Počet integrální

V. Přechod od integrálů neurčitých k určirým

In: Karel Petr (author); Vojtěch Jarník (author): Počet integrální. s dodatkem Úvod do teorie množství. (Czech). : Jednota československých mathematiků a fysiků, 1931. pp. 137--212.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402667

V. PŘECHOD OD INTEGRÁLŮ NEURČITÝCH K URČITÝM.

1. OBECNÉ VÝVODY.

54. Integrál diferenciálu $f(x)dx$ jsme definovali pro jistý základní interval jakožto funkci $F(x)$, jejížto diferenciál stále v tom intervalu jest $f(x)dx$. Funkce $F(x)$ jest stanovena tou definicí až na aditivní konstantu; v důsledku toho jsme psali obyčejně

$$\int f(x)\,dx = F(x) + k$$

a říkali integrálu tak definovanému *integrál neurčitý*. Integrál (resp. konstantu integrační k) můžeme úplně určiti různými požadavky; nejobyčejnější způsob jest ten, že požadujeme, aby integrál pro jistou hodnotu neodvisle proměnné, nacházející se v základním intervalu — označme ji a — byl rovný nule; t. j.

$$F(a) + k = 0 \quad \text{aneb} \quad k = -F(a).$$

Integrál takovýmto způsobem úplně určený značíme tím, že dáváme ke znaménku integračnímu dolů index a, píšíce

$$\int_a f(x)\,dx = F(x) - F(a), \tag{α}$$

kterémužto výrazu říkati budeme *integrál určitý*.

Proměnná x v (α) se vyskytující sluje *integrační proměnná*. Za tu můžeme do výrazu pro určitý integrál (na pravé straně (α) se nacházejícího) dosaditi jakoukoliv hodnotu základního intervalu.

Tu hodnotu pak, kterou za integrační proměnnou do výrazu integrálu určitého dosazujeme, píšeme ke znaménku integračnímu jakožto index horní, takže znamená

$$\left.\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx &= F(b) - F(a), \\ \int_a^t f(x)\,dx &= F(t) - F(a), \end{aligned}\right\} \tag{I}$$

při čemž ovšem hodnoty a, b, t jsou hodnoty jednoho a téhož intervalu, ve kterémž stále $F'(x) = f(x)$.

Výrazy pro integrály v (I) (na pravé straně se nacházející) *nezávisí již od integrační proměnné a jest tudíž lhostejno — pro význam symbolů na levých stranách — jak integrační proměnnou značíme.* Rovnice (I) zůstaly by platny, kdybychom místo x psali na př. u.

POZNÁMKA 1. Pro integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ se užívá též pojmenování *integrál omezený* a číslům a, b se říká **meze** toho integrálu; nazývá se pak číslo b **horní mez,** číslo a **dolní mez.** Integrál pak $\int f(x)\,dx$ se často nazývá neomezeným. Tato pojmenování opírají se o druhou definici integrálu, oprávněnost jich však vysvitne i z úvahy následujícího odstavce.

POZNÁMKA 2. K vůli úspoře místa a času se užívá pro výraz $F(b) - F(a)$ tohoto označení

$$F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b,$$

takže rovnici (I) lze psáti ve tvaru

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b.$$

Podobně, aby se naznačilo, že do funkce $F(x)$ za proměnnou x má se dosaditi číslo a, se píše často

$$F(a) = [F(x)]_a \qquad \text{anebo obšírněji} \qquad F(a) = [F(x)]_{x=a}\,.$$

Dříve se často užívalo značek

$$\Big/_{a}^{b} F(x) = F(b) - F(a), \qquad \Big/^{x=a} F(x) = F(a)$$

a jiných podobných.

55. Geometrický význam určitého integrálu. Definujme si *velikost plochy, jež jest omezena uzavřenou čarou se neprotínající, jakožto číslo kladné P dané těmito vlastnostmi:*

1. Patří-li k nějaké části roviny číslo P jakožto velikost plošná, patří ke shodné části totéž číslo.

2. Patří-li k části roviny číslo P jako velikost plošná a k jiné části, jež však obsahuje všecky body části prvé, číslo P', pak jest $P' \geqq P$.

3. Jestliže část roviny, jež jest omezena čarou se neprotínající a jíž přísluší plocha P, rozdělíme přímkou ve dvě části, jimž přísluší plochy P_1, P_2, pak jest

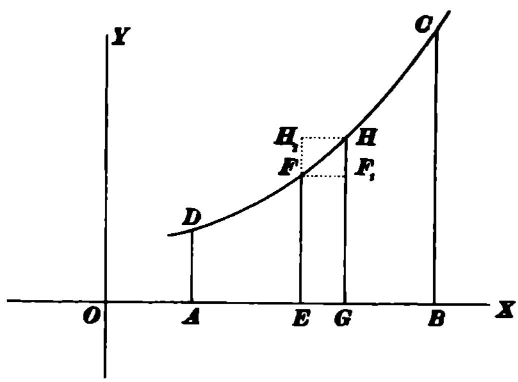
$$P = P_1 + P_2.$$

4. Čtverci o straně rovné 1 patří jako velikost plošná 1 (t. j. $P = 1$).

Konečně učiníme předpoklad, že každé části rovinné omezené přímkami (v konečném počtu) přísluší určitá velikost plošná.

Na základě tohoto předpokladu a vlastností 1, 2, 3 a 4 odvozuje se v planimetrii věta, že plošná velikost pravoúhelníku o stranách a, b jest dána součinem ab. Větu tuto budeme předpokládati.

Budiž v rovině XY křivka o rovnici $y = f(x)$, kdež $f(x)$ jest funkce spojitá a kladná v intervalu (a, b). (Viz obr. 1.) Budeme



Obr. 1.

pak vyšetřovati číslo, jež lze části roviny XY omezené danou křivkou $y = f(x)$, osou X a pořadnicemi $x = a$, $x = \xi$ $(a < \xi \leq b)$ přiřaditi jakožto velikost plošnou. Existuje-li takové číslo, ať jest ξ jakákoliv hodnota intervalu (a, b), jest to číslo funkcí proměnné ξ (která za daných předpokladů s rostoucím ξ rovněž roste). Označíme funkci tu pro okamžik $\Phi(\xi)$. Pak jest

$$\text{plocha } AEFD = \Phi(\xi), \qquad \text{plocha } AGHD = \Phi(\xi + h)$$

(v obrazci jest $OA = a$, $OE = \xi$, $EG = h$, $OB = b$, dále přímky AD, EF, GH, BC jsou rovnoběžny s OY a kolmy k OX, $AD = f(a)$, $EF = f(\xi)$, $GH = f(\xi + h)$, $BC = f(b)$ a konečně $GF_1 = EF$, $EH_1 = GH$. Podle vlastnosti 3 jest

$$\text{plocha } EGHF = |\,\text{plocha } AGHD - \text{plocha } AEFD\,| = |\,\Phi(\xi + h) - \Phi(\xi)\,|.$$

Rozdíl $\Phi(\xi + h) - \Phi(\xi)$ jest kladný nebo záporný podle toho, je-li h kladné nebo záporné. Avšak podle 2. vlast. jest

$$\text{plocha } EGHH_1 \geqq \text{plocha } EGHF \geqq \text{plocha } EGF_1F$$

za předpokladu ovšem, že pořadnice GH příslušná k $x = OG$ jest největší ze všech pořadnic příslušných k x v intervalu

$(\xi, \xi+h)$ a pořadnice EF zároveň nejmenší (jakož v obr. předpokládáno). Nerovnině té můžeme však dáti tento obecně platný tvar

$$h \mid M_{\xi, \xi+h} \geqq \mid \Phi(\xi+h) - \Phi(\xi) \mid \geqq h \mid m_{\xi, \xi+h},$$

kde $M_{\xi, \xi+h}$, $m_{\xi, \xi+h}$ jsou největší resp. nejmenší hodnotou funkce $f(x)$ v intervalu $(\xi, \xi+h)$. Poslední nerovninu lze psáti též takto

$$M_{\xi, \xi+h} \geqq \frac{\Phi(\xi+h) - \Phi(\xi)}{h} \geqq m_{\xi, \xi+h}.$$

Necháme-li h konvergovati k nule, konverguje se zřetelem k tomu, že $f(x)$ jest funkcí spojitou, i $M_{\xi,\xi+h}$, i $m_{\xi,\xi+h}$ k téže limitě t. j. k $f(\xi)$, k níž konverguje i číslo mezi $M_{\xi,\xi+h}$, $m_{\xi,\xi+h}$ položené a tudíž existuje limita

$$\lim_{h=0} \frac{\Phi(\xi+h) - \Phi(\xi)}{h} = \Phi'(\xi) = f(\xi$$

t. j. existuje-li takové číslo $\Phi(\xi)$, je to číslo integrálem z funkce $f(\xi)$. Poněvadž však pro $\xi = a$ splývá E s A a plocha $AEFD$ jest rovna nule, jest $\Phi(\xi)$ pro $\xi = a$ rovno nule a můžeme podle označení v předcházejícím odstavci vyloženého psáti

$$\Phi(\xi) = \int_a^{\xi} f(x)\, dx. \tag{a}$$

Splývá-li ξ s b, máme

$$\text{plocha } ABCD = \Phi(b) = \int_a^b f(x)\, dx. \tag{b}$$

Vidíme z toho, že nutná podmínka, aby části rovinné omezené čarou $y = f(x)$, osou X a pořadnicemi $x = a$, $x = \xi$, kde ξ jest libovolná hodnota intervalu (a, b), příslušela plocha definovaná shora uvedenými čtyřmi vlastnostmi, jest, aby $f(x)$ aspoň v intervalu (a, b) měla funkci primitivní.

