřadnice stále *klesá* (t. j. zmenšuje se), a to od hodnoty x do hodnoty $x^* = x - a$; při záporném a naopak tato souřadnice stále *roste* (t. j. zvětšuje se), a to zase od hodnoty x do hodnoty $x^* = x - a$, která při záporném a je větší než x. Při druhém kroku zůstává naopak první souřadnice nezměněna a mění se pouze druhá souřadnice; při kladném b tato druhá souřadnice stále *klesá*, a to od hodnoty y do hodnoty $y^* = y - b$; při záporném b naopak druhá souřadnice *roste* od hodnoty y do hodnoty $y^* = y - b$, která při záporném b je větší než y. Proto jsou vzorce (2,9), a tedy i (2,10), správné, ať již jsou čísla a, b kladná či záporná. Zřejmě jsou správné také, když a nebo b je rovno nule; pro $a = 0$ odpadne prvý krok, pro $b = 0$ odpadne druhý krok.

Kombinujeme-li vzorce (2,9) se vzorcem (2,4), dospějeme k výrazu

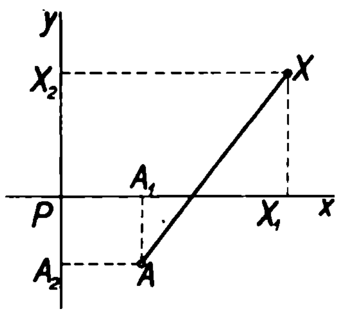
$$AX = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} \qquad (2,11)$$

pro *vzdálenost bodu* $A = [a, b]$ *od bodu* $X = [x, y]$. Neboť v nové soustavě souřadnic, ve které bod $[a, b]$ je počátkem, bude podle vzorců (2,9) mít bod x, y nové souřadnice $x - a$, $y - b$, které dosadíme do vzorce (2,4).

Poznámka 2,7. V obr. 13 jsou vedle bodů A, X vyznačeny ještě body $A_1[a, 0]$, $X_1[x, 0]$, ve kterých rovnoběžky s osou y, vedené body A, X, protnou osu x, jakož i body $A_2 = [0, b]$, $X_2 = [0, y]$, ve kterých rovnoběžky s osou x, vedené body A, X, protnou osu y. (Obrazec 13 se týká případu $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$, $b < 0$. Čtenář by měl sám sestrojit podobné obrazce pro všecky znaménkové možnosti.) Podle vzorců (2,3) a (2,11) je

$$A_1X_1 = |x - a| \,, \qquad (2,12)$$

$$A_2X_2 = |y - b| \,. \qquad (2,13)$$



Obr. 13.

§ 3. Rovnice přímky

Vraťme se k obr. 4 na str. 195. Přímka PX je vodorovná a budeme ji považovat za osu x; počátkem bude v obrazci vyznačený bod P. Je-li $B = [x, y]$ libovolný bod na ramenu PZ úhlu $\alpha = \sphericalangle XPZ$, je

$$x = PA \,, \quad y = AB \,.$$

Víme, že poměr

$$y : x = AB : PA$$

je konstanta; tato konstanta je tg α, ale pro stručnost ji označíme k, takže

$$k = \operatorname{tg} \alpha \,. \qquad (3,1)$$

Tedy pro všecky body $B = [x, y]$ na ramenu PZ úhlu α je splněna rovnice

$$y = kx\,. \tag{3,2}$$

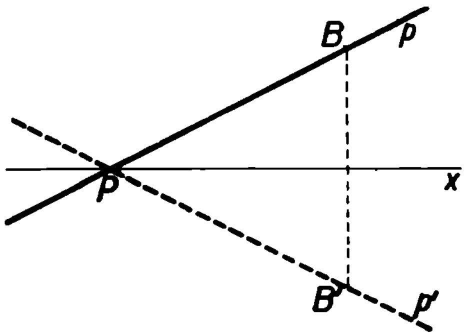
Ty body B, kterých jsme si dosud všímali, leží na přímce PZ, ale nevyplní celou přímku PZ. Chceme-li dostat celou přímku, musíme část narýsovanou v obrazci prodloužit za bod P, tedy k bodům $B = [x, y]$ musíme ještě připojit ty body C, které z bodů B vzniknou pomocí středové souměrnosti se středem P, tedy podle (2,8) body $C = [-x, -y]$. Protože

$$\frac{-y}{-x} = \frac{y}{x}$$

a protože souřadnice bodu B vyhovují rovnici (3,2), vyhovují téže rovnici i souřadnice bodu C. Protože zřejmě i souřadnice bodu $P = [0, 0]$ vyhovují rovnici (3,2), vidíme, že *pro každý bod* $[x, y]$ *přímky PZ je splněna rovnice* (3,2). *Jiné body už rovnici* (3,2) *vyhovovat nemohou*; neboť zvolíme-li číslo x a měníme-li y, dostaneme body $[x, y]$, z nichž *jediný* splňuje rovnici (3,2), a to je ten bod $[x, y]$ s danou souřadnicí x, který leží na přímce PZ. Protože tedy jednak souřadnice každého bodu přímky PZ vyhovují rovnici (3,2), jednak také obráceně každý bod, jehož souřadnice vyhovují rovnici (3,2), leží na přímce PZ, pravíme, že (3,2) je *rovnice přímky PZ*.

Abychom mohli napsat rovnici dané přímky PZ, potřebujeme pouze znát číslo k, které se jmenuje *směrnice* přímky PZ. Víme, že směrnice k splňuje vzorec (3,1), ve kterém α znamená úhel přímky PZ s osou x.

Ale jedné věci si musíme dobře všimnout. Je-li dán počátek P, a tedy i vodorovná osa x jím procházející, a je-li dán ostrý úhel α, existují v rovině *dvě přímky*, které procházejí počátkem a svírají s osou x úhel α. V obr. 14 je ta z nich, kterou jsme se dosud zabývali, vytažena plně a označena p; druhá je vyčárkována a označena p'. Z přímky p vznikne přímka p' překlopením kolem osy x. Bodu $B = [x, y]$ přímky p odpovídá podle (2,6) bod $B' = [x, -y]$ přímky p'. Je-li (3,2) rovnice přímky p, je zřejmě



Obr. 14.

$$y = -kx$$

rovnice přímky p'. Směrnicí přímky p' je *záporné* číslo $-k$. Tedy směrnice je kladná, jestliže probíhajíce přímku zleva doprava, probíháme ji zdola nahoru, neboli jestliže většímu x přísluší větší y; směrnice je záporná, jestliže probíhajíce přímku zleva doprava, probíháme ji shora dolů, neboli jestliže většímu x přísluší menší y.

Můžeme tedy říci, že při *každé* volbě čísla k, nevyjímajíc čísla záporná, znamená (3,2) rovnici určité přímky jdoucí počátkem. To platí i pro $k = 0$, neboť $y = 0$ je zřejmě rovnice osy x.

Má každá přímka jdoucí počátkem rovnici tvaru (3,2)? Kladná odpověď by byla ukvapená, neboť k *svislé* přímce jdoucí počátkem, t. j. k ose y, nedospějeme od rovnice (3,2) při *žádné* volbě čísla k. Rozdíl mezi osou y a ostatními přímkami jdoucími počátkem je v tom, že vedeme-li počátkem přímku p ve směru jiném než svislém a zvolíme-li jakékoli číslo x, leží na přímce p určitý bod, jehož první souřadnice je rovna tomuto číslu, a rovnice (3,2) právě udává předpis, podle něhož se ze souřadnice x počítá souřadnice y tohoto bodu. Naproti tomu je u všech bodů na ose y souřadnice x rovna nule, souřadnice y pak je libovolná, takže nemůže existovat žádný předpis, podle kterého by se ze souřadnice x mohla vypočítat souřadnice y.

Aby rovnice (3,1) měla všeobecnou platnost, učiníme následující dohody, které si vyslovíme hned pro libovolné přímky, t. j. i pro takové, které neprocházejí počátkem. Budiž p libovolná přímka a označme α úhel této přímky s osou x. Je-li přímka p svislá, t. j. kolmá na osu x, takže $\alpha = 90°$, říkáme, že *přímka p nemá směrnici*, a symbolu tg 90° nedáváme *žádný* číselný význam. Je-li přímka p vodorovná, t. j. rovnoběžná s osou x, je

$$\alpha = 0\,, \quad \operatorname{tg} \alpha = 0\,.$$

Je-li konečně přímka p kosá k ose x, t. j. je-li α úhel ostrý, dáme úhlu α znaménko plus nebo minus podle toho, zda probíhajíce přímku p zleva doprava probíháme ji zdola nahoru či shora dolů. *Stejné znaménko jako úhlu α dáváme také číslu* tg α. Potom platí vzorec (3,1) pro směrnici přímky p, není-li ovšem p svislá. Přitom nemusí přímka p procházet počátkem. *Přímky mezi sebou rovnoběžné mají stejnou směrnici* (ovšem nejsou-li svislé). Směrnice přímky se nezmění, změníme-li počátek souřadnic.

Budiž nyní p *libovolná* přímka. Je-li p svislá, mají všecky její body touž souřadnici x; je-li r číselná hodnota této souřadnice, platí rovnice

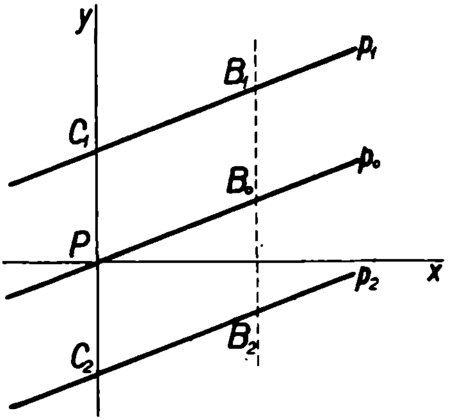
$$x = r \tag{3,3}$$

pro každý bod přímky p a obráceně platí, že každý bod $[x, y]$, který vyhovuje rovnici (3,3), leží na přímce p, t. j. (3,3) je *rovnice svislé přímky p*.

Není-li přímka p svislá, má určitou směrnici k. Přímka p protne pak osu y v určitém bodě C. První souřadnice bodu C je rovna nule; druhou souřadnici bodu C označme s, takže

$$C = [0, s] .$$

Může být $s = 0$ nebo $s > 0$ nebo $s < 0$. Je-li $s = 0$, prochází přímka p počátkem P. Je-li $s > 0$, leží bod C nad bodem P a je-li $s < 0$, leží bod C pod bodem P. Vzdálenost PC je ve všech případech rovna číslu $|s|$. V obr. 15 je $s > 0$ pro přímku p_1, $s < 0$ pro přímku p_2.



Obr. 15.

Rovnici přímky p si můžeme odvodit takto: Veďme počátkem P rovnoběžku p_0 s přímkou p. Obě přímky p a p_0 mají touž směrnici k. Ke každému číslu x máme bod B na přímce p a bod B_0 na přímce p_0 s první souřadnicí rovnou číslu x. Druhou souřadnici označme y u bodu B, y_0 u bodu B_0, takže

$$B = [x, y] , \quad B_0 = [x, y_0] .$$

Jestliže $s > 0$, leží (viz obr. 15) bod B (který je v tomto případě v obr. 15 označen B_1) nad bodem B_0 ve vzdálenosti $BB_0 = |s| = s$; jestliže $s < 0$, leží B (v tomto případě v obr. 15 označený B_2), pod B_0 ve vzdálenosti $BB_0 = |s| = -s$, takže v obou případech je

$$y = y_0 + s \qquad (3,4)$$

a to platí i pro $s = 0$, neboť pro $s = 0$ splynou body B, B_0 a je $y = y_0$. Protože přímka p_0 prochází počátkem a má směrnici k, víme, že

$$y_0 = kx . \qquad (3,5)$$

Ze (3,4) a (3,5) plyne

$$y = kx + s , \qquad (3,6)$$

t. j. pro každý bod přímky p platí rovnice (3,6). Tato rovnice však neplatí pro žádný bod $[x, y]$, který neleží na přímce p, neboť na přímce p leží pro každou hodnotu čísla x určitý bod s první souřadnicí rovnou x, a z těch bodů $[x, y]$, jejichž první souřadnice je rovna danému číslu x, jenom *jediný* splňuje rovnici (3,6), a to musí být bod přímky p, protože ten, jak víme, rovnici (3,6) splňuje. Proto je (3,6) rovnice přímky p.

Dosud jsme vycházeli od dané přímky p, která není kolmá na osu x, a odvodili jsme její rovnici (3,6). Obráceně buďtež dána dvě libovolná čísla k, s; vyjděme od těchto čísel a sestavme rovnici (3,6). Na ose y leží bod

$$C = [0, s] .$$

Určeme úhel α z rovnice (3,1); řiďme se při tom znaménkovým pravidlem vyloženým na str. 208. Vedeme-li bodem C přímku p tak, aby svírala s osou x úhel α (při tom si musíme všímat i znaménka úhlu α), je zřejmě (3,6) rovnicí přímky p.

Rovnice (3,6), ve které k, s jsou dané *konstanty* (t. j. tato písmena znamenají *určitá* daná čísla), dává předpis, podle kterého ke každému danému číslu x můžeme vypočítat příslušné číslo y, t. j. rovnice (3,6) definuje funkci proměnné x.

Poznámka 3,1. V příkladech funkcí, které jsme podali v § 1, nabývala nezávisle proměnná pouze kladných hodnot, kdežto nyní nezávisle proměnná x nabývá všech kladných i všech záporných hodnot (a také hodnoty 0).