Můžeme pak vysloviti větu: *Patří-li k části rovinné omezené křivkou $y = f(x)$ ($f(x)$ jest funkce spojitá) a přímkami $x = a$, $x = \xi$, $y = 0$ určitá velikost plošná, ať jest číslo ξ jakékoliv číslo mezi a, b, pak existuje v intervalu (a, b) k $f(x)$ funkce primitivní $\Phi(x)$ a plocha ta jest dána integrálem* (a).

Kdybychom tedy pokládali za evidentní (na základě názoru geometrického), že části rovinné vytčené určitá velikost plošná přináleží, musili bychom uzavírati, že ke každé funkci $f(x)$ v (a, b) spojité jistě přináleží integrál v tom intervalu.

Nejsme však nijak oprávněni z názoru geometrického uzavírati věty z analyse matematické, jakož již vyplývá z toho, že někdy závěry na názoru založené ukázaly se nesprávny (na př.

z názoru geometrického zdá se vyplývati, že každá funkce v (a, b) spojitá má v (a, b) derivaci anebo aspoň derivaci zprava, resp. zleva, což jest, jak známo, nepravdivo, viz DP odst. 114). Jednoduché řešení obou otázek (o tom, zda funkci spojité přísluší integrál; zda části rovinné svrchu stanovené přísluší plocha) bude podáno později na podkladě nové definice integrálu. Odpověď na druhou otázku (a tudíž i na prvou) bude kladná, t. j., že plocha $AEFD$ vskutku existuje (a jest dána v (a)).

POZNÁMKA 1. Předpokládali jsme v úvaze předcházející, že funkce $f(x)$ jest v (a, b) kladná. Předpoklad tento není nutný. Kdyby $f(x)$ byla záporná v (a, b), dospěli bychom k výsledku, že přísluší-li k části rovinné $AEFD$ jistá velikost plošná, že jest dána v (a), avšak se znaménkem záporným. Rovněž snadno vyplývá z předcházejícího za přiměřených předpokladů geometrický význam integrálů (a), mění-li v (a, b) $f(x)$ své znaménko, což jsou však vesměs věci, s nimiž později budeme se obšírněji zabývati.

POZNÁMKA 2. Z této úvahy jsou patrny důvody, proč číslům a, b v integrálu (I) dáno bylo pojmenování meze; neboť integrál ten vyjadřuje plochu, kterou z pásu, jehož hraniční (mezné) přímky jsou $x = a$, $x = b$, vytínají osa X a čára $y = f(x)$.

56. Derivace integrálů určitého podle horní (dolní) **meze.** Pokládáme-li meze a, b integrálu $\int_a^b f(x)\,dx$ za neodvisle proměnné (na nichž $f(x)$ nezávisí), vyplývá ihned z (I) hodnota derivace toho integrálu podle b, resp. podle a. Jest

$$\begin{aligned} \frac{d}{db}\left(\int_a^b f(x)\,dx\right) &= F'(b) = f(b), \\ \frac{d}{da}\left(\int_a^b f(x)\,dx\right) &= -F'(a) = -f(a). \end{aligned} \tag{II}$$

Závisí-li však $f(x)$ na čísle a resp. b, jež jsou mezemi integrálu z té funkce, pak tyto rovnice nejsou platny, neboť potom určitý integrál závisí od a resp. b dvojím způsobem. Pišme na př. $f(x) = \varphi(x, a)$ a předpokládejme, že v jistém intervalu (ve kterém se nacházejí meze integrálu a, b) jest $F(x, a)$ primitivní funkcí k $\varphi(x, a)$ a dále předpokládejme, že derivaci výrazu

$$F(x, a) = \int \varphi(x, a)\,dx$$

podle a lze provésti v daném intervalu, když na pravé straně derivujeme podle α za integračním znaménkem (odst. 9): t. j., že jest

$$\frac{\partial F(x,\alpha)}{\partial \alpha}=\int \frac{\partial \varphi(x,\alpha)}{\partial \alpha}\,dx+k. \tag{β}$$

Pak jest derivace integrálu určitého

$$\int_a^b \varphi(x,\alpha)\,dx = F(b,\alpha)-F(a,\alpha)$$

podle α *za předpokladu, že b jest funkcí parametru α mající derivaci podle α,* rovna

$$\frac{\partial F(b,\alpha)}{\partial b}\cdot\frac{db}{d\alpha}+\frac{\partial F(b,\alpha)}{\partial \alpha}-\frac{\partial F(a,\alpha)}{\partial \alpha}.$$

Avšak
$$\frac{\partial F(b,\alpha)}{\partial b}=\varphi(b,\alpha),\quad \frac{\partial F(b,\alpha)}{\partial \alpha}-\frac{\partial F(a,\alpha)}{\partial \alpha}=\int_a^b \frac{\partial \varphi(x,\alpha)}{\partial \alpha}\,dx$$

(neboť derivace na levé straně prvé z obou právě napsaných rovnic jest derivace částečná podle b a provádí se tudíž tak jakoby α a b byly na sobě nezávisly, užívá se tedy (II), druhá rovnice jest důsledek (β)).

Jest tedy — značme derivaci podle α znakem D_α —

$$D_\alpha \int_a^b \varphi(x,\alpha)\,dx=\varphi(b,\alpha)\,D_\alpha b+\int_a^b D_\alpha \varphi(x,\alpha)\,dx.$$

Závisí-li b i a na α, jest obecněji

$$D_\alpha \int_a^b \varphi(x,\alpha)\,dx=\varphi(b,\alpha)\,D_\alpha b-\varphi(a,\alpha)\,D_\alpha a+\int_a^b D_\alpha \varphi(x,\alpha)\,dx. \tag{γ}$$

Speciálně jest, je-li $b=\alpha$

$$D_b \int_a^b \varphi(x,b)\,dx=\varphi(b,b)+\int_a^b D_b\,\varphi(x,b)\,dx.$$

57. Další základní vlastnosti integrálu určitého. Ze vztahu (I) vyplývá tato relace

$$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx. \tag{III}$$

Podle (I) jest dále, jsou-li čísla a, b, c vesměs v intervalu, ve kterémž jest integrálem z $f(x)$ stále táž funkce $F(x)$,

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a),\qquad \int_b^c f(x)\,dx=F(c)-F(b),$$

$$\int_a^c f(x)\,dx=F(c)-F(a)$$

a tedy
$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx. \tag{IV}$$

Rovnici tuto můžeme zevšeobecniti. Vsuneme-li mezi a a b (předpokládajíce stále, že v (a, b) má $f(x)$ za integrál funkci $F(x)$) $n-1$ hodnot $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$, jest
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^b f(x)\,dx. \tag{IV$_1$}$$

58. Věta o střední hodnotě (*speciální*). Rovnice (1) má jednoduchý důsledek plynoucí z věty o střední hodnotě počtu diferenciálního. (DP 104.) Podle ní jest
$$F(b) - F(a) = (b-a)\ F'[a + \Theta(b-a)] = (b-a)\ f(a + \Theta(b-a)),$$
při čemž $0 < \Theta < 1$: tudíž
$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\ f[a + \Theta(b-a)], \tag{V}$$
vztah tento sluje *věta prvá o střední hodnotě* počtu integrálního (ve speciálním tvaru). Věta (V) předpokládá pro svoji platnost toliko, že k $f(x)$ v intervalu (a, b) existuje stále funkce primitivní.

Z (V) vyplývá na př., že je-li stále v (a, b) $f(x) > 0$ majíc tam funkci primitivní, že
$$\int_a^b f(x)\,dx > 0 \qquad \text{když} \qquad b > a. \tag{1}$$

Zvláště pak jest platna věta: *V každém intervalu, ve kterém $f(x) > 0$, jest integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ rostoucí funkcí horní meze.* Neboť, jsou-li b, $b+h$ v intervalu, ve kterém $f(x) > 0$, jest
$$\int_a^{b+h} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^{b+h} f(x)\,dx \qquad \text{(podle (IV))}$$
a tedy
$$\int_a^{b+h} f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = \int_b^{b+h} f(x)\,dx > 0 \qquad \text{(podle (1))}.$$

Mají-li v (a, b) $f(x)$ i $g(x)$ funkce primitivní a je-li $f(x) > g(x)$ pro všecka x v (a, b), jest tedy při $b > a$
$$\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx > 0, \quad \text{t. j.} \quad \int_a^b f(x)\,dx > \int_a^b g(x)\,dx. \tag{2}$$

Je-li tedy v intervalu (a, b) stále $M \geqq f(x) \geqq m$, jest

$$\int_a^b M\,dx \geqq \int_a^b f(x)\,dx \geqq \int_a^b m\,dx \quad \text{aneb} \quad M(b-a) \geqq \int_a^b f(x)\,dx \geqq m(b-a). \qquad (2')$$

Speciálně jest, je-li $|f(x)| < \varepsilon$ aneb obšírněji psáno $\varepsilon > f(x) > -\varepsilon$,

$$\varepsilon(b-a) > \int_a^b f(x)dx > -\varepsilon(b-a) \text{ aneb stručněji psáno } \left|\int_a^b f(x)dx\right| < \varepsilon(b-a). \qquad (2'')$$

59. Věta o střední hodnotě (*obecná*). Lze snadno odvoditi obecnější větu o střední hodnotě než (V), užíváme-li obecnější věty o střední hodnotě počtu diferenciálního. Jest, jsou-li funkce $F(x)$, $\varphi_1(x)$ v celém intervalu (a, b) spojité a mají-li ve všech bodech vnitřních toho intervalu derivace (DP 106),

$$\frac{F(b)-F(a)}{\varphi_1(b)-\varphi_1(a)} = \frac{F'(c)}{\varphi'_1(c)}, \qquad c = a + (b-a)\theta, \qquad 0 < \theta < 1. \qquad (3)$$

Rovnice tato má přirozeně význam jenom tenkráte, když $\varphi_1'(c)$ a $\varphi_1(b) - \varphi_1(a)$ jsou od nuly různy.

Klademe-li (za předpokladu, že příslušné integrály neurčité v intervalu (a, b) existují)

$$\varphi_1(x) = \int \varphi(x)\,dx, \qquad F(x) = \int \varphi(x)\,\psi(x)\,dx,$$

t. j. že

$$\varphi_1'(x) = \varphi(x), \qquad F'(x) = \varphi(x)\,\psi(x),$$

můžeme rovnici psáti ve tvaru

$$F(b) - F(a) = (\varphi_1(b) - \varphi_1(a))\,\frac{\varphi(c)\,\psi(c)}{\varphi(c)}$$

aneb konečně

$$\int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx = \psi(c)\int_a^b \varphi(x)\,dx, \qquad c = a + (b-a)\,\theta. \qquad (\mathrm{V}_1)$$

K platnosti této rovnice se vyžaduje, aby $\varphi(c) = \varphi_1'(c)$ bylo od nuly různo a rovněž $\int_a^b \varphi(x)\,dx$. Obojí bude splněno, učiníme-li buď předpoklad, že v intervalu (a, b) stále jest $\varphi(x) > 0$, anebo předpoklad, že v (a, b) stále jest $\varphi(x) < 0$.

Shrneme-li všecky předpoklady, máme větu; *Existují-li k funkcím $\varphi(x)$, $\varphi(x) \cdot \psi(x)$ v intervalu (a, b) funkce primitivní a nemění-li $\varphi(x)$ v (a, b) svého znaménka jsouc stále od nuly různo, jest platný vztah* (V_1). Věta tato sluje *věta o střední hodnotě* počtu integrálního.

POZNÁMKA. Bylo by snadno rozšířiti platnost rovnice (V_1) i na případ, že $\varphi(x)$ stává se v intervalu (a, b) nulou, zachovávajíc však jinak stále své znaménko (zvláště, je-li $\psi(x)$ v (a, b) funkcí spojitou). Provedení tohoto rozšíření opomíjím, jelikož později bude podáno jiné odvození věty o střední hodnotě nezávislé na větách počtu diferenciálního, při čemž zároveň podáno bude ještě další zevšeobecnění rovnice (V_1). Avšak i odvození tu podané má důležitost, jelikož jím osvětlena souvislost mezi větami o střední hodnotě počtu diferenciálního a počtu integrálního.

60. Předpokládejme nyní, že $f(x)$ jest spojitá v intervalu (a, b) a má v něm primitivní funkci $F(x)$. Buďtež $a, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, b$ řada hodnot buď stále vzrůstajících anebo stále klesajících. Podle (IV_1) jest

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^b f(x)\,dx.$$

Užijeme-li na každý z integrálů na pravé straně věty (V), máme

$$\int_a^b f(x)\,dx = (x_1 - a)\,f(\xi'_1) + (x_2 - x_1)\,f(\xi'_2) + \cdots + (b - x_{n-1})\,f(\xi'_n); \tag{4}$$

při tom jest ξ'_1 jistá hodnota v intervalu (a, x_1), ξ'_2 v $(x_1, x_2), \ldots, \xi'_n$ v (x_{n-1}, b). Buďtež dále ξ_1 libovolná hodnota v intervalu (a, x_1) meze k němu počítaje, ξ_2 podobně v (x_1, x_2), ξ_3 v $(x_2, x_3), \ldots, \xi_n$ v (x_{n-1}, b) a uvažujme součet

$$\mathfrak{S} = (x_1 - a)\,f(\xi_1) + (x_2 - x_1)\,f(\xi_2) + \cdots + (b - x_{n-1})\,f(\xi_n). \tag{5}$$

Utvoříme-li rozdíl rovnic (4) a (5), dostaneme

$$\begin{aligned}\mathfrak{S} - \int_a^b f(x)\,dx = (x_1 - a)\,(f(\xi_1) - f(\xi'_1)) + (x_2 - x_1)\,(f(\xi_2) - f(\xi'_2)) + \cdots +\\ + (b - x_{n-1})\,(f(\xi_n) - f(\xi'_n)).\end{aligned} \tag{6}$$

Učiňme v této rovnici n tak veliké a všecky intervaly (a, x_1), $(x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, b)$ tak malé, aby oscilace funkce $f(x)$ v každém z těch intervalů byla menší než $\frac{\varepsilon}{b - a}$, kdež ε kladné, což jest možno podle předpokladu, že $f(x)$ jest v (a, b) funkcí spojitou (DP 78, 1. důsl.). Pak bude

$$|f(\xi_1) - f(\xi'_1)| < \frac{\varepsilon}{|b - a|},$$

$$|f(\xi_2) - f(\xi'_2)| < \frac{\varepsilon}{|b - a|}, \ldots, |f(\xi_n) - f(\xi'_n)| < \frac{\varepsilon}{|b - a|}$$

a z (6) následuje
$$\left|\mathfrak{S}-\int_a^b f(x)\,dx\right| <$$
$$|x_1-a|\frac{\varepsilon}{|b-a|}+|x_2-x_1|\cdot\frac{\varepsilon}{|b-a|}+\cdots+|b-x_{n-1}|\cdot\frac{\varepsilon}{|b-a|}$$
$$<\frac{\varepsilon}{|b-a|}(|x_1-a|+|x_2-x_1|+\cdots+|b-x_{n-1}|)=\frac{\varepsilon}{|b-a|}\cdot|b-a|,$$
$$\left|\mathfrak{S}-\int_a^b f(x)\,dx\right|<\varepsilon.$$

Lze tedy rozdíl mezi $\mathfrak{S}$ a $\int_a^b f(x)\,dx$ učiniti co do absolutní hodnoty menším než libovolné číslo kladné ε, učiníme-li jenom n dosti veliké a intervaly, na něž (a, b) jest hodnotami $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ rozděleno, dosti malé. Můžeme tudíž vysloviti větu:

Jestliže $f(x)$ jest v intervalu (a, b) funkcí spojitou, majíc tam zároveň primitivní funkci $F(x)$, pak existuje limita součtu
$$(x_1-a)\,f(\xi_1)+(x_2-x_1)\,f(\xi_2)+\cdots+(b-x_{n-1})\,f(\xi_n),$$
$$\xi_i \text{ jest v } (x_{i-1}, x_i);\ x_0=a,\ x_n=b,$$
pro ten případ, že n roste nade všecky meze a že velikost jednotlivých intervalů (a, x_1), $(x_1, x_2), \ldots (x_{n-1}, b)$ konverguje k nule, a jest rovna integrálu $\int_a^b f(x)\,dx$, t. j. rovna $F(b) - F(a)$.

Věta tato nám poskytuje jistý přechod od definice integrálu jakožto primitivní funkce k definici Riemannově, se kterou obšírně v oddíle následujícím se zabývati budeme.

61. Rozšíření pojmu určitého integrálu. Vztah
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$
definující určitý integrál v mezích a, b předpokládá, že $F(x)$ má ve všech bodech intervalu $(a. b)$ derivaci, která jest stále rovna $f(x)$. Platnost tohoto vztahu a tím i pojem integrálu v mezích a, b rozšíříme nejprve na ten případ, *že $F(x)$ má za derivaci $f(x)$ ve všech bodech intervalu (a, b) vyjma isolované body intervalu (a, b), kde $F(x)$ derivaci* (v užším smyslu, DP 100) *nemá, že však při tom jest $F(x)$ v celém intervalu funkcí* **spojitou.** V těch isolovaných bodech *nemusí býti $f(x)$ definována, po případě může se v jich okolí stávati nekonečnou.*

PŘÍKLAD 1. Integrál
$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\tfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+k$$
jest spojitou funkcí x v celém intervalu (pro všecka x). Následkem toho

můžeme jej podle předcházejícího rozšíření pojmu integrálního vzíti v libovolných mezích, ačkoliv funkce $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$ nemá pro $x=0$ derivaci v užším slova smyslu. Derivace v širším smyslu jest $+\infty$. Můžeme tedy na př. psáti

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2}, \qquad \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = 0, \quad \text{atd.}$$

PŘÍKLAD 2. Výraz

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

má, poněvadž arcsin x jest v intervalu $(-1, 1)$ spojitou funkcí mající za derivaci $1/\sqrt{1-x^2}$ vyjímaje v bodech ± 1, kde však spojitou zůstává, význam a tuto hodnotu: $\arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{1}{2}\pi$.