Je-li $k = 0$, pak funkce (3,6) je *konstanta*: pro všecka x nabývá funkce (3,6) v tomto případě jedné a téže hodnoty s. Je-li $k \neq 0$, potom funkce tvaru (3,6) se jmenuje *lineární* funkce. Určitěji se mluví o *lineární celistvé funkci* na rozdíl od *lineární lomené funkce*, kterou však nebudeme v této knize vyšetřovat.

Příklad 3,1. Daným bodem

$$A = [a, b] \tag{3,7}$$

je vedena přímka p daného směru. Jak zní rovnice přímky p? Je-li přímka p svislá, t. j. kolmá na osu x, zní její rovnice

$$x = a . \tag{3,8}$$

Vyloučíme-li tento případ, má přímka p určitou směrnici k, danou vzorcem (3,1), ve kterém musíme brát zřetel na znaménko úhlu α. Prochází-li přímka p počátkem, pak její rovnice je (3,2). V obecném případě dojdeme k rovnici přímky p pomocí změny počátku. Posuneme počátek souřadnic do bodu A; označíme-li hvězdičkou souřadnice v posunuté soustavě, má přímka p v této soustavě rovnici $y^* = kx^*$. Protože však nový počátek má v původní soustavě souřadnice a, b, platí mezi původními a novými souřadnicemi libovolného bodu rovnice (2,9). Tedy přímka p má v původní soustavě rovnici

$$y - b = k(x - a)\,, \tag{3,9}$$

kterou můžeme uvést na tvar (3,2); při tom bude

$$s = b - ka\,. \tag{3,10}$$

Tím je úloha řešena. Mohli jsme však postupovat také jinak. V případě svislé přímky můžeme její rovnici (3,8) ihned napsat; nebudeme se k tomuto případu už vracet. Jestliže přímka p není svislá, má rovnici tvaru (3,6), kde číslo k je nám známo, a jde tedy pouze o číslo s. Abychom určili hodnotu čísla s, stačí uvážit, že rovnici (3,6) vyhovují souřadnice bodu (3,7), což dává podmínku

$$b = ka + s\,,$$

ze které vypočteme hodnotu (3,10) čísla s.

Poznámka 3,2. Je častým zvykem psát rovnici (3,9) ve tvaru

$$\frac{y - b}{x - a} = k\,. \tag{3,11}$$

Neškodí si uvědomit, že tvarem (3,11) vylučujeme jeden bod přímky p, totiž bod (3,7). Neboť pro $x = a$ zlomek nalevo ve (3,11) má ve jmenovateli nulu a je tudíž bezvýznamný, takže nelze tvrdit, že by souřadnice bodu (3,7) splňovaly rovnici (3,11).

Příklad 3,2. Budiž dán vedle bodu (3,7) ještě jiný bod

$$B = [x_0, y_0]\,. \tag{3,12}$$

Jak zní rovnice přímky AB? Předpokládáme ovšem, že body A, B jsou mezi sebou různé. Je-li $x_0 = a$, je přímka AB svislá a její rovnice je (3,8). Vyloučíme-li tento případ, má přímka AB rovnici tvaru (3,9) a je třeba pouze vypočíst směrnici k. To je lehké, neboť v každém bodě přímky AB, s jedinou výjimkou bodu A, platí vztah (3,11), který tedy zejména platí v bodě (3,12), takže přímka AB má rovnici tvaru (3,9), při čemž

$$k = \frac{y_0 - b}{x_0 - a}\,. \tag{3,13}$$

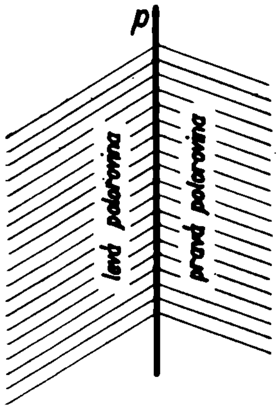
Je-li dána v rovině přímka p a odstraníme-li tuto přímku z roviny ukazuje názor, že se zbytek roviny rozpadne na dva kusy, kterým říkáme *poloroviny vyťaté přímkou p*. Je-li přímka p svislá (viz obr. 16), skládá se jedna z obou polorovin z těch bodů, které leží nalevo od p, druhá pak z těch, které leží napravo od p. Je-li (3,3) rovnice svislé přímky p, je pro body jedné z obou polorovin vyťatých přímkou p splněna nerovnost

$$x < r\,, \tag{3,14}$$

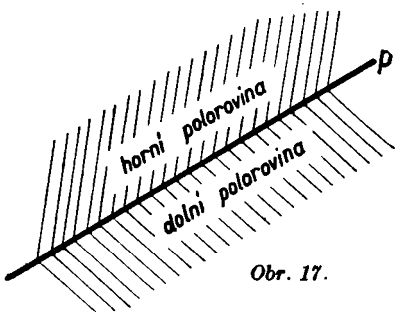
a pro body druhé z těchto polorovin nerovnost

$$x > r\,. \tag{3,15}$$

Předpokládejme nyní, že přímka p není svislá, takže má rovnici tvaru (3,6), kde k a s jsou konstanty. Názor ukazuje (viz obr. 17), že jedna z obou polorovin vyťatých přímkou p se skládá z těch bodů, které leží nad přímkou p, druhá pak z těch, které leží pod přímkou p. Leží-li však bod $[x, y]$ na přímce p, je jasné, že se dostaneme nad přímku p, jestliže při nezměněné souřadnici x *zvětšíme* souřadnici y, a pod přímku p, jestliže při nezměněné souřadnici x *zmenšíme*



Obr. 16.



Obr. 17.

souřadnici y. Je-li tedy (3,6) rovnice přímky p, pak jedna z obou polorovin vyťatých přímkou p se skládá z těch bodů $[x, y]$, pro které je

$$y > kx + s\,, \tag{3,16}$$

druhá pak z těch bodů $[x, y]$, pro které je

$$y < kx + s\,. \tag{3,17}$$

§ 4. Grafické znázornění funkce jedné proměnné

Se slovem funkce jsme se seznámili už v § 1. Je-li dána nějaká funkce *jedné proměnné*, označme si písmenem x hodnoty, kterých nabývá nezávisle proměnná, písmenem y hodnoty, kterých nabývá funkce. Naše funkce je tedy pravidlo, podle kterého se k hodnotě zvolené pro x dá počítat příslušná hodnota pro y, což si vyjádříme symbolicky takto:

$$y = f(x) \,. \tag{4,1}$$

Poznámka 4,1. Jestliže symbol $f(x)$ znamená funkci, potom symboly

$$f(0), f(3), f(-2), \quad f(\tfrac{1}{2}), f(-\sqrt{2}) \quad \text{a pod.}$$

znamenají hodnoty, kterých funkce nabude pro

$$x = 0, 3, -2, \tfrac{1}{2}, -\sqrt{2} \quad \text{a pod.}$$

Na př. pro $f(x) = 3x^2 - x^4$ je

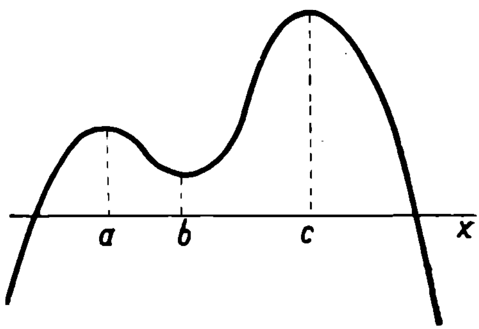
$$f(0) = 0, f(3) = -54, f(-2) = -4, f(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{11}{16}, f(-\sqrt{2}) = 2$$

atd.

Místo písmena f můžeme ovšem užít kteréhokoli jiného písmena; často se užívá písmena F velké abecedy nebo písmena φ řecké abecedy. Různé funkce můžeme navzájem odlišit indexy: je-li na př. v nějaké úvaze řeč o třech funkcích, můžeme si je označit třeba $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$.

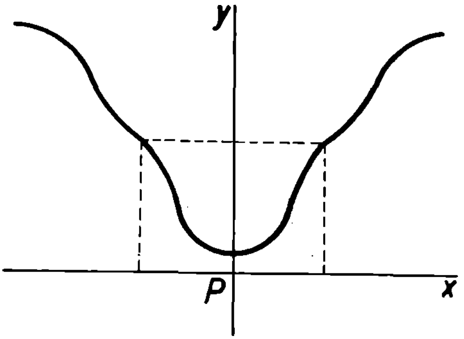
Poznámka 4,2. Volit pro hodnoty nezávisle proměnné právě písmeno x a pro hodnoty funkce právě písmeno y je starý zakořeněný zvyk; užívání „standardního" označení je výhodné, protože mnohdy umožní žádoucí stručnost vyjadřování.

Na druhé straně při užití nauky o funkcích v geometrii, mechanice atd. je obyčejně výhodné místo standardního označení užívat označení, které připomíná význam vyšetřovaných veličin. Tak na př. jsme neužívali standardního označení v geometrických příkladech uvedených v § 1.



Obr. 18.

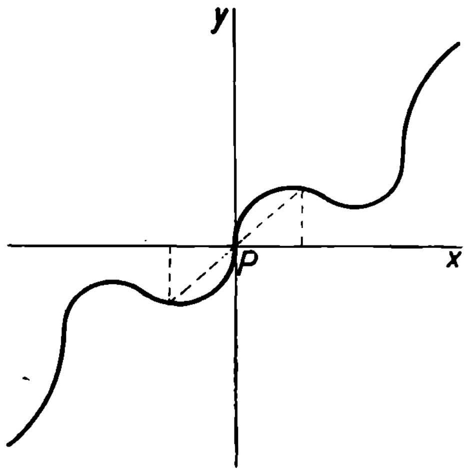
Je-li dána nějaká funkce (4,1), je velmi účelné postupovat takto: V pomocné rovině zvolíme soustavu pravoúhlých souřadnic. Znázorníme-li si každou takovou dvojici čísel x, y, pro kterou platí vztah (4,1), bodem $[x, y]$, dostaneme čáru (viz obr. 18), které se říká *graf* funkce. Různým funkcím patří různé grafy. Není nevhodné poznamenat, že existují tak složité funkce, že jejich graf se nedá ani přibližně narýsovat a že stěží zasluhuje název „čára". V jednoduchých případech, a právě takové případy jsou nejdůležitější pro začátečníka, je naproti tomu lehké graf přibližně narýsovat nebo aspoň učinit si dosti dobrou představu o jeho průběhu. V takových případech je graf vydatnou pomůckou při studiu funkce. Všeobecně lze říci o grafu funkce pouze tolik, že žádná svislá přímka (žádná rovnoběžka s osou y) jej neprotne ve více než jednom bodě, takže na př. kružnice není grafem žádné funkce.



Obr. 19.

Uveďme si některé vlastnosti funkcí, které se dají na grafu dobře pozorovat. Pravíme, že funkce $f(x)$ je *sudá* (viz obr. 19), jestliže osa y je osou souměrnosti jejího grafu, tedy [viz (2,7)] jestliže platí vzorec

$$f(-x) = f(x)\,. \quad (4,2)$$



Obr. 20.

Pravíme, že funkce $f(x)$ je *lichá* (viz obr. 20), jestliže počátek P je středem souměrnosti jejího grafu, tedy [viz (2,8)], jestliže platí vzorec

$$f(-x) = -f(x)\,. \quad (4,3)$$

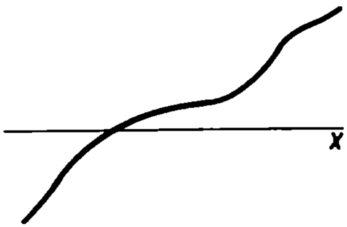
Dále pravíme, že funkce $f(x)$ *roste* (viz obr. 21), jestliže většímu x přísluší vždy větší y; pravíme, že funkce $f(x)$ *klesá* (viz obr. 22), jestliže většímu x přísluší vždy menší y. Probíháme-li graf funkce od levé strany k pravé, tu v případě rostoucí funkce jdeme stále zdola nahoru, v případě klesající funkce jdeme stále shora dolů. Funkce znázorněná v obr. 18 není ani rostoucí, ani klesající, ale, jak je v obrazci naznačeno, existují tři čísla a, b, c (při čemž $a < b < c$, viz poznámku I 5,3), která mají tuto vlastnost: Omezíme-li se na ty hodnoty nezávisle proměnné x, pro které

$$
\begin{aligned}
&[1]\ x \leqq a\,,\\
&[2]\ a \leqq x \leqq b\,,\\
&[3]\ b \leqq x \leqq c\,,\\
&[4]\ x \geqq c\,,
\end{aligned}
$$

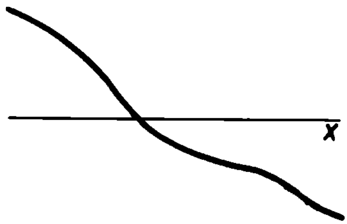
pak funkce znázorněná v obr. 18

$$
\left.\begin{array}{r}\text{roste}\\ \text{klesá}\end{array}\right\}\ \text{v případě}\ \left\{\begin{array}{l}[1]\ \text{nebo}\ [3]\,,\\ [2]\ \text{nebo}\ [4]\,.\end{array}\right.
$$

Takové množiny (viz poznámku I 1,1) čísel x, které jsou definovány některou z podmínek tvaru [1], [2] nebo [3] a [4], jmenují se *intervaly*. Množina určená podmínkou [2] tvoří interval $\langle a, b\rangle$, do kterého



Obr. 21.