PŘÍKLAD 3. Integrál

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x}$$

nemá významu. Neboť funkce $\log|x|$ má sice za derivaci $\frac{1}{x}$ v celém intervalu $(-1, 1)$ vyjma bod $x=0$ (kde pouze existuje derivace v širším smyslu rovná $\pm\infty$), avšak funkce $\log|x|$ přestává býti pro $x=0$ spojitou, stávajíc se v okolí toho bodu nekonečnou.

PŘÍKLAD 4. Uvažujme integrál eliptický prvého druhu v normálním tvaru Weierstrassově

$$\int_{e_1}^{x} \frac{dx}{\sqrt{4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}}, \qquad x > e_1 > e_2 > e_3.$$

V intervalu (e_1, x) stává se funkce za znaménkem integračním nekonečnou v bodě $x=e_1$. Abychom rozhodli, zda lze integrovati již od dolní meze e_1 (ve všech ostatních bodech intervalu integračního existuje k funkci integrované primitivní funkce), rozvineme si funkci za integračním znaménkem v řadu mocninnou postupující podle mocnin $x-e_1$ a to způsobem následujícím. Klademe

$$\frac{1}{\sqrt{4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}} = \frac{1}{2\sqrt{x-e_1}} \; \frac{1}{\sqrt{(x-e_2)(x-e_3)}}$$

a druhý činitel na pravé straně poslední rovnice rozvineme v řadu mocninnou postupující podle mocnin rozdílu $x-e_1$ a tedy tvaru

$$A_0 + A_1(x-e_1) + A_2(x-e_1)^2 + \cdots, \quad \text{kde } A_0 = \frac{1}{\sqrt{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}}$$

a ostatní koeficienty se vypočtou rovněž podle formule Taylorovy. Řada tak vzniklá jest, je-li x dosti blízké k e_1, stejnoměrně konvergentní i máme pro primitivní funkci v bodech okolí bodu e_1 různých od e_1 (odst. 6)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}} = \int \frac{dx}{2\sqrt{x-e_1}} \left(A_0 + A_1(x-e_1) + A_2(x-e_1)^2 + \cdots\right)$$

$$= \frac{x-e_1}{\sqrt{x-e_1}} \left(A_0 + \frac{1}{3} A_1(x-e_1) + \frac{1}{5} A_2(x-e_1)^2 + \cdots\right).$$

Funkce tak získaná jest spojitou v celém intervalu (e_1, e_1+h) krajní bod e_1

v to čítaje; lze tedy bod e_1 bráti jako dolní (horní) mez integrálu a integrál předložený má v důsledku rozšíření pojmu určitého integrálu učiněného v tomto odstavci význam.

POZNÁMKA 1. Abychom rozhodli, zda daný integrál určitý má význam, stává-li se funkce za znaménkem integračním v isolovaných bodech intervalu integračního nekonečnou anebo obecněji přestává-li tam míti $f(x)$ vlastnost býti derivací funkce $F(x)$, k tomu podle svrchu zavedeného rozšíření se vyžaduje vědomost o tom, zda funkce $F(x)$, jež jest nehledě k oněm isolovaným bodům primitivní funkcí ku $f(x)$ v intervalu integračním, jest v intervalu integračním spojitou. Velmi často lze pomocí různých kriterií učiniti rozhodnutí pouze na základě chování se funkce $f(x)$ ve zmíněných isolovaných bodech. Kriteria ta vyložíme později na základě Riemannovy definice omezeného integrálu, kde s těmito otázkami poznovu se budeme zabývati. Zatím vystačíme ve všech případech nám se naskytujících s metodou vyloženou v příkladě 4.

POZNÁMKA 2. Rozšíření tu podané pro určitý integrál mohli bychom poněkud jinak formulovati. Budiž v důsledku podané definice

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

a předpokládejme pro jednoduchost, že funkce $F(x)$ spojitá v (a, b) nemá pouze v jediném bodě c položeném uvnitř intervalu (a, b) derivaci (jež všude jinde v (a, b) existuje a jest dána funkcí $f(x)$). Pak můžeme též psáti

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon=0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon'=0} \int_{c+\varepsilon'}^b f(x)\,dx; \qquad (q)$$

při tom předpokládáno $a < b$ a kladná čísla ε, ε' jsou již tak malá, aby $a < c - \varepsilon < c + \varepsilon' < b$. Že pravé strany rovnic (p) a (q) jsou identické, následuje ihned z okolnosti, že $F(x)$ jest v (a, b) a tedy i v bodě c spojitá funkce. Následkem toho jest pravá strana rovnice (q) rovna

$$\lim_{\varepsilon=0}(F(c-\varepsilon) - F(a)) + \lim_{\varepsilon'=0}(F(b) - F(c+\varepsilon')) = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a).$$

Obdobně tomu jest tak i v případech, kdy takových bodů c jest v (a, b) několik.

62. Není třeba předpokládati, že body, ve kterých $F(x)$ přestává míti v intervalu (a, b) derivaci, jsou vesměs isolované, tedy (poněvadž běží o intervaly konečné), že jest jich konečný počet. est na př.

$$\int\left(\sqrt[3]{\sin 1/x}-\frac{\cos 1/x}{3x\sqrt[3]{\sin^2 1/x}}\right)dx = x\sqrt[3]{\sin 1/x}+k.$$

Funkce definovaná vztahem

$$F(x)=x\sqrt[3]{\sin 1/x} \quad \text{pro } x \neq 0, \qquad F(0)=0$$

jest funkcí spojitou pro všecka x; můžeme, rozšiřujíce ještě dále platnost integrálu určitého, klásti pro libovolná a, b

$$\int_a^b\left(\sqrt[3]{\sin 1/x}-\frac{\cos 1/x}{3x\sqrt[3]{\sin^2 1/x}}\right)dx = F(b)-F(a)$$

přes to, že funkce za znaménkem integračním stává se nekonečnou v nekonečně mnoha bodech $x=1/k\pi$, $k=\pm 1, \pm 2, \ldots$ a bod $x=0$, ve kterém jest neurčitou, není od bodů $x=1/k\pi$ isolován.

63. Abychom provedli rozšíření pojmu určitého integrálu obecně, jest nutno zavésti některé nové pojmy z teorie množství bodových, jakož i opírati se o některé věty základní o těch množstvích. Důkazy vět o množstvích bodových během výkladů upotřebených budou pak podány v dodatku ke konci knihy, jednak aby nebyl rušen přehled výkladů o integrálním počtu, jednak, aby o elementech teorie množství bodových pojednáno bylo soustavně a v celku.

Zavedeme nejprve pojem **množství jednoduše spočetného.** Nejjednodušší množství jednoduše spočetné jest množství čísel celých obsažených v přirozené řadě čísel $1, 2, 3, 4, \ldots$. Každé množství čísel, bodů anebo jiných objektů takové, že členy toho množství a čísla z přirozené řady čísel jest možno vzájemně přiřaditi tak, že každý člen toho množství jest přiřaděn jednomu číslu z přirozené řady čísel a naopak, jest množství jednoduše spočetné (jest tedy jednomu každému členu přiřaděno jedno číslo z přirozené řady čísel a zároveň každému číslu z přirozené řady čísel jenom jeden člen z daného množství). Na př. řada čísel

$$1,\ q,\ q^2,\ q^3, \ldots$$

jest množství čísel jednoduše spočetné (q^{k-1} a číslo celé k vzájemně přiřaděny). Vůbec každá řada čísel (Dp, 26) jest množství jednoduše spočetné.

Všecka čísla kladná racionální, t. j. čísla tvaru p/q, kde p, q jsou čísla celá kladná, tvoří *množství čísel jednoduše spočetné.* Neboť čísla racionální lze uspořádati v řadu tím, že je srovnáme nejprve podle velikosti součtu čitatele a jmenovatele, čísla pak, kde součet jmenovatele a čitatele jest týž podle velikosti čitatele (při tom u každého racionálního čísla předpokládáme, že p a q nemají společnou míru). Tak dostaneme řadu (místo $1/1$ píšeme 1 atd.)

$$1,\ 2,\ 1/2,\ 3,\ 1/3,\ 4,\ 3/2,\ 2/3,\ 1/4,\ 5,\ 1/5,\ 6,\ 5/2,\ 4/3,\ 3/4,\ 2/5,\ 1/6, \ldots,$$

čímž každému číslu přirozené řady číselné přiřaděno jedno číslo racionální a naopak.

Další důležitý pojem jest **množství bodů (čísel) perfektní.** Každé množství bodové E, z něhožto derivované E' (Dp, 191a) s ním se shoduje (tedy $E \equiv E'$) sluje perfektní množství. Na př. všecka čísla reálná intervalu $(0, 1)$ tvoří množství perfektní. V každém množství perfektním jest každý bod množství zároveň bodem zhuštění pro body toho množství.

Množství derivované z množství bodového E, které jsme značili E', sluje také *derivace (prvá) množství E.* Derivace E' jest nové množství bodové, k němuž přísluší opět množství derivované, jež značiti budeme E'' a nazývati *druhým derivovaným množstvím* (druhou derivací) množství E. A tak můžeme určovati derivaci prvou, druhou třetí, ... daného množství

$$E', E'', E''', \ldots, E^{(k)} \ldots$$

Může se státi, že derivovaná množství od jistého indexu vymizí, avšak jest možno, že řada množství právě vypsaná, jest nekonečná; pak existují body společné všem členům této řady a tvoří nové množství, jež značiti budeme $E^{(\omega)}$, nazývati pak budeme toto množství *derivace ω-tá.**) Postupné derivace tohoto množství $E^{(\omega)}$ tvoří novou řadu množství a budeme značiti derivace ty (prvou, druhou, třetí, ...) znaky $E^{(\omega+1)}, E^{(\omega+2)}, E^{(\omega+3)}, \ldots$ Body společné všem těmto množstvím (t. j. množstvím $E^{(\omega+k)}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$) tvoří ω-tou derivaci množství $E^{(\omega)}$; ji značíme $E^{(\omega 2)}$; takto dále postupujíce dospíváme celkem k množstvím

$$E^{(\omega)}, E^{(\omega 2)}, E^{(\omega 3)}, E^{(\omega 4)}, \ldots\ldots,$$

jimž společné body tvoří množství $E^{(\omega^2)}$, t. j. ω^2-tou derivaci množství E. Takto pokračujíce sestrojíme derivaci $E^{(\alpha)}$, kde α jest mnohočlen s celistvými součiniteli v ω. Avšak postup v konstrukci derivací tím není ještě ukončen. Můžeme konstruovati množství obsahující všecky body společné množstvím $E^{(\omega)}, E^{(\omega^2)}, E^{(\omega^3)}, \ldots$ Toto množství označeno bylo $E^{(\omega^\omega)}$; atd.

Jest patrno, že všecky derivace množství perfektního E jsou identicky shodny s množstvím E.

Dále zavedeme si pro stručnost pojmenování **množství reducibilní**, jež jest množství, při němž některá z derivací $E^{(\alpha)} = 0$ (t. j. neobsahuje žádných čísel; veškeré pak další derivace jsou ovšem rovněž rovny nule).

Tu pak jsou platny věty **(Cantor-Bendixonovy):**

Množství reducibilní jest množstvím jednoduše spočetným.

Derivaci prvou každého množství bodového (číselného) lze rozložiti v množství reducibilní a množství perfektní (při čemž obě ta množství nemají společných bodů a jedno z nich může se redukovati na nulu).

Věta právě vyslovená platí nejenom pro prvou derivaci každého bodového množství, nýbrž vůbec pro každé uzavřené množství (DP, 191a).

64. Toto předeslavše, rozšíříme pojem integrálu určitého výrokem: *Jestliže derivace funkce $F(x)$ spojité v (a, b) ve všech bodech intervalu (a, b) s výjimkou bodů obsažených v množství bodovém reducibilním existuje a jest rovna $f(x)$, pak značí*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \qquad (A)$$

---

*) Původně místo ω užíváno bylo znaku ∞.

Pro pojem integrálu takto rozšířený jsou platny nejprve věty

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx, \quad \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx \qquad (+)$$

plynoucí přímo z definice (stejně jako v odst. 57 tytéž věty pro určitý integrál v odst. 54 zavedený). Stejně jest platna pro integrál tak definovaný věta

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (f(x) + g(x))\,dx \qquad (-)$$

(za předpokladu ovšem, že integrály v rovnici této se nacházející existují). Věta tato rovněž jest téměř bezprostřední důsledek definice a okolnosti, že sloučením dvou množství reducibilních vzniká zase množství reducibilní.

Konečně jest platna v podstatě své věta o střední hodnotě, již pouze nutno poněkud jinak vysloviti. Dokážeme si: *Je-li v intervalu* (a, b) *stále* $f(x) > 0$, *pak jest integrál* (A) *při* $b > a$ *číslo kladné.* Abychom větu tuto dokázali, označíme si množství bodů, v nichž derivace (v užším smyslu) funkce $F(x)$ buď neexistuje anebo není rovna $f(x)$ krátce $\mathfrak{A}$. Pak jest patrno nejdříve, že množství $\mathfrak{A}$ není v žádné části intervalu (a, b) všude hustým.*) Neboť množství $\mathfrak{A}$ jest reducibilní a kdyby bylo v intervalu položeném na (a, b) o délce δ všude hustým, pak by prvá a *všecky další* derivace obsahovaly všecka čísla (body) toho intervalu a množství $\mathfrak{A}$ nebylo by reducibilní. Jsou tedy v každém intervalu ležícím na (a, b) intervaly, ve kterých není žádný bod z množství $\mathfrak{A}$.

Dále zabývati se budeme funkcí proměnné x, když x jest v intervalu (a, b):

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a) \qquad x \text{ v } (a, b) \quad (B)$$

Funkce tato jest spojitá (neboť $F(x)$ jest spojitá), dále jest $\Phi(a) = 0$ a konečně jest v každém intervalu, ve kterém není bod z $\mathfrak{A}$, funkcí stále rostoucí. (K důkazu postačí integrál dávající $\Phi(x)$ rozložiti podle druhé věty $(+)$ shodně jako při důkaze obdobného tvrzení v odst. 58; jediný rozdíl při důkaze bude spočívati v tom, že místo $b, b+h$ použije se $x, x+h$, o kterýchžto bodech učiní se právě předpoklad, že jsou v intervalu, v němž není žádný z bodů množství $\mathfrak{A}$; i jest tedy integrál v mezích $x, x+h$ z diferenciálu $f(t)\,dt$ číslo kladné — je-li ovšem $h > 0$ — podle (1) odst. 58). Avšak i v intervalech, ve kterých jest konečný počet bodů z $\mathfrak{A}$ (a ve kterých není žádný bod z $\mathfrak{A}'$, derivovaného množství z $\mathfrak{A}$), jest $\Phi(x)$ funkcí rostoucí; neboť takový interval (α, β) se konečným počtem bodů z $\mathfrak{A}$ rozpadá v konečný počet intervalů (jichž krajní body jsou právě ty body z $\mathfrak{A}$ v konečném počtu a krajní body α, β daného intervalu). Poněvadž pak v každém částečném intervalu jest funkce $\Phi(x)$ rostoucí a v celém intervalu (α, β) spojitou, jest i v (α, β) stále rostoucí. Avšak i v intervalech, ve kterých jest konečný počet bodů z $\mathfrak{A}'$ (a ve kterých

*) Všude hustým v intervalu (α, β) nazýváme dané množství číselné tenkráte, existuje-li mezi každými dvěma racionálními čísly intervalu (α, β) jedno číslo daného množství (a tudíž i nekonečné množství čísel daného množství — neboť mezi dvěma racionálními čísly jest nekonečné množství racionálních čísel). Srovnej DP, 16.

není žádný bod z $\mathfrak{A}''$, druhého derivovaného množství z $\mathfrak{A}$) jest $\Phi(x)$ funkcí rostoucí, neboť takový interval (α', β') se konečným počtem bodů z $\mathfrak{A}'$ rozpadá v konečný počet intervalů částečných a poněvadž v každém částečném intervalu jest funkce $\Phi(x)$ rostoucí a v celém intervalu (α', β') spojitou, jest i v (α', β') stále rostoucí. A takovýmto způsobem můžeme bez jakéhokoliv omezení dále pokračovati a jest následkem toho patrno, že, je-li $\mathfrak{A}$ množstvím reducibilním, že vskutku jest $\Phi(x)$ v intervalu (a, b) funkcí rostoucí a že jest $\Phi(b) > \Phi(a)$, t. j. $\quad \Phi(b) > 0, \quad F(b) - F(a) > 0,\quad$ čímž věta dokázána.

Stejně vyplývá: Je-li $f(x) < 0$ v intervalu (a, b), pak jest integrál (A) při $b > a$ číslo záporné (a funkce $\Phi(x)$ v (a, b) stále klesající).

Je-li $f(x) = 0$ v intervalu (a, b) s výjimkou bodů reducibilního množství $\mathfrak{A}$, pak jest integrál (A) rovný nule (a funkce $\Phi(x)$ v (a, b) stále rovna nule).