Obr. 22.

počítáme také čísla a, b sama; o ostatních číslech z intervalu $\langle a, b\rangle$, tedy o těch číslech x, pro která platí nerovnosti $a < x < b$, pravíme, že leží *uvnitř intervalu* $\langle a, b\rangle$; čísla a, b se jmenují *meze intervalu* $\langle a, b\rangle$; číslo a je *dolní mez*, číslo b je *horní mez*. Podobně znamená ovšem $\langle b, c\rangle$ interval určený podmínkou [3].

Poznámka 4,3. Na číselné ose je interval $\langle a, b\rangle$ znázorněn úsečkou, jejímiž krajními body jsou obrazy čísel a, b neboli body a, b; vnitřní body této úsečky jsou obrazy těch čísel x, o kterých jsme řekli, že leží uvnitř intervalu $\langle a, b\rangle$. Pro zjednodušení mluvy se často nerozlišuje mezi číslem x a bodem x, tedy slovy vnitřní bod intervalu $\langle a, b\rangle$ se mnohdy míní číslo ležící uvnitř intervalu, slovy krajní body intervalu se míní meze intervalu a pod.

Množina čísel x vyhovujících podmínce [4] tvoří *interval* $\langle c, \infty)$, který má *dolní mez* c; všecka ostatní čísla x intervalu $\langle c, \infty)$ leží uvnitř tohoto intervalu a *horní mez* neexistuje; to má být právě naznačeno symbolem ∞, který čteme slovem „*nekonečno*" (viz poznámku III 1,3). Místo ∞ píšeme někdy také $+\infty$, což čteme „*plus nekonečno*". Množina čísel x vyhovujících podmínce [1] tvoří interval $(-\infty, a\rangle$, který má horní mez a; všecka ostatní čísla x intervalu $(-\infty, a\rangle$ leží uvnitř tohoto intervalu a dolní mez neexistuje; to má být právě naznačeno symbolem $-\infty$, který čteme „*minus nekonečno*". Obrazy intervalů $\langle c, \infty)$, $(-\infty, a\rangle$ na číselné ose jsou *polopřímky*; obraz dolní meze c intervalu $\langle c, \infty)$ i obraz horní meze a intervalu $(-\infty, a\rangle$ je *počátkem* příslušné polopřímky.

Je účelné také množinu všech čísel x vůbec počítat mezi intervaly; tento největší ze všech intervalů označíme $(-\infty, \infty)$ nebo $(-\infty, +\infty)$; všecka císla x tohoto intervalu leží uvnitř něho a *neexistuje ani dolní, ani horní mez*. Geometrickým obrazem intervalu $(-\infty, \infty)$ je celá číselná osa.

Intervaly, u kterých existuje i dolní i horní mez, jak tomu je u našich intervalů $\langle a, b\rangle$, $\langle b, c\rangle$, jmenují se *omezené* (nebo *ohraničené*) intervaly; naproti tomu jsou $\langle c, \infty)$, $(-\infty, a\rangle$, $(-\infty, \infty)$ *neomezené* (nebo *neohraničené*) intervaly. Intervaly, u kterých existuje dolní mez, jmenují se *zdola omezené* (nebo *zdola ohraničené*), ostatní jsou *zdola neomezené* (nebo *zdola neohraničené*). Intervaly, u kterých existuje horní mez, jmenují se *shora omezené* (nebo *shora ohraničené*), ostatní jsou *shora neomezené* (nebo *shora neohraničené*). Tedy intervaly $\langle a, b\rangle$, $\langle a, \infty)$ jsou zdola omezené, intervaly $\langle a, b\rangle$, $(-\infty, a\rangle$ jsou shora omezené; naproti tomu intervaly $(-\infty, a\rangle$, $(-\infty, \infty)$ jsou zdola neomezené, intervaly $\langle a, \infty)$, $(-\infty, \infty)$ jsou shora neomezené.

Poznámka 4,4. Po zavedení právě vysvětlených termínů můžeme říci, že funkce znázorněná v obr. 18 (str. 213) roste v intervalech $(-\infty, a\rangle$ a $\langle b, c\rangle$ a klesá v intervalech $\langle a, b\rangle$ a $\langle c, \infty)$. Takové rozdělení hodnot nezávisle proměnné x na několik intervalů, ve kterých funkce střídavě roste a klesá, je možné u většiny jednoduchých funkcí. Nalezení takových intervalů je první důležitý krok ke studiu funkce; u jednoduchých funkcí se dá snadno provést pomocí vyšší matematiky; to však už přesahuje rámec této knihy.

Intervaly, o kterých jsme dosud mluvili, se jmenují *uzavřené intervaly*. Vnitřek uzavřeného intervalu (neboli množina všech čísel x, která leží uvnitř tohoto intervalu) se jmenuje *otevřený interval*. U otevřeného intervalu místo úhlové závorky $\langle\rangle$ užíváme obyčejné okrouhlé závorky (). Jsou čtyři druhy otevřených intervalů:

interval (a, b) se skládá z těch čísel x, pro která platí $a < x < b$,
interval (a, ∞) se skládá z těch čísel x, pro která platí $a < x$,

interval $(-\infty, a)$ se skládá z těch čísel x, pro která platí $x < a$, interval $(-\infty, \infty)$ se skládá ze všech čísel x vůbec.

Uzavřený interval $\langle a, b\rangle$ obsahuje o dvě čísla více než otevřený interval (a, b), totiž o číslo a a o číslo b. Uzavřený interval $\langle a, \infty)$ obsahuje o jedno číslo více než otevřený interval (a, ∞), totiž o číslo a. Uzavřený interval $(-\infty, a\rangle$ obsahuje o jedno číslo více než otevřený interval $(-\infty, a)$, totiž o číslo a. Interval $(-\infty, \infty)$ je zároveň uzavřený i otevřený.

Poznámka 4,5. Příležitostně se užívá intervalů, které nejsou ani uzavřené, ani otevřené. Jsou to omezené intervaly a rozpadají se na dva druhy:

interval $\langle a, b)$ se skládá z těch čísel x, pro která platí $a \leqq x < b$, interval $(a, b\rangle$ se skládá z těch čísel x, pro která platí $a < x \leqq b$.

Číslo a patří do intervalu $\langle a, b)$ a nepatří do intervalu $(a, b\rangle$; číslo b patří do intervalu $(a, b\rangle$ a nepatří do intervalu $\langle a, b)$. Připomeňme znovu, že do intervalu $\langle a, b\rangle$ patří obě čísla a, b a že do intervalu (a, b) nepatří žádné z nich.

§ 5. Geometrický význam základních pravidel pro nerovnosti

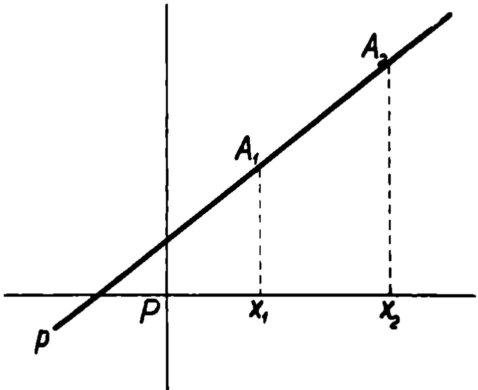
V kapitolách I až III jsme podali vědecké odůvodnění základních vět o nerovnostech, a to tak, že jsme v kapitole I probírali nerovnosti v oboru čísel celých, v kapitole II v oboru čísel racionálních, v kapitole III v oboru čísel reálných. Vzhledem k základní důležitosti těchto vět pro celou vyšší matematiku si je nyní vyslovíme znovu, při čemž na tomto místě neběží o vědecky bezvadné důkazy, nýbrž o odůvodnění založené na geometrickém názoru. Přitom máme na mysli hned případ libovolných reálných čísel.

Věta 5,1. *V nerovnosti je dovoleno na obou stranách přičíst totéž číslo.*

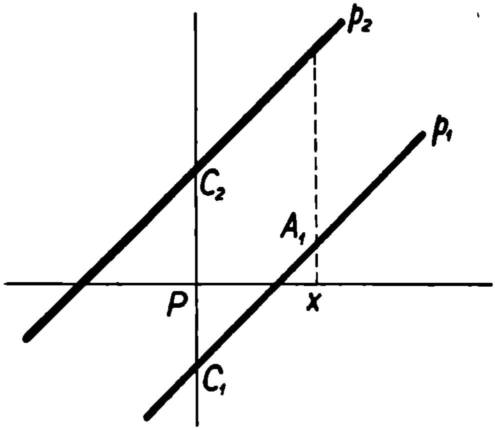
První důkaz (viz obr. 23). Je-li $x_1 < x_2$, máme dokázat, že pro libovolné s je také $x_1 + s < x_2 + s$. Za tím účelem si všimněme přímky p s rovnicí

$$y = x + s\,,$$

jejíž směrnice je rovna jedné, je tedy kladná, takže pro body $[x, y]$ přímky p zároveň s rostoucím x roste také y. Jsou-li $A_1 = [x_1, y_1]$, $A_2 = [x_2, y_2]$ dva body přímky p, takže $y_1 = x_1 + s$, $y_2 = x_2 + s$, při čemž $x_1 < x_2$, t. j. bod A_1 leží nalevo od bodu A_2, leží bod A_1 níže než bod A_2, t. j. je $y_1 < y_2$ neboli $x_1 + s < x_2 + s$.



Obr. 23.



Obr. 24.

Druhý důkaz (viz obr. 24). Budiž $s_1 < s_2$; máme dokázat, že při libovolném x je také $x + s_1 < x + s_2$. Za tím účelem si všimněme přímky p_1 s rovnicí

$$y = x + s_1$$

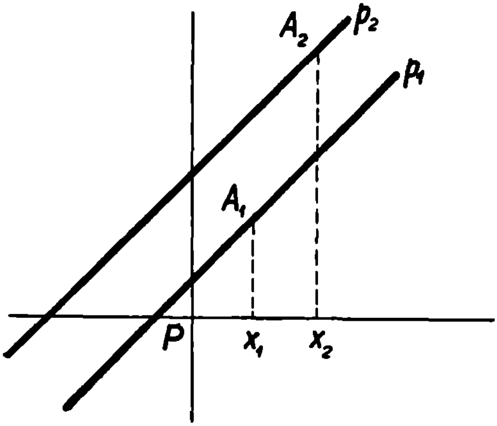
a přímky p_2 s rovnicí

$$y = x + s_2 .$$

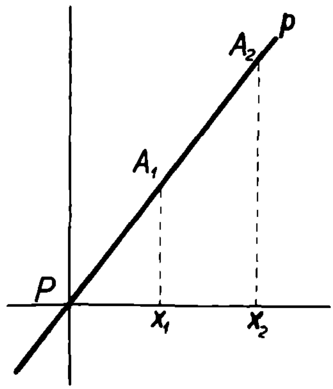
Přímka p_1 protne osu y v bodě $C_1 = [0, s_1]$, přímka p_2 v bodě $C_2 = [0, s_2]$. Protože $s_1 < s_2$, leží bod C_2 nad bodem C_1. Avšak obě přímky p_1, p_2 mají touž směrnici rovnou jedné, jsou tedy rovnoběžné, takže celá přímka p_2 leží nad přímkou p_1. Při libovolném x budiž $A_1 = [x, y_1]$ bod přímky p_1, $A_2 = [x, y_2]$ bod přímky p_2. Bod A_2 leží nad bodem A_1, t. j. $y_1 < y_2$ neboli $x + s_1 < x + s_2$.

Věta 5,2. *Nerovnosti je dovoleno sčítat.*

Důkaz. Naše věta je důsledkem věty 5,1. Vskutku jsou-li dány dvě nerovnosti $a < b$, $c < d$, máme dokázat, že $a + c < b + d$. Za tím účelem nejprve v nerovnosti $a < b$ přičteme na obou stranách číslo c a dostaneme $a + c < b + c$, potom v nerovnosti $c < d$ přičteme na obou stranách číslo b a dostaneme $b + c < b + d$; spojení obou výsledků $a + c < b + c$, $b + c < b + d$ dá žádanou nerovnost $a + c < b + d$. Je jasné, že ze správnosti věty pro dvě nerovnosti plyne indukcí (viz I § 4) správnost věty pro libovolný počet nerovností. Geometricky dospějeme k větě 5,2 (v případě dvou nerovností), užijeme-li myšlenky obou důkazů věty 5,1. Budiž $x_1 < x_2$, $s_1 < s_2$; máme zjistit, že $y_1 < y_2$, kde $y_1 = x_1 + s_1$, $y_2 = x_2 + s_2$. Za tím účelem uvažujme přímku p_1 s rovnicí $y = x + s_1$ a přímku p_2 s rovnicí $y = x + s_2$ (viz obr. 25). Obě přímky p_1, p_2 jsou rovnoběžné a průsečík $[0, s_2]$ přímky p_2 s osou y leží nad průsečíkem $[0, s_1]$ přímky p_1 s osou y. Na přímce p_1 leží bod $A_1 = [x_1, y_1]$, na přímce



Obr. 25.



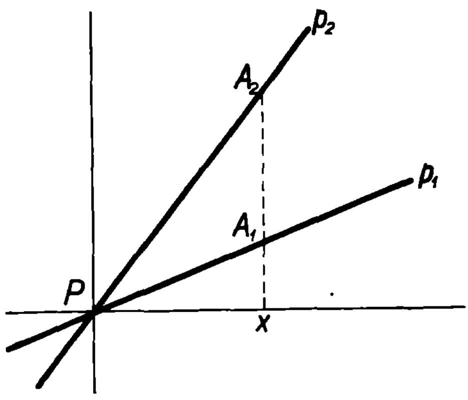
Obr. 26.

p_2 bod $A_2 = [x_2, y_2]$. Protože $x_1 < x_2$, je patrné z obrazce, že $y_1 < y_2$.

Věta 5,3. *V nerovnosti je ~~dovoleno~~ obě strany znásobit týmž kladným číslem.*

První důkaz (viz obr. 26). Je-li $x_1 < x_2$, máme dokázat, že pro libovolné *kladné* s je také $sx_1 < sx_2$. Za tím účelem si všimněme přímky p s rovnicí

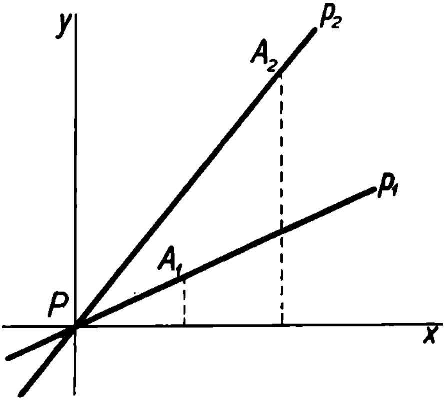
$$y = sx ,$$



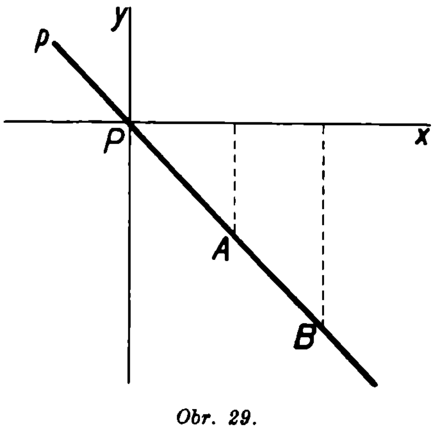
Obr. 27.

jejíž směrnice je kladná, takže pro body $[x, y]$ přímky p s rostoucím x roste také y. Jsou-li $A_1 = [x_1, y_1]$, $A_2 = [x_2, y_2]$ dva body přímky p, takže $y_1 = sx_1$, $y_2 = sx_2$, při čemž je $x_1 < x_2$, t. j. A_1 leží nalevo od bodu A_2, leží bod A_1 níže než bod A_2, t. j. je $y_1 < y_2$ neboli $sx_1 < sx_2$.

Druhý důkaz (viz obr. 27). Budiž $s_1 < s_2$; máme dokázat, že při libovolném *kladném* x je také $s_1x < s_2x$. Za tím účelem si všimněme přímky p_1 s rovnicí $y = s_1x$ a přímky p_2 s rovnicí $y = s_2x$. Obě přímky procházejí počátkem a směrnice přímky p_1 je menší než směrnice přímky p_2, takže napravo od počátku leží přímka p_2 nad přímkou p_1. Při libovolném kladném x budiž $A_1 = [x, y_1]$ bod přímky p_1, $A_2 = [x, y_2]$ bod přímky p_2. Bod A_2 leží nad bodem A_1, t. j. $y_1 < y_2$ neboli $s_1x < s_2x$.



Obr. 28.



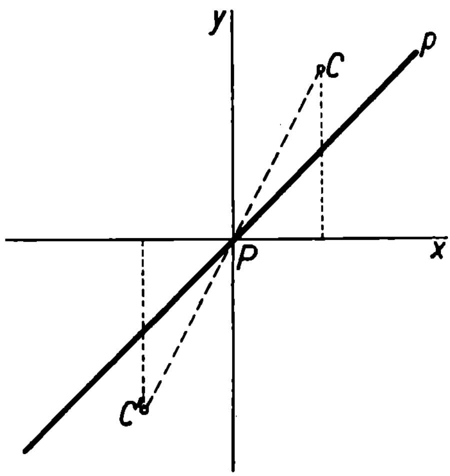
Obr. 29.

Věta 5,4. *Nerovnosti mezi kladnými čísly je dovoleno znásobit.*

Důkaz. Naše věta je důsledkem věty 5,3. Vskutku buďtež dána taková kladná čísla a, b, c, d, že $a < b$, $c < d$; máme dokázat, že $ac < bd$. Za tím účelem nejprve obě strany nerovnosti $a < b$ znásobíme kladným číslem c a dostaneme $ac < bc$, potom obě strany nerovnosti $c < d$ znásobíme kladným číslem b a dostaneme $bc < bd$; spojení obou výsledků $ac < bc$, $bc < bd$ dá žádanou nerovnost $ac < bd$. Ze správnosti věty pro dvě nerovnosti plyne potom indukcí její správnost pro libovolný počet nerovností. Geometricky dospějeme k větě 5,4 (v případě dvou nerovností), užijeme-li myšlenky obou důkazů věty 5,3. Budiž $0 < x_1 < x_2$, $0 < s_1 < s_2$; máme zjistit, že $y_1 < y_2$, kde $y_1 = s_1x_1$, $y_2 = s_2x_2$. Za tím účelem uvažujme přímku p_1 s rovnicí $y = s_1x$ a přímku p_2 s rovnicí $y = s_2x$ (viz obr. 28). Obě přímky procházejí počátkem a napravo od počátku leží nad osou x; při tom (stále napravo od počátku) přímka p_2 leží nad přímkou p_1. Na přímce p_1 leží bod $A_1 = [x_1, y_1]$, na přímce p_2 bod $A_2 = [x_2, y_2]$. Protože $0 < x_1 < x_2$, je z obrazce patrné, že $y_1 < y_2$.

Věta 5,5. *Jestliže pro dvě čísla a, b platí nerovnost $a < b$, potom pro čísla $-a$, $-b$ k nim opačná platí nerovnost $-a > -b$.*

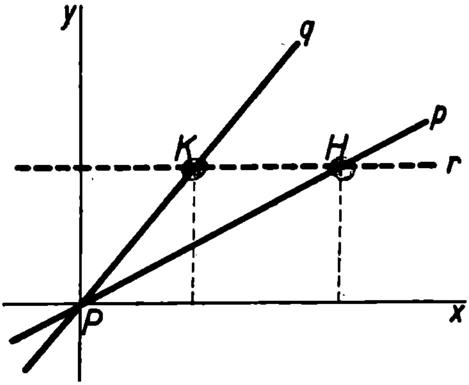
Důkaz. Můžeme naši větu odvodit z věty 5,1, neboť jestliže na obou stranách nerovnosti $a < b$ přičteme číslo $-a-b$, dostaneme nerovnost $-b < -a$, která říká totéž jako nerovnost $-a > -b$. Geometricky můžeme dospět k větě 5,5 dvojím způsobem. *První způsob* (viz obr. 29). Budiž p přímka s rovnicí $y = -x$. Na přímce p leží bod $A = [a, -a]$ i bod $B = [b, -b]$. Je-li $a < b$, leží bod B napravo od bodu A; protože směrnice -1 přímky p je záporná, leží bod B pod bodem A, t. j. $-a > -b$. *Druhý způsob* (viz obr. 30). Uvažujme přímku p s rovnicí $y = x$; bod $[x, y]$ leží nad přímkou p, je-li $y > x$, a pod přímkou p, je-li $y < x$. Je-li $a < b$, leží bod $C = [a, b]$ nad přímkou p, takže bod $C' = [-a, -b]$, souměrný s bodem C vzhledem k počátku, leží pod přímkou p, t. j. $-a > -b$.



Obr. 30.

Věta 5,6. *Jestliže pro dvě kladná čísla a, b platí nerovnost $a < b$, potom pro čísla $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ k nim převrácená* (viz poznámku II 5,1) *platí opačná nerovnost $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.*

Důkaz. Tuto větu můžeme odvodit z věty 5,3, neboť jsou-li čísla a, b kladná, je také číslo $\frac{1}{ab}$ kladné, a jestliže jím znásobíme nerovnost $a < b$, dostaneme nerovnost $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$, která praví totéž jako $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$. Geometricky můžeme dospět k větě 5,6 takto (viz obr. 31). Jsou-li a, b kladná čísla a je-li $a < b$, uvažujme přímku p s rovnicí $y = ax$ a přímku q s rovnicí $y = bx$. Obě přímky p, q procházejí počátkem; napravo od počátku leží přímka p nad osou x a přímka q nad přímkou p. Z obrazce je patrné, že je-li r přímka s rovnicí $y = 1$, leží průsečík H přímek p, r napravo od průsečíku K přímek q, r. Avšak $H = \left[\frac{1}{a}, 1\right]$, $K = \left[\frac{1}{b}, 1\right]$, takže $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.



Obr. 31.

Poznámka 5,1. Věty 5,1; 5,3; 5,5 a 5,6 mají ten společný tvar, že se v nich předpokládá správnost určité nerovnosti, ze které potom plyne nová nerovnost. Je důležité si uvědomit, že jsou správné také obrácené věty, ve kterých se ze správnosti nové nerovnosti soudí na správnost nerovnosti původní. Přitom každá z obrácených vět plyne z té věty, jejímž obrácením vznikne. V případě věty 5,1 nová nerovnost je $a + c < b + c$; přičteme-li na obou stranách číslo $-c$, dostaneme původní nerovnost $a < b$. V případě věty 5,3 nová nerovnost je $ac < bc$, kde $c > 0$; znásobíme-li obě strany kladným číslem $\frac{1}{c}$, dostaneme původní nerovnost $a < b$. V případě věty 5,5 nová nerovnost je $-a > -b$; protože k číslům $-a$, $-b$ opačná jsou čísla a, b, vede užití věty 5,5 na nerovnost $-a > -b$ zpět k původní nerovnosti $a < b$. V případě věty 5,6 nová nerovnost je $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, při čemž zároveň s čísly a, b také čísla $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ jsou kladná; protože k číslům $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ převrácená jsou čísla a, b, vede užití věty 5,6 na nerovnost $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ zpět k původní nerovnosti $a < b$.

§ 6. Jednoduché příklady na počítání s nerovnostmi

Nerovnosti jsou ve vyšší matematice velmi důležité, na škole se jim však věnuje mnohem méně pozornosti než rovnicím a úpravám algebraických výrazů. Proto si v této kapitole probereme řadu příkladů na užití základních vět o nerovnostech. V tomto paragrafu se omezíme na zcela jednoduché příklady.

Příklad 6,1. Určete, pro která x je splněna nerovnost

$$5 - \frac{3x}{5} > 1 + x\,. \tag{6,1}$$

Početní řešení. Postupujeme úplně obdobně jako v začátcích algebry při řešení rovnice

$$5 - \frac{3x}{5} = 1 + x\,. \tag{6,2}$$

Nejprve předpokládáme, že číslo x splňuje nerovnost (6,1). Podle věty 5,1 na obou stranách nerovnosti (6,1) přičteme číslo -1 a dostaneme

$$4 - \frac{3x}{5} > x\,. \tag{6,3}$$

Podle téže věty na obou stranách nerovnosti (6,3) přičteme číslo $\frac{3x}{5}$ a dostaneme

$$4 > \frac{8x}{5}\,. \tag{6,4}$$

Podle věty (5,3) obě strany nerovnosti (6,4) znásobíme kladným číslem $\frac{5}{8}$ a dostaneme

$$\tfrac{5}{2} > x \tag{6,5}$$

neboli

$$x < \tfrac{5}{2}\,. \tag{6,6}$$

Nejsme ještě docela hotovi, neboť jsme provedli prozatím pouze postupný přechod od dané nerovnosti (6,1) přes pomocné nerovnosti (6,3), (6,4) a (6,5) k výsledné nerovnosti (6,6), a máme ještě prokázat, že jsou správné také obrácené postupné přechody od nerovnosti (6,6) zpět až k původní nerovnosti (6,1). To však plyne z toho, že jsme při přechodech užívali pouze vět 5,1 a 5,3, takže obrácené přechody jsou správné podle poznámky 5,1. Můžeme tedy říci, že všecka řešení dané nerovnosti vyplní otevřený interval $(-\infty, \frac{5}{2})$, a tím je úloha řešena.