Z věty poslední a ze vztahu (—) následuje dále: Integrál (A), existuje-li při funkci $f(x)$, jest číslo jednoznačně stanovené. Neboť kdyby k jedné a téže funkci $f(x)$, přináležely dvě hodnoty různé P, P_1 integrálu (A), takže by bylo

$$\int_a^b f(x)\,dx = P, \qquad \int_a^b f(x)\,dx = P_1,$$

bylo by podle (--)

$$P - P_1 = \int_a^b (f(x) - f(x))\,dx = \int_a^b 0\,.\,dx = 0$$

t. j. bylo by $P = P_1$ a nemohly by býti P, P_1 různy. Stejně vyplývá:

Přísluší-li k funkci $f(x)$ integrál (A) resp. funkce $\Phi(x)$, pak i k funkci $f_1(x)$, pro kterou $f(x) - f_1(x) \neq 0$ toliko pro ta x (pro ty body), *jež tvoří množství reducibilní $\mathfrak{A}_1$, přísluší integrál (A) resp. funkce $\Phi(x)$ a to táž hodnota integrálu a táž funkce jako k funkci $f(x)$.*

65. Věta o střední hodnotě pro rozšířený pojem integrální. Nejprve jest, jestliže $f(x) = 1$ (s výjimkou po případě hodnot pro x tvořících reducibilní množství $\mathfrak{A}$),

$$\int_a^b f(x)\,dx = b - a, \qquad \int_a^b Mf(x)\,dx = M(b - a). \tag{α}$$

Dále jest, přísluší-li k $f(x)$ i $g(x)$ integrál (A) a je-li v (a, b) — nehledě k reducibilnímu množství $\mathfrak{A}_1$ — $f(x) > g(x)$

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx > 0 \qquad \text{při } b > a$$

$$\int_a^b f(x)\,dx > \int_a^b g(x)\,dx. \tag{β}$$

Je-li tedy $f(x)$ funkce v (a, b) shora i zdola ohraničená (tedy konečná v (a, b)) a značí-li M resp. m horní resp. dolní hranici funkčních hodnot v intervalu (a, b),*) jest $M \geqq f(x) \geqq m$ a tedy podle (α) a (β)

$$M(b - a) \geqq \int_a^b f(x)\,dx \geqq m(b - a), \qquad b > a, \tag{γ}$$

*) Při stanovení čísel M, m pro interval (a, b) můžeme abstrahovati od reducibilního množství bodů intervalu (a, b).

což jest věta o střední hodnotě pro zevšeobecněný pojem integrálu určitého. Znaménko rovnosti přichází na levém křídle tenkráte k platnosti, když $f(x)$ jest rovna M v celém intervalu (a, b) s výjimkou reducibilního množství bodů (a obdobně i na pravém křídle). Obecněji jest (za předpokladu, že i k $f(x) . \varphi(x)$ i k $\varphi(x)$ přísluší integrál (A) a že $\varphi(x) \geqq 0$ v (a, b) — nehledě k reducibilnímu množství bodů v (a, b) —

$$M\int_a^b \varphi(x)\,dx \geqq \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx \geqq m\int_a^b \varphi(x)\,dx, \qquad b > a,$$

což vyplývá stejně jako vztah (γ).

POZNÁMKA. Rozdělíme-li si interval (a, b) body $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, pro které $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < b$, na n menších intervalů, v nichž horní respektive dolní hranice hodnot funkce $f(x)$ má hodnoty $M_1, M_2, \ldots M_n$ resp. $m_1, m_2, \ldots, m_n$ jest v důsledku vztahů (γ) ihned (viz odst. 60, jehožto výsledek tu zevšeobecněn)

$$M_1(x_1 - a) + M_2(x_2 - x_1) + M_3(x_3 - x_2) + \cdots + M\,(b - x_{n-1}) \geqq$$
$$\geqq \int_a^b f(x)\,dx \geqq m_1(x_1 - a) + m_2(x_2 - x_1) + \cdots + m_n(b - x_{n-1}).$$

Ohledně čísel $M_1, M_2, \ldots, m_1, \ldots$ viz poznámku pod čarou na str. 152.

66. Vycházíme-li od funkce primitivní jakožto základu pro definici integrálu, nemůžeme, má-li rovností $F'(x) = f(x)$, platnou pro všecky body intervalu (a, b) s výjimkou jistého *uzavřeného* množství bodů, býti $F(x)$ v (a, b) stanovena, pro tato množství uzavřená obecnější množství připustiti než reducibilní (jak jsme je právě připustili v rovnici (A) odst. 64).

Abychom to ukázali, stačí dokázati, že požadavkem, aby derivace funkce $F(x)$ spojité v (a, b) ve všech bodech intervalu (a, b) s výjimkou bodů obsažených v jistém množství bodovém perfektním existovala a byla rovna $f(x)$, není funkce $F(x)$ stanovena. Důkaz stačí provésti pro perfektní množství $\mathfrak{P}$ v žádném intervalu (položeném na (a, b)) všude husté; neboť pro perfektní množství všude husté v intervalu (α, β) ležícím na (a, b) jest to očividno.*) Množství $\mathfrak{P}$ dostaneme (viz dodatek), vyloučíme-li z (a, b) vnitřní body v jednoduše spočetném množství intervalů $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_k, \ldots$ atd. do nekonečna. Žádné dva z těchto intervalů nemají společné body. Definujme nyní funkci $\varphi(x)$ těmito podmínkami: $\varphi(a) = 0$; $\varphi(b) = 1$; $\varphi(x) = \frac{1}{2}$, je-li x v δ_1, $\varphi(x) = \frac{1}{4}$, je-li x v δ_2 a δ_2 leží mezi a a δ_1, $\varphi(x) = \frac{3}{4}$, je-li x v δ_2 a δ_2 leží mezi δ_1 a b. Obecně nechť má $\varphi(x)$ v intervale δ_k konstantní hodnotu c_k, při čemž

$$c_k = \tfrac{1}{2}(c_i + c_j) \qquad c_{-1} = 0, \quad c_0 = 1.$$

V této rovnici i, j jsou dvě různá čísla z čísel $-1, 0, 1, 2, 3, \ldots, k-1$, stanovená tím, že mezi intervaly δ_i, δ_j leží interval δ_k a žádný z intervalů $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_{k-1}$, zároveň pak vyrozumíváme pod δ_{-1} resp. δ_0 body a, resp. b. Tím jest definována funkce $\varphi(x)$ spojitá a neklesající v (a, b), která v každém intervalu δ_k jest konstantní a pro všecky body uvnitř δ_k má derivaci rovnou nule. Je-li tedy $F(x)$ funkcí spojitou ve všech bodech intervalu (a, b) a má-li

*) Perfektní množství všude husté v intervalu (α, β) obsahuje všecka čísla intervalu (α, β) a byla by tudíž $F(x)$ v (α, β) zcela libovolná funkce.

$F(x)$ derivaci ve všech bodech intervalu (a, b) s výjimkou bodů obsažených ve množství perfektním $\mathfrak{B}$ — derivaci rovnou $f(x)$ — pak tytéž vlastnosti má funkce $F(x) + d\varphi(x)$, kde d jest libovolná konstanta, avšak také na př. funkce $F(x) + d_0 + d_1\varphi(x) + d_2\varphi(x)^2 + d_3\varphi(x)^3$, kde d_0, d_1, d_2, d_3 jsou libovolné konstanty; lze vůbec takových funkcí udati nesčíslné množství.

67. Význam symbolu $\int_a^\infty f(t)\,dt$. Budiž dána funkce proměnné x určitým integrálem

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a).$$

Pro limitu, ke které se tato funkce blíží, když x roste nade všecky meze, zavádí se toto označení

$$\int_a^\infty f(t)\,(dt). \tag{7}$$

Jest tedy podle definice

$$\int_a^\infty f(t)\,dt = \lim_{x=\infty} \int_a^x f(t)\,dt = \lim_{x=\infty} [F(x) - F(a)] = \lim_{x=\infty} F(x) - F(a) = F(\infty) - F(a)$$

ovšem za předpokladu, že limita funkce $F(x)$ pro $\lim x = \infty$ existuje. *Neexistuje-li tato limita, říkáme, že symbol (7) nemá smyslu (významu).*

Obdobně se definují symboly

$$\int_{-\infty}^a f(t)\,dt,\quad \int_\infty^a f(t)\,dt,\quad \int_a^{-\infty} f(t)\,dt,\quad \int_{-\infty}^\infty f(t)\,dt,\quad \int_\infty^{-\infty} f(t)\,dt.$$

Na př. poslední symbol jest dán výrazem

$$\int_\infty^{-\infty} f(t)\,dt = F(-\infty) - F(\infty),$$

a má význam ovšem jenom tenkráte, jestliže *obě* limity na pravé straně se nacházející existují. K vůli stručnosti zavádějí se obdobně jako v. odst. 54 tato označení

$$F(\infty) - F(a) = [F(x)]_a^\infty,\quad F(\infty) - F(-\infty) = [F(x)]_{-\infty}^\infty$$

a obdobně v jiných případech.

Symboly tu zavedené, o nichž ještě později na podkladě jiné definice určitého integrálu bude pojednáno zevrubněji, jsou jeden případ t. zv. **integrálů** (*určitých*) **nevlastních.**

POZNÁMKA. Pro symbol právě zavedený zůstávají platny základní vlastnosti integrálu vyložené v odst. 56, 57. Zejména jest

$$\int_a^\infty f(x)\,dx - \int_b^\infty f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \qquad \int_a^\infty f(x)\,dx = -\int_\infty^a f(x)\,dx, \quad \text{atd.}$$

Budeme se ostatně symbolem tímto později obšírněji zabývati.

PŘÍKLAD 1. Integrál

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{x=\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2};$$

naproti tomu

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x}$$

nemá smyslu, poněvadž neexistuje $\lim \log x$ pro $\lim x = \infty$.