Geometrické řešení příkladu 6,1. Rovnice

$$y = 5 - \frac{3x}{5} \tag{6,7}$$

je rovnicí přímky p_1; rovnice

$$y = 1 + x \tag{6,8}$$

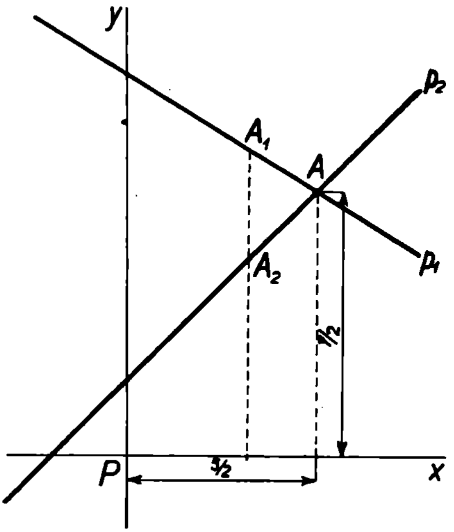
je rovnicí přímky p_2. Pro každou hodnotu čísla x existuje určitý bod

$$A_1 = [x, y_1] = \left[x, 5 - \frac{3x}{5}\right]$$

na přímce p_1 a určitý bod

$$A_2 = [x, y_2] = [x, 1 + x]$$

na přímce p_2. Nerovnost (6,1) má ten geometrický význam, že bod A_1 leží nad bodem A_2. Nyní přímky p_1, p_2 se protnou v bodě $A = [x, y]$. Souřadnici x bodu A dostaneme řešením rovnice (6,2); souřadnici y pak dostaneme dosazením do (6,7) nebo (6,8); vyjde $A = [\frac{5}{2}, \frac{7}{2}]$. Ježto přímka p_1 má směrnici zápornou, přímka p_2 směrnici kladnou, je jasné (viz obr. 32), že bod A_1 leží nad bodem A_2 právě tehdy (viz poznámku I 5,16), jestliže A_1 leží nalevo od A, t. j. právě tehdy, jestliže platí nerovnost (6,6). Tato geometrická úvaha ukazuje, že úkol řešit nerovnost (6,1) se dá převést na úkol řešit rovnici (6,2). Dá se ukázat, že ve velmi obecných případech, možno i říci ve všech prakticky důležitých případech, úkol řešit nerovnost se dá v podstatě převést na úkol řešit rovnici, takže hlavní smysl našich úloh na řešení nerovností je ve výcviku s tím spojeném.



Obr. 32.

Příklad 6,2. Určete, pro která x jsou splněny obě nerovnosti

$$\frac{x+1}{5} < \frac{x+3}{6}, \qquad \frac{2x+4}{5} > \frac{4-x}{3}. \tag{6,9}$$

Početní řešení. Týmž postupem jako v příkladě 6,1 nahradíme první z obou nerovností (6,9) postupně nerovnostmi

$6x + 6 < 5x + 15$ (obě strany jsme znásobili kladným číslem 30),

$x < 9$ (na obou stranách jsme přičtli $-5x - 6$), a druhou nerovnostmi

$6x + 12 > 20 - 5x$ (obě strany jsme znásobili kladným číslem 15),

$11x > 8$ (na obou stranách jsme přičtli $5x - 12$),

$x > \frac{8}{11}$ (obě strany jsme znásobili kladným číslem $\frac{1}{11}$).

Podle poznámky 5,1 je oprávněn také zpětný přechod od výsledných nerovností $x < 9$, $x > \frac{8}{11}$ k původním nerovnostem (6,9). Výsledek: řešení soustavy nerovností (5,11) vyplní otevřený interval $(\frac{8}{11}, 9)$.

Geometrické řešení příkladu 6,2 přenecháváme čtenáři.

Příklad 6,3. Určete, pro která x je splněna nerovnost

$$\frac{7+6x}{3-2x} < \frac{1-3x}{5+x}. \tag{6,10}$$

Řešení. Zde musíme postupovat opatrně. Nejprve uvážíme, že pro $x = \frac{3}{2}$ nemá smysl zlomek nalevo v (6,10) a pro $x = -5$ nemá smysl zlomek napravo. Tyto dvě hodnoty musíme tedy vyloučit. Ostatní hodnoty x rozdělíme na tři druhy.

První případ: $x > \frac{3}{2}$. V tomto případě číslo $x - \frac{3}{2}$, a tedy i číslo $2(x - \frac{3}{2}) = 2x - 3$, je kladné; kladné je rovněž i číslo $5 + x$. Jestliže v nerovnosti (6,10) znásobíme obě strany kladným číslem $(2x - 3)(5 + x)$, nahradíme (6,10) nerovností

$$-(7 + 6x)(5 + x) < (1 - 3x)(2x - 3) \tag{6,11}$$

neboli po úpravě

$$-35 - 37x - 6x^2 < -3 + 11x - 6x^2;$$

na obou stranách přičteme $3 + 37x + 6x^2$ a dostaneme

$$-32 < 48x; \tag{6,12}$$

obě strany znásobíme kladným číslem $\frac{1}{48}$ a dostaneme $-\frac{2}{3} < x$ neboli

$$x > -\frac{2}{3}. \tag{6,13}$$

Obrácený přechod od (6,13) k (6,10) (stále za předpokladu $x > \frac{3}{2}$) je podle poznámky 5,1 také správný. Protože nerovnost (6,13) je důsledkem předpokládané nerovnosti $x > \frac{3}{2}$, vidíme, že všecka $x > \frac{3}{2}$ splňují nerovnost (6,10).

Druhý případ: $x < -5$. V tomto případě obě čísla $2x - 3$, $5 + x$ jsou záporná, takže jejich součin $(2x - 3)(5 + x)$ opět je kladný a týmž postupem jako v prvním případě dostáváme postupně nerovnosti (6,11), (6,12) a (6,13). Avšak nerovnost (6,13) je neslučitelná s nynějším předpokladem $x < -5$, takže druhý případ nedává žádné řešení nerovnosti (6,10).

Třetí případ: $-5 < x < \frac{3}{2}$. V tomto případě číslo $\frac{3}{2} - x$, a tedy též $2(\frac{3}{2} - x) = 3 - 2x$ je kladné; kladné je i číslo $5 + x$. Znásobíme-li obě strany nerovnosti (5,12) kladným číslem $(3 - 2x)(5 + x)$, dostaneme místo (6,10) tentokrát nerovnost

$$(7 + 6x)(5 + x) < (1 - 3x)(3 - 2x)\,,$$

dále místo (6,12) nerovnost

$$48x < -32$$

a konečně místo (6,13) nerovnost

$$x < -\tfrac{2}{3}\,. \tag{6,14}$$

Zpětný přechod opřený o poznámku 5,1 vede (za předpokladu $-5 < x < \frac{3}{2}$) od (6,14) k (6,10).

Shrneme-li dosažené výsledky, vidíme, že řešení nerovnosti (6,10) vyplní dva disjunktní (viz I § 2, str. 13) otevřené intervaly: jednak interval $(\frac{3}{2}, \infty)$ a jednak interval $(-5, -\frac{2}{3})$.

Poznámka 6,1. V § 10 udáme takové početní řešení příkladu 6,3, při kterém nebude třeba rozeznávat různé případy.

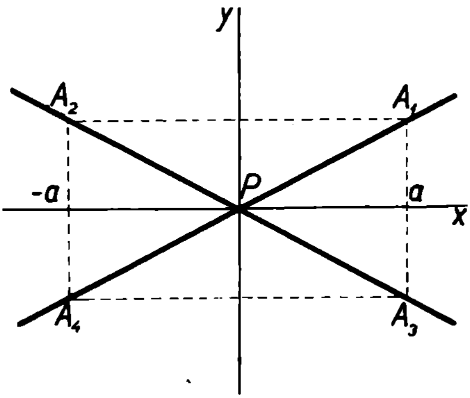
§ 7. Funkce $y = |x|$

Pojem absolutní velikosti a jeho vlastnosti jsme podrobně probírali v kapitolách I až III. Také v této kapitole jsme se s pojmem absolutní velikosti už setkali (viz poznámku 2,1). Nyní nás bude zajímat hlavně geometrická stránka věci.

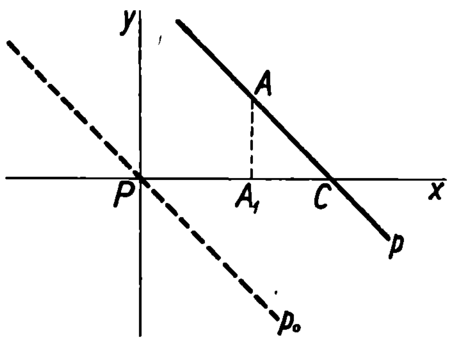
Základní vlastnosti absolutní velikosti jsou vyjádřeny větami 7,1 a 7,2, které nebudeme nově dokazovat, nýbrž pouze provedeme jejich geometrické znázornění.

Věta 7,1. *Absolutní velikost součinu několika čísel je rovna součinu absolutních velikostí všech činitelů.*

Případ libovolného počtu činitelů se převede indukcí na případ dvou činitelů, který si znázorníme geometricky, ponechávajíce stranou případ, že některý činitel je roven nule. Buďte tedy s, a dvě kladná čísla; jde o to, že všecka čtyři čísla $s \cdot a$, $s \cdot (-a)$, $(-s) \cdot a$, $(-s) \cdot (-a)$ mají absolutní velikost rovnou součinu sa. V obr. 33 je znázorněna přímka p s rovnicí $y = sx$ a přímka p' s rovnicí $y = (-s) \cdot x$ a na každé z nich ty body $[x, y]$, jejichž souřadnice x je rovna $\pm a$; jsou to body A_1, A_2, A_3, A_4. Jde o to, že pro všecky čtyři body má číslo $|y|$ touž hodnotu, neboli o to, že všecky čtyři body jsou stejně vzdáleny od osy x, což je patrné z toho, že z bodu A_1 vznikne: [1] bod A_2 překlopením kolem osy y, [2] bod A_3 překlopením vzhledem k ose x, [3] bod A_4 středovou souměrností se středem P.



Obr. 33.



Obr. 34.

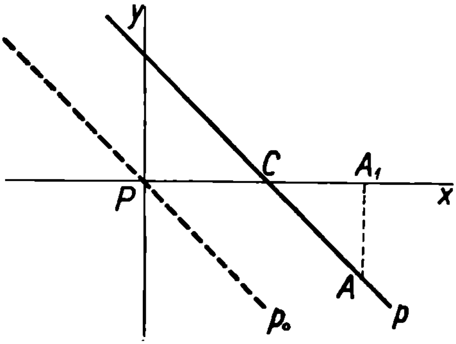
Věta 7,2. *Absolutní velikost součtu několika čísel je nejvýš rovna součtu absolutních velikostí všech sčítanců.*

Případ libovolného počtu sčítanců se převede indukcí na případ dvou sčítanců, který si znázorníme geometricky. Za tím účelem uvažujme (viz obr. 34 a obr. 35) přímku p_0 se zápornou směrnicí, která půlí úhel os x, y; směrnice přímky je rovna -1 a přímka p_0 má rovnici $x + y = 0$. Libovolným bodem $A = [a, b]$ prochází rovnoběžka p s přímkou p_0, jejíž rovnice má tvar $x + y = c$, kde číslo c je rovné $a + b$. V obrazci je vyznačen průsečík $A_1 = [a, 0]$

osy x s přímkou vedenou bodem A kolmo na osu x, jakož i průsečík $C = [a + b, 0]$ přímky p s osou x. Potom je

$$|a| = PA_1 , \quad |b| = A_1A , \quad |a + b| = PC ,$$

a jde tedy o to, že ve všech případech je $PA_1 + A_1A \geqq PC$. V obr. 34 je znázorněn případ $a > 0$, $b > 0$; v tomto případě je $PA_1 + A_1A = PC$; v obr. 35 je znázorněn případ $a > 0$, $b < 0$, $|b| < a$; v tomto případě je $PA_1 + A_1A > PC$. Čtenář nechť sám sestrojí obrazce znázorňující jiné možné případy.



Obr. 35.

Velmi často se užívá toho faktu, že jsou-li a, x libovolná dvě reálná čísla a jsou-li A, X jejich obrazy na číselné ose, je vzdálenost AX rovna

$$AX = |x - a| . \tag{7,1}$$

Vzorec (7,1) se liší pouze označením od vzorce (2,12).

Je-li c libovolné reálné číslo a je-li ε libovolné kladné číslo, uvažujme ta čísla x, pro která platí nerovnost

$$|x - c| \leqq \varepsilon . \tag{7,2}$$

Na číselné ose jsou obrazy našich čísel x ty body, jejichž vzdálenost od obrazu čísla c je nejvýš rovna číslu ε. Je zřejmé, že tyto body vyplní omezený uzavřený interval $\langle c - \varepsilon, c + \varepsilon \rangle$ a že c odpovídá *středu* tohoto intervalu; krátce pravíme, že číslo c (nebo bod c, viz str. 203) je středem našeho intervalu. Omezený otevřený interval $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ je dán nerovností

$$|x - c| < \varepsilon . \tag{7,3}$$

Středem omezeného intervalu, ať už uzavřeného $\langle a, b \rangle$ či otevřeného (a, b), je číslo

$$c = \frac{a + b}{2} , \tag{7,4}$$

neboť

$$c - a = b - c = \frac{b - a}{2},$$

takže na číselné ose vzdálenost bodu c od kteréhokoli z obou bodů a, b je dána týmž číslem $\frac{b-a}{2}$. Všimněme si třeba otevřeného intervalu (a, b), který se skládá z těch čísel x, pro něž platí

$$a < x < b \tag{7,5}$$

nebo také

$$\left| x - \frac{a+b}{2} \right| < \frac{b-a}{2}. \tag{7,6}$$

Čtenář nechť sám odvodí aritmeticky nerovnost (7,6) z nerovností (7,5) a obráceně nerovnosti (7,5) z nerovnosti (7,6).

Jelikož $|-x| = |x|$ pro každé x, je

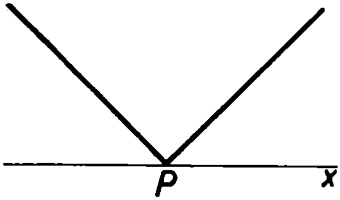
$$y = |x| \tag{7,7}$$

sudá funkce. Její graf je znázorněn v obr. 36; skládá se ze dvou polopřímek vycházejících z počátku souřadnic, které obě svírají s osou x úhel 45°.

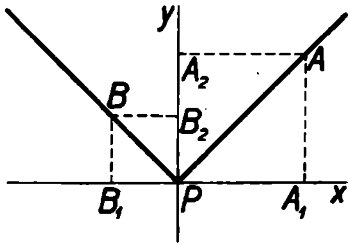
Ve vyšší matematice se často užívá vzorce

$$\big||a| - |b|\big| \leqq |a - b|, \tag{7,8}$$

který se dá dokázat takto. Položme $a - b = c$, takže $a = b + c$.



Obr. 36.



Obr. 37.

Podle věty 7,2 je $|a| \leqq |b| + |c|$; přičteme-li na obou stranách číslo $-|b|$, dostaneme $|a| - |b| \leqq |c|$ neboli

$$|a| - |b| \leqq |a - b|; \tag{7,8'}$$

protože $b - a = -(a - b)$, je $|b - a| = |a - b|$, takže ze (7,8') dostaneme výměnou písmen

$$|b| - |a| \leqq |a - b|. \tag{7,8''}$$

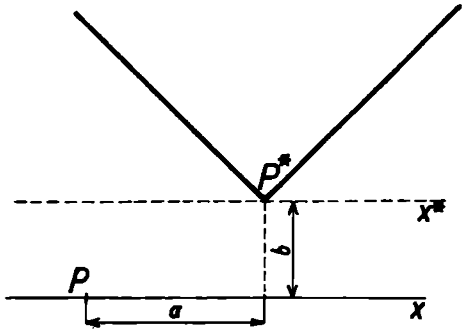
Z toho plyne (7,8), neboť levá strana v (7,8) je rovna buďto levé straně v (7,8′), nebo levé straně v (7,8″). Vzorec (7,8) si můžeme znázornit geometricky pomocí grafu funkce (7,7). Na tomto grafu leží (viz obr. 37) oba body $A = [a, |a|]$, $B = [b, |b|]$; v obrazci jsou dále vyznačeny paty $A_1 = [a, 0]$, $B_1 = [b, 0]$, $A_2 = [0, |a|]$, $B_2 = [0, |b|]$ kolmic spuštěných z bodů A, B na obě osy x, y. Podle (2,12) a (2,13) je

$$A_1B_1 = |a - b|\,, \quad A_2B_2 = \big||a| - |b|\big|\,.$$

Obr. 37 se týká případu $a > 0$, $b < 0$; v souhlase se vzorcem (7,8) je potom $A_2B_2 < A_1B_1$. Čtenář sám nechť sestrojí grafy odpovídající ostatním znaménkovým možnostem.

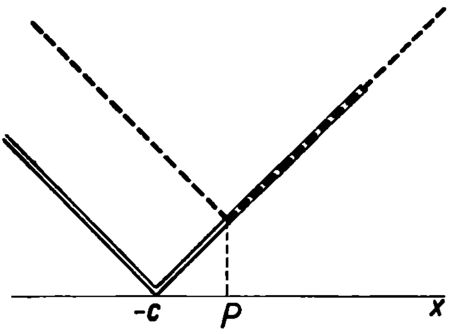
Od funkce (7,7) můžeme dojít k trochu obecnější funkci změnou počátku souřadnic. Přejděme od původní soustavy s počátkem P k nové soustavě souřadnic, jejíž počátek P^* má v původní soustavě souřadnice a, b; jestliže bod, který v původní soustavě má souřadnice x, y, má v nové soustavě souřadnice x^*, y^*, platí rovnice (2,9) a (2,10). Rovnici $y^* = |x^*|$ odpovídá rovnice

$$y = |x - a| + b\,. \quad (7,9)$$



Obr. 38.

Rovnice (7,9) definuje funkci, jejíž graf je znázorněn v obr. 38 za předpokladu, že obě čísla a, b jsou kladná. Čtenář začátečník nepochybí, jestliže si sám sestrojí všechny grafy odpovídající devíti možnostem: (1) $a > 0, b > 0$; (2) $a > 0, b < 0$; (3) $a < 0, b > 0$; (4) $a < 0$, $b < 0$; (5) $a > 0$, $b = 0$; (6) $a < 0, b = 0$; (7) $a = 0$, $b > 0$; (8) $a = 0$, $b < 0$; (9) $a = 0$, $b = 0$. Poslední možnost je ovšem zachycena už v obr. 36.



Obr. 39.

Obr. 39 a 40 ilustrují

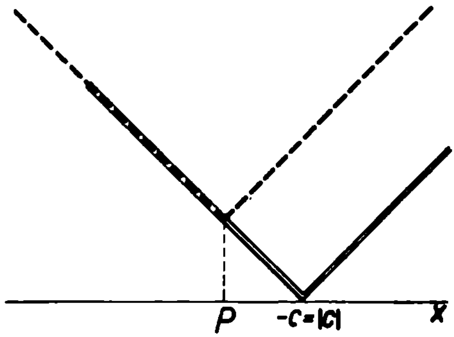
geometricky větu 7,2 (pro dva sčítance). Dvojitou čarou je v nich vyznačen graf funkce

$$y = |x + c| , \qquad (7,10)$$

čárkovaně graf funkce

$$y = |x| + |c| . \qquad (7,11)$$

Obr. 39 znázorňuje případ $c > 0$; v souhlase s větou 7,2 splynou oba grafy pro $x \geqq 0$, kdežto pro $x < 0$ graf funkce (7,10) leží pod grafem funkce (7,11). Obr. 40 znázorňuje případ $c < 0$; v souhlase s větou 7,2 splynou oba grafy pro $x \leqq 0$, kdežto pro $x > 0$ graf funkce (7,10) leží pod grafem funkce (7,11).



Obr. 40.

§ 8. Funkce, jejichž grafy jsou lomené čáry

V tomto paragrafu budeme vyšetřovat funkce, jejichž grafy jsou lomené čáry. Počneme příkladem funkce

$$y = 2x + 1 - 2|x + 1| + |x - 3| . \qquad (8,1)$$

Nejprve uvažme, že je pro každé x

$$|x + 1| = \pm (x + 1) , \quad |x - 3| = \pm (x - 3)$$

se znaménky

$$\begin{aligned} &- \; - \text{ v intervalu } (-\infty, -1\rangle , \\ &+ \; - \text{ v intervalu } \langle -1, 3\rangle , \\ &+ \; + \text{ v intervalu } \langle 3, \infty) . \end{aligned}$$

Proto je naše funkce v každém z těchto tří intervalů totožná s určitou lineární funkcí; jest

$$\begin{aligned} y &= 3x + 6 \text{ v intervalu } (-\infty, -1\rangle , \\ y &= -x + 2 \text{ v intervalu } \langle -1, 3\rangle , \\ y &= x - 4 \text{ v intervalu } \langle 3, \infty) . \end{aligned}$$

Nyní je snadné sestrojit a popsat graf funkce (8,1), který je znázorněn v obr. 41. Část grafu příslušná intervalu $(-\infty, -1\rangle$ je polopřímka se směrnicí $+ 3$, která vychází z bodu $[-1, 3]$ a od něho postupuje nalevo, protne tedy osu x v bodě $[-2, 0]$. Část grafu příslušná intervalu $\langle -1, 3\rangle$ je úsečka, která spojuje bod $[-1, 3]$ s bodem $[3, -1]$. Část grafu příslušná intervalu $\langle 3, \infty)$ je polopřímka se směrnicí $+ 1$, která vychází z bodu $[3, -1]$ a od něho postupuje napravo, protne tedy osu x v bodě $[4, 0]$.

Poznámka 8,1. Směrnicí polopřímky (později též směrnicí úsečky) rozumíme směrnici přímky, jejíž částí je ta polopřímka (nebo úsečka).

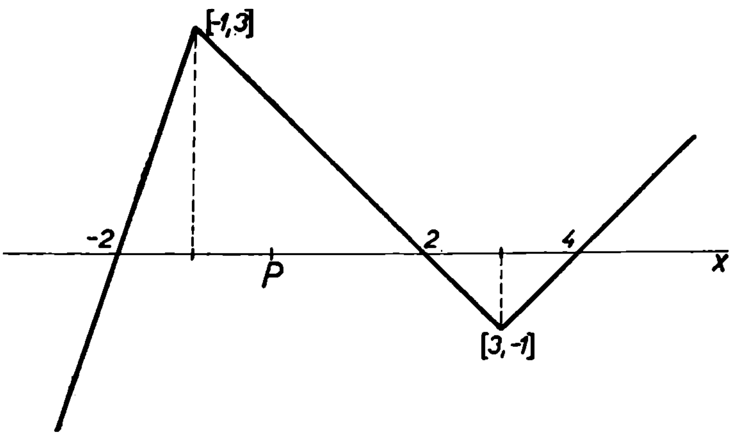
Obecněji uvažujeme funkci tvaru

$$y = kx + s + c_1|x - a_1| + \ldots + c_n|x - a_n| , \qquad (8,2)$$

kde $k, s, a_1, \ldots, a_n, c_1, \ldots, c_n$ jsou dané konstanty, které jsou úplně libovolné. Můžeme však předpokládat, že je

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_n . \qquad (8,3)$$

Poznámka 8,2. Pro $n = 1$ nabude (8,2) tvaru $y = kx + s + c_1 . |x - a_1|$ a nerovnosti (8,3) odpadnou. Kdyby pro $n > 1$ bylo na př. $a_1 = a_2$, mohli bychom oba členy $c_1|x - a_1| + c_2|x - a_2|$ sloučit



Obr. 41.

v jediný člen $(c_1 + c_2)|x - a_1|$. Proto můžeme předpokládat, že čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou navzájem různá; změnou pořadí sčítanců v (8,2) potom docílíme, že platí (8,3).

Za předpokladu (8,3) rozdělí čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ interval $(-\infty, \infty)$ na $n + 1$ intervalů

$$(-\infty, a_1\rangle, \ \langle a_1, a_2\rangle, \ldots, \langle a_{n-1}, a_n\rangle, \ \langle a_n, \infty) \,. \tag{8,4}$$

[Pro $n = 1$ máme dva intervaly $(-\infty, a_1\rangle$, $\langle a_1, \infty)$, ve výše vyšetřovaném případě (8,1) tři intervaly $(-\infty, -1\rangle$, $\langle -1, 3\rangle$, $\langle 3, \infty)$.] V každém z intervalů (8,4) splyne funkce (8,2) s určitou lineární funkcí, zpravidla ovšem v každém z nich s jinou. Označme $b_1, b_2, \ldots, b_n$ hodnoty funkce (8,2) v číslech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a položme

$$A_1 = [a_1, b_1], \ldots, A_n = [a_n, b_n] \,. \tag{8,5}$$

Graf funkce (8,2) se skládá z polopřímky, která vychází z bodu A_1, od něho postupuje nalevo a má směrnici

$$k - (c_1 + \ldots + c_n) = p \,, \tag{8,6}$$

dále z polopřímky, která vychází z bodu A_n, od něho postupuje napravo a má směrnici

$$k + (c_1 + \ldots + c_n) = q \,, \tag{8,7}$$

a mimo to pro $n > 1$ ještě z $n - 1$ úseček $A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n$. Pro $n = 1$ úsečky odpadnou.

Obráceně zvolme n bodů (8,5) tak, že jsou splněny nerovnosti (8,3) (které odpadnou pro $n = 1$), a zvolme ještě dvě čísla p, q. Dokážeme, že lze určit právě jedním způsobem čísla k, s, $c_1, \ldots, c_n$ tak, aby graf funkce (8,2) se skládal z polopřímky se směrnicí p, která vychází z bodu A_1 a od něho postupuje nalevo, dále z polopřímky se směrnicí q, která vychází z bodu A_n a od něho postupuje napravo, mimo to pak pro $n > 1$ ještě z $n - 1$ úseček $A_1A_2, \ldots$ $\ldots, A_{n-1}A_n$, které pro $n = 1$ odpadnou. K určení neznámých máme vedle rovnic (8,6) a (8,7) ještě dalších n rovnic, které vyjadřují, že hodnoty funkce (8,2) v číslech $a_1, \ldots, a_n$ jsou rovny daným číslům $b_1, \ldots, b_n$. Celkem tedy máme soustavu $n + 2$ rovnic o $n + 2$ neznámých k, s, $c_1, \ldots, c_n$. Abychom zjistili, že lze této soustavě rovnic vyhovět právě jedním způsobem, je účelné zavést místo neznámých k, s nové neznámé

$$h = k - (c_1 + \ldots + c_n) \,,$$
$$r = s + (c_1a_1 + \ldots + c_na_n) \,.$$

Místo (8,2) máme potom

$$y = hx + r + c_1(|x - a_1| + x - a_1) + \ldots + \\ + c_n(|x - a_n| + x - a_n) \,. \tag{8,8}$$

Jelikož

$$|x - a_1| + x - a_1 = \begin{cases} 0 \text{ v intervalu } (-\infty, a_1\rangle\,, \\ 2(x - a_1) \text{ v intervalu } \langle a_1, \infty) \end{cases}$$

a podobně pro ostatní výrazy uvnitř závorek v (8,8), podmínky týkající se hodnot funkce v číslech $a_1, \ldots, a_n$ znějí

$$\left.\begin{aligned} &ha_1 + r = b_1\,, \\ &ha_2 + r + 2c_1(a_2 - a_1) = b_2\,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &ha_n + r + 2c_1(a_n - a_1) + \ldots + 2c_{n-1}(a_n - a_{n-1}) = b_n\,. \end{aligned}\right\} \quad (8,9)$$

K těmto n rovnicím přistupují ještě podmínky pro směrnice obou polopřímek, které znějí

$$h = p\,, \tag{8,10}$$

$$h + 2(c_1 + \ldots + c_n) = q\,. \tag{8,11}$$

Celkem máme $n + 2$ rovnic takového tvaru, že je zřejmé, že lze z nich určit $n + 2$ neznámých $h, r, c_1, \ldots, c_n$ právě jedním způsobem: nejprve rovnice (8,10) určuje h, potom první rovnice (8,9) určí r a následující rovnice (8,9) (které odpadnou pro $n = 1$) postupně určí čísla $c_1, \ldots, c_n$ vyjma poslední z nich, které se určí z rovnice (8,11).