PŘÍKLAD 2. Integrál

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x(x+1)} = \int_1^\infty \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx = [\log x - \log(x+1)]_1^\infty$$

$$= \lim_{x=\infty} \log \frac{x}{x+1} - \log \tfrac{1}{2} = \log 2.$$

PŘÍKLAD 3. Jelikož

$$\int e^{-ax} \cos bx\,dx = \frac{e^{-ax}(b \sin bx - a \cos bx)}{a^2+b^2} + k$$

a při $a > 0$

$$\lim_{x=\infty} e^{-ax} \frac{b \sin bx - a \cos bx}{a^2+b^2} = 0$$

jest

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2}, \qquad a > 0$$

a podobně

$$\int_0^\infty e^{-ax} \sin bx\,dx = \frac{b}{a^2+b^2}. \qquad a > 0$$

PŘÍKLAD 4. Ze vzorce (odst. 9, př. 3)

$$\int \frac{dx}{(x^2+A)\sqrt{x^2+A}} = \frac{x}{A\sqrt{x^2+A}} + \text{konst.}$$

plyne ihned

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+A)\sqrt{x^2+A}} = \frac{1}{A}; \qquad A > 0.$$

PŘÍKLAD 5. Jest rozhodnouti, zda má význam integrál

$$\int_{e_1}^\infty \frac{dt}{\sqrt{4(t-e_1)(t-e_2)(t-e_3)}}, \qquad e_1 + e_2 + e_3 = 0.$$

Zvolme si číslo A větší, než největší z čísel $|e_1|$, $|e_2|$, $|e_3|$. Pak předložený integrál jistě má význam, existuje-li limita

$$\lim_{x=\infty}\int_{e_1}^{x}\frac{dt}{\sqrt{4(t-e_1)(t-e_2)(t-e_3)}}=$$

$$=\int_{e_1}^{A}\frac{dt}{\sqrt{4(t-e_1)(t-e_2)(t-e_3)}}+\lim_{x=\infty}\int_{A}^{x}\frac{dt}{\sqrt{4(t-e_1)(t-e_2)(t-e_3)}}.$$

Avšak, zda existuje limita na pravé straně, snadno můžeme rozhodnouti, rozvineme-li funkci za znaménkem integračním v řadu podle klesajících mocností proměnné t postupující a potom vyšetříme, zda k řadě tak vzniklé přísluší primitivní funkce mající pro $\lim x=\infty$ limitu. Jest

$$\frac{1}{\sqrt{4(t-e_1)(t-e_2)(t-e_3)}}=\frac{1}{2\sqrt{t^3}}\,\frac{1}{\sqrt{(1-e_1t^{-1})(1-e_2t^{-1})(1-e_3t^{-1})}}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{t^3}}+\frac{B_1}{2\sqrt{t^5}}+\frac{B_2}{2\sqrt{t^7}}+\dots$$

Řada potenční na pravé straně jest jistě konvergentní v důsledku toho, jak jsme volili číslo A, jest to součin $(2\sqrt{t^3})^{-1}$ a tří binomických rozvojů pro

$$(1-e_it^{-1})^{-\frac{1}{2}},\ i=1,2,3.$$

Primitivní funkce k ní jest

$$-\frac{1}{\sqrt{t}}-\frac{B_1}{3\sqrt{t^3}}-\frac{B_2}{5\sqrt{t^5}}-\dots.$$

Limita této funkce pro $\lim t=\infty$ existuje a jest rovna 0 a má tudíž i integrál daný význam.

68. Neposkytuje pražádných obtíží prvé tři základní metody pro počítání integrálů neurčitých, t. j. metody rozkladu, částečné integrace a substituce rozšířiti i na integrály určité. Tak na př. z rovnice platné stále v intervalu (a, b)

$$(uv)'=u'v+uv' \tag{1}$$

plyne

$$[uv]_a^b=\int_a^b u'v\,dx+\int_a^b uv'\,dx,\qquad \int_a^b u'v\,dx=[uv]_a^b-\int_a^b uv'\,dx, \tag{1'}$$

kterážto rovnice se ihned rozšiřuje i pro případ, že a nebo b stává se ∞, podržují-li ovšem jednotliví členové při tom svůj význam, jakož i pro případ, že rovnice (1) přestává býti platna ve množství bodovém reducibilním, je-li jenom uv funkcí spojitou proměnné x. Zároveň lze poznamenati, že v (1') postačí předpokládati, že pouze jedné z funkcí uv', $u'v$ přísluší v (a, b) integrál, jelikož potom v důsledku toho, jak jsme k (1') dospěli, přísluší i k druhé z těch funkcí integrál. Poznámka tato s náležitými obměnami, které snadno čtenář sám postihne, jest platna i pro úvahu bezprostředně následující a nebude již opakována.

Rovněž jest
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt, \tag{2}$$
kde α, β jsou dvě hodnoty takové, že probíhá-li t interval (α, β), probíhá x stanovené rovnicí $x = \varphi(t)$ interval (a, b), takže $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$. Při tom může x nabývati hodnot uvnitř intervalu (a, b) i několikráte a může i z tohoto intervalu vybočovati,*) je-li jenom $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$. Neboť je-li $F(x)$ primitivní funkce k $f(x)$, jest hodnota levé strany rovnice (2) $F(b) - F(a)$, pravé pak strany $F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a)$. Rovnice (2) zůstane pak v důsledku rozšíření pojmu určitého integrálu v platnosti i tenkráte, neexistuje-li $\varphi'(t)$ ve množství bodovém reducibilním ležícím v (α, β), je-li jenom $\varphi(t)$ v (α, β) funkcí spojitou. V bodech tohoto množství může derivace funkce $\varphi(t)$ stávati se i nekonečnou. Zůstává v platnosti i tenkráte, nastoupí-li místo jednoho nebo i několika čísel a, b, α, β symboly ∞, $-\infty$.

Konečně metody derivace integrálu podle parametru lze vždy použíti i při počítání integrálů určitých, nepřicházejí-li při tom v úvahu integrály zavedené rozšířením pojmu určitého integrálu (odst. 61 a násl.). Pro tento případ (že jde o integrály na základě rozšířené definice zavedené) podáme později obšírné vyšetřování opírající se ovšem o jinou definici určitého integrálu.

Závisí-li také meze integrálu na parametru (a nejenom funkce za znaménkem integračním), jest provésti derivaci podle parametru podle rovnice (γ) odst. 56.

K rovnici (2) lze přičiniti tyto poznámky.

POZNÁMKA 1. Buďtež dány dvě funkce $f(x)$, $f_1(x)$ v intervalu $(-a, a)$ integrace schopné a hovící rovnicím
$$f(-x) = f(x), \qquad f_1(-x) = -f_1(x); \qquad -a \leqq x \leqq a. \tag{3}$$
Pak nazýváme funkci $f(x)$ *sudou*, funkci $f_1(x)$ *lichou* (v intervalu $(-a, a)$). Uvažujme pak integrály
$$\int_{-a}^0 f(x)\,dx, \qquad \int_{-a}^0 f_1(x)\,dx,$$
do kterých zavedeme novou proměnnou integrační rovnicí $x = -x'$.

*) Pro tento případ jest ovšem nutno předpokládati, že k $f(x)$ přísluší primitivní funkce v jistém intervalu, přesahujícím interval (a, b). Viz svrchu poznámku k rovnici (1').

Integrály ty se přemění se zřetelem ke (3) ihned na integrály

$$\int_0^a f(x')\,dx', \qquad -\int_0^a f_1(x')\,dx'.$$

Z toho následuje ihned věta: *Jsou-li $f(x)$, $f_1(x)$ funkce v $(-a, a)$ integrace schopné, prvá pak sudá, druhá lichá, jest*

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx, \qquad \int_{-a}^{a} f_1(x)\,dx = 0. \tag{4}$$

Není obtížno věty tyto přímo na základě definice integrálu jakožto primitivní funkce odůvodniti. Viz DP 127.

POZNÁMKA 2. Budiž $\varphi(x)$ funkce periodická o periodě 2π t. j. buď splněna rovnice

$$\varphi(x + 2\pi) = \varphi(x) \tag{5}$$

a budiž tato funkce v intervalu $(0, 2\pi)$ integrace schopna; na základě periodicity jest pak ovšem v každém intervalu integrace schopna. Uvažujme integrál

$$\int_0^{2\pi} \varphi(x)\,dx.$$

Na základě (IV) odst. 57 a rovnice (5) můžeme psáti

$$\int_0^{2\pi} \varphi(x)\,dx = \int_0^{\alpha} \varphi(x)\,dx + \int_{\alpha}^{2\pi} \varphi(x)\,dx = \int_0^{\alpha} \varphi(x + 2\pi)\,dx + \int_{\alpha}^{2\pi} \varphi(x)\,dx.$$

Zavedeme-li v předposledním integrálu novou proměnnou rovnicí $x + 2\pi = x'$, máme ihned

$$\int_0^{\alpha} \varphi(x + 2\pi)\,dx = \int_{2\pi}^{2\pi+\alpha} \varphi(x')\,dx' = \int_{2\pi}^{2\pi+\alpha} \varphi(x)\,dx$$

a po dosazení podle této rovnice do předcházející jest patrno, že jest, *jestliže $\varphi(x)$ jest periodická s periodou 2π, platna relace*

$$\int_0^{2\pi} \varphi(x)\,dx = \int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} \varphi(x)\,dx. \tag{6}$$

I tato rovnice následuje snadno z definice integrálu pomocí primitivní funkce. (DP 107, věta o funkcích majících stejné derivace.)