Na základě předcházejících úvah můžeme řešit názorným geometrickým způsobem rovnice a nerovnosti, které se liší od obyčejných rovnic a nerovností tím, že se v nich vyskytuje znak absolutní velikosti. Objasníme si to na příkladě rovnice

$$2x + 1 + |x - 3| = 2|x + 1| \tag{8,12}$$

a nerovností

$$2x + 1 + |x - 3| > 2|x + 1|\,, \tag{8,13}$$

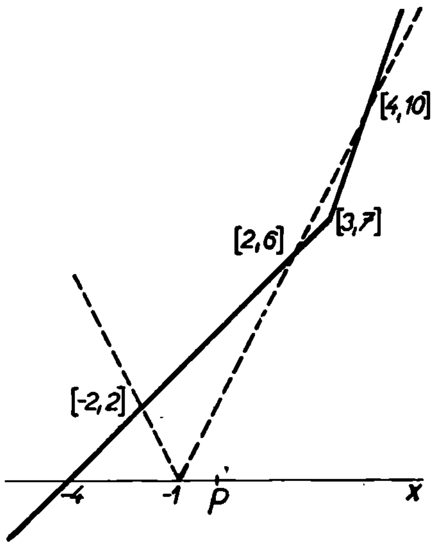
$$2x + 1 + |x - 3| < 2|x + 1|\,. \tag{8,14}$$

Znamená-li $f(x)$ funkci (8,1), lze místo (8,12) psát $f(x) = 0$, dále $f(x) > 0$ místo (8,13) a $f(x) < 0$ místo (8,14). Proto z obr. 41, ve kterém je znázorněn graf naší funkce, vyčteme snadno odpověď na naši úlohu: rovnice (8,12) má tři řešení $x = -2$, $x = 2$, $x = 4$; řešení nerovnosti (8,13) vyplní dva otevřené intervaly $(-2, 2)$, $(4, \infty)$; řešení nerovnosti (8,14) vyplní dva otevřené intervaly $(-\infty, -2)$, $(2, 4)$.

Je patrné, že se naše úloha dá geometricky řešit mnoha jinými způsoby. Nasnadě je způsob založený na grafech funkcí

$$f_1(x) = 2x + 1 + |x - 3|\,, \quad f_2(x) = 2|x + 1|\,,$$

znázorněných v obr. 42; prvý graf je vytažen plně, druhý čárkovaně. Řešení rovnice (8,12) jsou dána těmi x, která odpovídají průsečíkům obou grafů; řešení nerovnosti (8,13) jsou dána těmi x, pro která plně vytažený graf leží nad vyčárkovaným; řešení nerovnosti (8,14) jsou dána těmi x, pro která čárkovaný graf leží nad plně vytaženým. Je jasné, že je to v souhlase s řešením založeným na grafu funkce (8,1).



Obr. 42.

§ 9. Parabola

Než přejdeme k vlastnímu obsahu tohoto paragrafu, bude účelné stručně se zmínit o *transformaci roviny* (viz paragraf 2, str. 203), která každému bodu $A = [x, y]$ přiřadí jako obraz bod $A' = [x', y']$, kde

$$x' = cx\,, \quad y' = cy\,, \qquad (9,1)$$

při čemž písmeno c znamená libovolně zvolenou kladnou konstantu. Je-li $c = 1$, je (9,1) *identická transformace*; každý bod A je totožný se svým obrazem A. Pro libovolné c je počátek P *samodružný* při transformaci (9,1), t. j. splyne se svým obrazem. Je-li však $c \neq 1$, je patrné, že mimo P nemá už transformace (9,1) žádný jiný samodružný bod. Budiž nejprve $c > 1$. Jelikož

$$\sqrt{x'^2 + y'^2} = c\sqrt{x^2 + y^2}\,,$$

platí pro vzdálenosti PA, PA' vzorec

$$PA' = c\,.\,PA\,.$$

Při transformaci (9,1) se tedy všecky vzdálenosti od počátku $c$krát zvětší. Obecněji se snadno dokáže, že jsou-li A_1, A_2 libovolné dva body a A_1', A_2' jejich obrazy, je

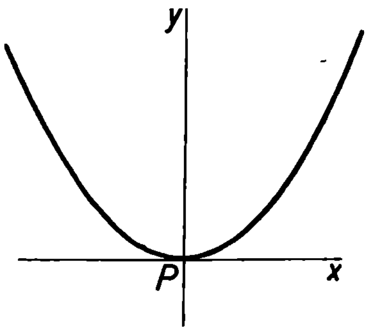
$$A_1'A_2' = c\,.\,A_1A_2\,. \qquad (9,2)$$

Jestliže bod A neleží na ose y, má přímka PA určitou směrnici k a rovnice přímky PA je $y = kx$. Z (9,1) je jasné, že bod A' leží na přímce PA a jelikož $c > 0$, dokáže se snadno, že bod A' leží na *polopřímce* PA. Tento fakt spolu s rovnicí (9,2) jednoznačně určuje polohu obrazu A' libovolného bodu A. Jestliže $c < 1$, pak opět A' leží na polopřímce PA a platí (9,2); jediný rozdíl je v tom, že vzdálenosti se tentokrát nezvětšují, nýbrž zmenšují. Transformace (9,1) se jmenuje *homotetická transformace*; počátek P je jejím *středem* a kladné číslo c, které udává, kolikrát se při homotetické transformaci vzdálenosti zvětšují nebo zmenšují, nazveme *modulem* homotetické transformace.

Zvolme nyní kladné číslo a a vyšetřujme funkci

$$y = ax^2 , \tag{9,3}$$

jejímž grafem je křivka znázorněná v obr. 43; taková křivka se jmenuje *parabola*. Prochází počátkem P, který se jmenuje *vrchol paraboly*. Funkce (9,3) je sudá, takže její graf je souměrný vzhledem k ose y; osa y se nazývá *osou paraboly*. Geometrickou definici paraboly vyložíme později v tomto paragrafu. Pro $x \neq 0$ je $y > 0$, takže až na vrchol P leží celá parabola nad osou x.



Obr. 43.

Je-li c libovolně dané kladné číslo, zaveďme homotetickou transformaci (9,1). Platí-li rovnice (9,3), plyne z (9,1) snadným výpočtem, že

$$y' = a_1(x')^2 ,$$

kde

$$a_1 = \frac{a}{c} . \tag{9,4}$$

Tedy při homotetické transformaci (9,1) přejde parabola (9,3) v parabolu téhož tvaru až na to, že kladná konstanta a je nahrazena kladnou konstantou (9,4). Volíme-li $c = a$, je $a_1 = 1$; z toho plyne, že neztratíme mnoho na obecnosti, jestliže při diskusi rovnice (9,3) se omezíme na případ, že kladná konstanta a je rovna jedné. Přes to je účelné vyšetřovat rovnici (9,3) při libovolné hodnotě kladné konstanty a, tím spíše, že se tím výpočty nikterak nekomplikují.

K základním vlastnostem paraboly (9,3) dospějeme nejúčelněji, vyšetřujeme-li vztahy mezi parabolou a libovolnou přímkou p.

(Čtenář sám nechť si sestrojuje obrazce, které mu ulehčí četbu následujících řádků.) Předpokládejme, že je dán určitý bod

$$A_0 = [x_0, y_0] \tag{9,5}$$

na naší parabole a že přímka p prochází bodem (9,5). Nechť nejprve přímka p má osový směr, t. j. je rovnoběžná s osou y, která je osou naší paraboly. Je jasné, že bod A_0 je jediný průsečík paraboly s takovou přímkou p; přímka p rozdělí rovinu na dvě poloroviny, při čemž v jedné z nich je obsažena ta část paraboly (9,3), ve které je $x > x_0$, ve druhé ta, ve které je $x < x_0$. Jestliže přímka p nemá osový směr, má určitou směrnici, kterou označíme k. Rovnice přímky p potom zní [viz (3,9)]

$$y - y_0 = k(x - x_0)\,. \tag{9,6}$$

Při libovolném x budiž $A = [x, y]$ bod na parabole, $A(k) = [x, Y]$ bod na přímce p. Dále položme $R_k(x) = y - Y$ neboli

$$R_k(x) = ax^2 - [y_0 + k(x - x_0)]\,.$$

Parabola leží nad přímkou p pro ta x, pro něž je $(R_k x) > 0$, pod přímkou p pro ta x, pro něž je $(R_k x) < 0$; průsečíkům přímky p s parabolou přísluší hodnota $R_k(x) = 0$. Jelikož bod (9,5) leží na parabole, je $y_0 = ax_0^2$, takže po snadné úpravě dostaneme

$$R_k(x) = (x - x_0)[a(x + x_0) - k]\,. \tag{9,7}$$

Je tedy $R_k(x_0) = 0$, což bylo jasné předem, protože to neznamená nic jiného, nežli že bod (9,5) přímky p leží na parabole.

Položme nyní

$$x_1 = \frac{k - ax_0}{a}\,, \quad y_1 = ax_1^2\,, \quad A_1 = [x_1, y_1]\,.$$

Potom (9,7) nabude tvaru

$$R_k(x) = a(x - x_0)(x - x_1)\,, \tag{9,8}$$

takže je $R_k(x_1) = 0$. Je-li

$$k \neq 2ax_0\,, \tag{9,9}$$

je $x_1 \neq x_0$, tedy $A_1 \neq A_0$; je-li však

$$k = 2ax_0\,, \tag{9,9'}$$

je $x_1 = x_0$ a body A_0, A_1 splynou. V případě (9,9) nazveme přímku (9,6) *sečnou paraboly*, v případě (9,9′) *tečnou paraboly*. V případě sečny je buďto $x_0 < x_1$, nebo $x_0 > x_1$; je-li $x_0 < x_1$, plyne z (9,8), že pro $x < x_0$ a pro $x > x_1$ je $R_k(x) > 0$, pro $x_0 < x < x_1$ je $R_k(x) < < 0$; je-li $x_0 > x_1$, je $R_k(x) > 0$ pro $x < x_1$ a pro $x > x_0$, $R_k(x) < 0$ pro $x_1 < x < x_0$. V případě tečny plyne z (9,8), že pro všecka $x \neq x_0$ je $R_k(x) > 0$. Ta část roviny, která leží nad parabolou (9,3), tedy množina těch bodů $[x, y]$, pro něž je $y > ax^2$, jmenuje se *vnitřek paraboly*; ta část roviny, která leží pod parabolou, tedy množina těch bodů $[x, y]$, pro něž je $y < ax^2$, jmenuje se *vnějšek paraboly*. Výsledek předchozí úvahy můžeme tedy vyslovit takto:

Věta 9,1. *Sečna protne parabolu ve dvou bodech* A_0, A_1; *úsečka* A_0A_1 *leží* (až na své krajní body) *uvnitř paraboly, zbývající část přímky* A_0A_1 *leží vně paraboly.*

Věta 9,2. *Tečna paraboly leží celá vně paraboly až na* (jediný) *bod, který má společný s parabolou.* Tento bod se jmenuje *bod dotyku* tečny.

Je-li $x_0 = 0$, tedy také $y_0 = 0$, pak (9,9′) dá $k = 0$ a rovnice tečny (9,6) zní $y = 0$. Tedy osa x je tečnou paraboly, jejímž bodem dotyku je počátek neboli vrchol paraboly; říkáme, že osa x je *vrcholová tečna paraboly*.

Poznali jsme, že jestliže bodem A_0 na parabole vedeme nějakou přímku p, má tato přímka zpravidla s parabolou společný ještě právě jeden další bod; existují však dvě výjimečné přímky, které mají s parabolou společný *pouze* bod $A_0 = [x_0, y_0]$. Jednou z těchto dvou výjimečných přímek je přímka s osového směru vedená bodem A_0, druhou je tečna t paraboly, jejímž bodem dotyku je A_0; směrnice tečny t je rovna číslu (9,9′). Mezi oběma výjimečnými přímkami s, t je podstatný rozdíl, který si uvědomíme, vedeme-li bodem A_0 přímku p, která je blízká jedné z obou přímek a protne parabolu mimo v bodě A_0 ještě v dalším bodě $A_1 = [x_1, y_1]$. Jestliže předně přímka p je blízká přímce s, je číslo $|k|$ velmi veliké (k jako dříve je směrnice přímky p), a proto je velmi veliké také číslo $|x_1|$, kde

$$x_1 = \frac{k - ax_0}{a},$$

t. j. bod A_1 je velmi vzdálen od bodu A_0. Jestliže však přímka p je blízká tečně t, liší se její směrnice k velmi málo od směrnice (9,9′), a proto číslo

$$|x_1 - x_0| = \frac{|k - 2ax_0|}{a}$$

je velmi malé; také číslo

$$|y_1 - y_0| = a|x_0 + x_1| \, . \, |x_1 - x_0|$$

je velmi malé a bod A_1 leží velmi blízko bodu A_0.

Abychom dospěli ke geometrické definici paraboly, zaveďme (viz obr. 44) bod $F = \left[\frac{1}{4a}, 0\right]$ a přímku d s rovnicí

$$y + \frac{1}{4a} = 0 .$$

Bod F se jmenuje *ohnisko paraboly*, přímka d se jmenuje *řídicí přímka paraboly*. Je-li $A = [x, y]$ libovolný bod roviny, AF jeho vzdálenost od bodu F, AA' jeho vzdálenost od přímky d, je

$$(AF)^2 = x^2 + \left(y - \frac{1}{4a}\right)^2 ,$$

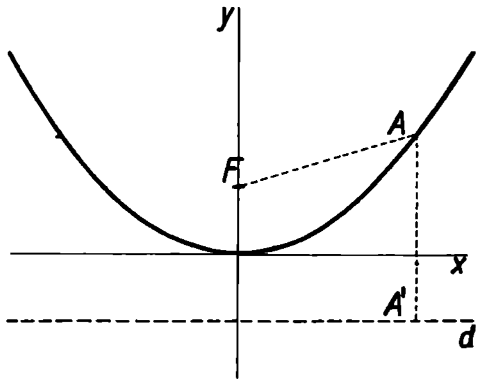
$$(AA')^2 = \left(y + \frac{1}{4a}\right)^2 ,$$

tedy

$$(AF)^2 - (AA')^2 = x^2 + \left(y - \frac{1}{4a}\right)^2 - \left(y + \frac{1}{4a}\right)^2$$

a po snadné úpravě

$$(AF)^2 - (AA')^2 = \frac{1}{a}(ax^2 - y) .$$



Obr. 44.

Pro body na parabole je $ax^2 - y = 0$, pro body uvnitř paraboly je $ax^2 - y < 0$, pro body vně paraboly je $ax^2 - y > 0$. Tedy:

Věta 9,3. *Bod na parabole je stejně vzdálen od ohniska jako od přímky řídicí. Bod uvnitř paraboly je blíže ohnisku než přímce řídicí. Bod vně paraboly je blíže řídicí přímce než ohnisku.*

Dosud jsme předpokládali, že $a > 0$. Avšak z bodu $[x, y]$ vznikne překlopením kolem osy x bod $[x, -y]$, takže při kladném a graf funkce

$$y = -ax^2$$

vznikne z grafu funkce (9,3) překlopením kolem osy x, je tedy též parabolou. Jinak řečeno, při každém $a \neq 0$ je grafem funkce (9,3) parabola. I při záporném a je počátek vrcholem paraboly, osa y je osou paraboly, osa x vrcholovou tečnou. Avšak při záporném a leží parabola (až na svůj vrchol) pod osou x, její vnitřek leží pod parabolou, vnějšek nad parabolou.

§ 10. Kvadratické mnohočleny

V § 9 jsme poznali, že při libovolném $a \neq 0$ graf funkce

$$y = ax^2$$

je parabola, jejíž vrchol je v počátku a jejíž osou je osa x. Budiž nyní

$$V = [v, w]$$

libovolně daný bod roviny. Můžeme provést transformaci souřadnic tak, aby novým počátkem byl bod V. Jsou-li x^*, y^* nové souřadnice bodu, jehož původní souřadnice jsou x, y, víme [viz (2,9)], že

$$x^* = x - v\,, \quad y^* = y - w\,. \tag{10,1}$$

Je-li nyní dáno libovolné číslo $a \neq 0$, pak rovnice

$$y^* = a(x^*)^2 \tag{10,2}$$

vyjadřuje v nových souřadnicích parabolu, jejímž vrcholem je bod V a jejíž osou je druhá osa nových souřadnic. Vrátíme-li se k původním souřadnicím pomocí vzorců (10,1), dostaneme

$$y = a(x - v)^2 + w$$

neboli

$$y = ax^2 + bx + c\,, \tag{10,3}$$

kde

$$a \neq 0,\ b = -2av,\ c = av^2 + w\,. \tag{10,4}$$

Protože $a \neq 0$, máme na pravé straně rovnice (10,3) mnohočlen druhého stupně neboli *kvadratický mnohočlen*. Obráceně, je-li dán kvadratický mnohočlen $ax^2 + bx + c$, takže $a \neq 0$, vypočteme z (10,4)

$$v = -\frac{b}{2a}\,, \qquad w = -\frac{D}{4a}\,, \tag{10,5}$$

kde

$$D = b^2 - 4ac\,. \tag{10,6}$$

Potom pomocí (10,1) přejde rovnice (10,3) v rovnici (10,2). Tedy graf libovolného kvadratického mnohočlenu (10,3) je parabola, jejíž vrchol je

$$V = \left[-\frac{b}{2a}\,,\ -\frac{D}{4a}\right]; \tag{10,7}$$

osa paraboly má rovnici

$$x = -\frac{b}{2a}; \tag{10,8}$$

vrcholová tečna má rovnici

$$y = -\frac{D}{4a}. \tag{10,9}$$

Vrchol (10,7) leží na vrcholové tečně (10,9); každý jiný bod paraboly, která je grafem funkce (10,3), leží v případě $a > 0$ *nad* přímkou (10,9), v případě $a < 0$ *pod* přímkou (10,9). Tedy v případě $a > 0$ je číslo (10,9) *minimum* neboli nejmenší hodnota funkce (10,3); této nejmenší hodnoty nabude funkce (10,3) jenom *jednou*, a to v čísle x daném rovností (10,8); každé hodnoty větší než minimum nabude funkce (10,3) *dvakrát* a hodnot menších než minimum nenabude vůbec. V případě $a < 0$ je číslo (10,9) *maximum* neboli největší hodnota funkce (10,3); této největší hodnoty nabude funkce jenom jednou v čísle (10,8), každé hodnoty menší než maximum nabude funkce (10,3) dvakrát a hodnot větších než maximum nenabude vůbec.

Jestliže $D < 0$, potom v případě $a > 0$ má funkce (10,3) minimum (10,9) větší než nula, v případě $a < 0$ maximum menší než nula. Tedy pro $D < 0$ funkce (10,3) nenabude pro žádné x hodnoty nula, t. j. rovnice

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{10,10}$$

nemá v tomto případě žádný kořen. Jestliže $D = 0$, je číslo (10,9) rovno nule; toto číslo je v případě $a > 0$ minimem a v případě $a < 0$ maximem funkce (10,3). Tedy pro $D = 0$ má rovnice (10,10) právě jeden kořen (10,8). Jestliže $D > 0$, potom v případě $a > 0$ má funkce (10,3) minimum (10,9) menší než nula, v případě $a < 0$ maximum větší než nula. Tedy pro $D > 0$ funkce (10,3) nabude dvakrát hodnoty nula, t. j. rovnice (10,10) má v tomto případě právě dva kořeny.

Poznali jsme geometrickou cestou, že o počtu kořenů rovnice (10,10) rozhoduje to, zda číslo (10,6) je kladné, záporné či rovné nule. K témuž výsledku jsme došli aritmetickou cestou v kap. IV ke konci § 8. Ponecháváme čtenáři, aby úvahy tohoto paragrafu sám doplnil tak, aby pro $D > 0$ znovu dostal vzorce pro oba kořeny rovnice (10,10), aritmeticky odvozené na konci IV § 8.

Vyložili jsme v tomto paragrafu elementárním způsobem, jakých hodnot nabývá mnohočlen stupně n pro $n = 2$. Poznamenejme, že s pomocí vyšší matematiky lze snadno rozřešit tuto otázku pro *libovolné* n; to však už přesahuje rámec této knihy.

Proberem si nyní několik příkladů na počítání s nerovnostmi.

Příklad 10,1. Určete, pro která x je splněna nerovnost

$$\frac{7 + 6x}{3 - 2x} < \frac{1 - 3x}{5 + x}. \tag{10,11}$$

Řešení. Náš příklad je totožný s příkladem 6,3, který jsme řešili tak, že jsme rozeznávali tři případy. Nyní podáme jiné řešení, při kterém není třeba rozeznávat různé případy. Nerovnost (10,11) můžeme psát ve tvaru

$$\frac{7 + 6x}{3 - 2x} - \frac{1 - 3x}{5 + x} < 0$$

neboli ve tvaru

$$\frac{16(2 + 3x)}{(3 - 2x)(5 + x)} < 0 .$$

Je jasné, že tato nerovnost je splněna právě tehdy, jestliže je splněna nerovnost

$$(2 + 3x)(3 - 2x)(5 + x) < 0 . \tag{10,12}$$

Avšak nerovnost (10,12) platí právě tehdy, jestliže na levé straně není žádný činitel roven nule a mimo to počet záporných činitelů je lichý. Nyní levá strana v (10,12) je rovna nule pro

$$x = -5, -\tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{2} .$$

Po odstranění těchto tří hodnot zbudou čtyři otevřené intervaly; v každém z nich mají jednotliví činitelé nalevo v (10,12) pevné znaménko, které je patrné z tabulky

	$(-\infty, -5)$	$(-5, -\frac{2}{3})$	$(-\frac{2}{3}, \frac{3}{2})$	$(\frac{3}{2}, \infty)$
$2 + 3x$	$-$	$-$	$+$	$+$
$3 - 2x$	$+$	$+$	$+$	$-$
$5 + x$	$-$	$+$	$+$	$+$

Řádky tabulky přísluší činitelům, sloupce intervalům. Levá strana v (10,12) je záporná ve druhém a čtvrtém intervalu. Tedy řešení nerovnosti (10,11) vyplní dva otevřené intervaly $(-5, -\frac{2}{3})$ a $(\frac{3}{2}, \infty)$; to je v souhlase s výsledkem získaným v § 6.

Příklad 10,2. Určete, pro která x je splněna nerovnost

$$\frac{2x+2}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} > \frac{x}{x-2}. \qquad (10,13)$$

Řešení. Nerovnost (10,13) můžeme psát ve tvaru

$$\frac{2x+2}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} - \frac{x}{x-2} > 0$$

neboli ve tvaru

$$\frac{2(2x^2-5x-1)}{(x-1)(x+1)(x-2)} > 0 .$$

Hodnoty

$$x = -1, 1, 2,$$

ve kterých levá strana dané nerovnosti je bezvýznamná, musíme vyloučit. Kvadratický mnohočlen $2x^2 - 5x - 1$ má dva kořeny

$$\alpha_1 = \frac{5+\sqrt{33}}{4}, \qquad \alpha_2 = \frac{5-\sqrt{33}}{4};$$

jsou to iracionální čísla přibližně rovná 2,686; $-$ 0,186 a pro všecka x je

$$2x^2 - 5x - 1 = 2(x-\alpha_1)(x-\alpha_2).$$

Podobně jako v příkladě 10,1 můžeme sestavit tabulku

	$(-\infty, -1)$	$(-1, \alpha_2)$	$(\alpha_2, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \alpha_1)$	(α_1, ∞)
$2x^2 - 5x - 1$	+	+	—	—	—	+
$x - 1$	—	—	—	+	+	+
$x + 1$	—	+	+	+	+	+
$x - 2$	—	—	—	—	+	+

Řešení dané nerovnosti přísluší těm sloupcům, ve kterých počet znamének minus je sudý. Tedy řešení nerovnosti (10,13) vyplní tři otevřené intervaly $(-1, \alpha_2)$, $(1, 2)$, (α_1, ∞).

Příklad 10,3. Určete, pro která x je splněna nerovnost

$$\frac{3x}{x-1} < \frac{5}{x+4}.$$

Řešení. Danou nerovnost můžeme uvést na tvar

$$\frac{3x}{x-1} - \frac{5}{x+4} < 0$$

neboli

$$\frac{3x^2 + 7x + 5}{(x-1)(x-4)} < 0.$$

Kvadratický mnohočlen $3x^2 + 7x + 5$ má kladný nejvyšší koeficient 3 a záporný diskriminant [viz (10,6)] $D = 7^2 - 4 \,.\, 3 \,.\, 5 = -11$, takže $3x^2 + 7x + 5 > 0$ pro všecka x. Z toho je patrné, že řešení dané nerovnosti vyplní otevřený interval $(1,4)$.

Příklad 10,4. Určete, pro která x je splněna následující nerovnost:

(a) $(2x - 1)(1 + 3x) < 4$;

(b) $(x - 1)^2 + (x + 3)^2 > 26$;

(c) $x + 1 < \dfrac{6}{x}$;

(d) $x + 2 > \dfrac{28}{x-1}$;

(e) $\dfrac{6}{1+x} + \dfrac{1}{1-x} < \dfrac{2}{x}$.

Řešení. V každém případě vyplní řešení několik otevřených intervalů. V případě (a) je to jediný interval $(-\frac{5}{6}, 1)$, v případě (b) intervaly $(-\infty, -4)$, $(2, \infty)$, v případě (c) intervaly $(-\infty, -3)$, $(0, 2)$, v případě (d) intervaly $(-6, 1)$, $(5, \infty)$, v případě (e) intervaly $(-\infty, -1)$, $(0, \frac{1}{3})$, $(1, 2)$. Odůvodnění přenecháváme čtenáři.