Cvičení.

1. Integrál $\int_0^{\infty} e^{-ax} x^n\,dx$ vypočteme při $a > 0$ ze vztahu (odst. 9, př. 2)

$$\int e^{-ax} x^n\,dx = -n!\,\frac{e^{-ax}}{a^{n+1}}\left[1 + \frac{(ax)}{1!} + \frac{a^2x^2}{2!} + \cdots + \frac{(ax)^n}{n!}\right]. \tag{1}$$

Jest však $\lim\limits_{x=\infty} e^{-ax} x^N = 0$, ať N jest jakékoliv číslo reálné (DP, 167 (př. 2), 168).

Pravá strana rovnice (1) pro lim $x = \infty$ tedy odpadá a zbývá tedy dosaditi $x = 0$, čímž dostaneme

$$\int_0^\infty e^{-ax} x^n \, dx = \frac{n!}{a^{n+1}}. \tag{2}$$

2. $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{2\pi}{\sqrt{-D}} \text{ při } D = b^2 - 4ac < 0 \text{ a při } a > 0. \tag{3}$$

Důsledek odst. 18, př. 1.

3. Z rovnice (15) odst. 16 vyplývá ihned

$$\int_0^\infty \frac{dt}{(t^2+1)^\sigma} = \frac{1.3\ldots(2\sigma-3)}{2.4\ldots(2\sigma-2)} \cdot \frac{\pi}{2},$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dt}{(t^2+1)^\sigma} = \frac{1.3\ldots(2\sigma-3)}{2.4\ldots(2\sigma-2)} \cdot \pi.$$

Z příkl. 3 odst. 9 následuje, derivujeme-li napřed $\sigma - 1$-kráte podle A a potom bereme obě strany v mezích $0, \infty$, snadnou úvahou vztah (klademe současně $A = 1$) při $\sigma > 1$

$$\int_0^\infty \frac{dt}{(t^2+1)^{\sigma+\frac{1}{2}}} = \frac{2.4.6\ldots(2\sigma-2)}{3.5.7\ldots(2\sigma-1)}.$$

3a. Důkaz vztahů ($a, b, c, \ldots$ jsou libovolná čísla kladná)

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(a+bx^2)(c+ex^2)} = \frac{\pi}{\sqrt{ac}\,(\sqrt{ae}+\sqrt{bc})},$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2\,dx}{(a+bx^2)(c+ex^2)} = \frac{\pi}{\sqrt{be}\,(\sqrt{ae}+\sqrt{bc})},$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2\,dx}{(a+bx^2)(c+ex^2)(g+fx^2)} = \frac{\pi}{(\sqrt{ae}+\sqrt{bc})(\sqrt{cf}+\sqrt{ge})(\sqrt{bg}+\sqrt{af})}$$

a podobně lze provésti snadno na základě věty, že, je-li

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) \frac{dx}{a+bx^2} = \varphi(a, b),$$

jest

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) \frac{dx}{(a+bx^2)(c+ex^2)} = \frac{-b\varphi(a,b)+e\varphi(c,e)}{ae-bc},$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) \frac{x^2\,dx}{(a+bx^2)(c+ex^2)} = \frac{a\varphi(a,b)-c\varphi(c,e)}{ae-bc}.$$

4. Částečnou integrací následuje snadno

$$\int (x-a)^m (x-b)^n\,dx = \frac{(x-a)^{m+1}(x-b)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1}\int (x-a)^{m+1}(x-b)^{n-1}\,dx.$$

Jestliže $m > -1$ a $n > 0$, vymizí pro $x = a$ i pro $x = b$ prvý člen pravé strany a máme tudíž v tomto případě, integrujeme-li v mezích a, b,

$$\int_a^b (x-a)^m (x-b)^n\,dx = -\frac{n}{m+1}\int_a^b (x-a)^{m+1}(x-b)^{n-1}\,dx.$$

Užijeme-li na integrál pravé strany opětně téhož postupu atd., dospějeme konečně při *n celém kladném* (a $m > -1$) k rovnici

$$\int_a^b (x-a)^m (x-b)^n\,dx$$

$$= (-1)^n \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{(m+1)(m+2)(m+3)\ldots(m+n)}\int_a^b (x-a)^{m+n}\,dx \tag{4}$$

$$= (-1)^n \frac{(b-a)^{m+n+1}}{m+n+1}\cdot\frac{n!}{(m+1)(m+2)\ldots(m+n)}.$$

Zvláště pak jest

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^n\,dx = 2\,\frac{2.4.6.\ldots.2n}{1.3.5\ldots(2n+1)}. \tag{4'}$$

5. $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \pi\,.\,\mathrm{sign}\,(b-a)$, důsledek rovnice ($\varrho$) odst. 19.

$\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2(b-x)}} = +\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$, důsledek odst. 19, př. 2.

$$\left.\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+b^2)\sqrt{x^2+a^2}} &= \frac{1}{b\sqrt{a^2-b^2}}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}, \quad \text{je-li } a^2 > b^2\\
&= \frac{1}{b\sqrt{b^2-a^2}}\log\frac{b+\sqrt{b^2-a^2}}{a}, \quad \text{je-li } a^2 < b^2\\
\int_a^\infty \frac{dx}{(x^2+b^2)\sqrt{x^2-a^2}} &= \frac{1}{b\sqrt{a^2+b^2}}\log\frac{b+\sqrt{b^2+a^2}}{a}\\
\int_0^a \frac{dx}{(x^2+b^2)\sqrt{a^2-x^2}} &= \frac{\pi}{2b\sqrt{a^2+b^2}}.
\end{aligned}\right\}\ \text{a, b čísla kladná; viz odst. 21, cvičení př. 3.}$$

$$\int_A^B \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{|x-A|\,.\,|x-B|}} = \varepsilon\,\frac{\pi}{\sqrt{|A-\alpha|\,.\,|B-\alpha|}},$$

α vně (A, B), význam intervalu (A, B) a čísla $\varepsilon = \pm 1$ viz cvičení odst. 26.

5a. Dokažte vztahy za předpokladu, že m, n, p, q jsou čísla celá kladná:

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx \, dx = 0, \qquad m \neq n \tag{5}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 mx \, dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 mx \, dx = \pi, \tag{6}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos px \sin qx \, dx = 0. \tag{7}$$

Ukažte, že integrály z týchž funkcí, avšak v mezích 0, π jsou rovny pořadě číslům 0, 0, $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$, 0 (jsou-li p, q stejné parity) resp. $-2q/(p^2-q^2)$ (jsou-li p, q různé parity).

6. Uvažujme integrál

$$I_m = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^m x \, dx = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^m x \, dx,$$

kde m jest celé číslo kladné.

Z integrálů neurčitých k funkcím $\sin^{2n} x$, $\sin^{2n-1} x$, odvozených v odst. 30, příkl. 5, následují ihned tyto výsledky

$$I_{2n} = \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots\ldots (2n-1)}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \ldots\ldots\ 2n} \cdot \frac{\pi}{2}, \tag{8}$$

$$I_{2n+1} = \frac{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \ldots\ldots\ 2n}{3 \,.\, 5 \,.\, 7 \ldots\ldots (2n+1)}. \tag{9}$$

Ostatně následují tytéž hodnoty z rekurentních relací mezi I_k, jež vyplývají z redukčních formulí pro integrály z funkce $\sin^m x$ (viz rovnici (!) v příkl. 5, odst. 30). Jak z této rovnice (!) a z obdobné pro integrál k funkci $\sin^{2m+1} x$ plyne, jest

$$I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2},$$

odkudž pak snadno dostaneme (8) i (9).

Výrazy tyto vedou k odvození důležité *formule* zvané *Wallisovy*. Jest vzhledem k odst. 38 (2),

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{m-1} x \, dx > \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^m x \, dx \tag{10}$$

(neboť nehledě ke krajním bodům intervalu (0, $\frac{1}{2}\pi$) jest stále $\sin^{m-1} x > \sin^m x$) a tedy

$$I_{2n-1} > I_{2n} > I_{2n+1}$$

Dosadíme-li z (8) a (9)

$$\frac{2.4.6\ldots(2n-2)}{3.5.7\ldots(2n-1)} > \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\,\frac{\pi}{2}$$
$$> \frac{2.4.6\ldots 2n}{3.5.7\ldots(2n+1)}$$

t. j.

$$\frac{2.2.4.4.6\ldots(2n-2)(2n-2)\,2n}{1.3.3.5.5\ldots(2n-3)(2n-1)(2n-1)} > \frac{\pi}{2} > \tag{11}$$
$$> \frac{2.2.4.4.6\ldots(2n-2)\,2n.2n}{1.3.3.5.5\ldots(2n-1)(2n-1)(2n+1)}.$$

Součiny na obou křídlech této nerovniny jsou součiny konvergentní, vzrůstá-li n nade všecky meze a mají touž limitu, (viz DP, 32, příkl. 6) a následuje tedy z (11)

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n=\infty} \frac{2.2.4.4.6\ldots(2n-2)(2n-2)\,2n}{1.3.3.5.5\ldots(2n-3)(2n-1)(2n-1)} \tag{11'}$$
$$= \lim_{n=\infty} \frac{2.2.4.4\ldots 2n.2n}{1.3.3.5\ldots(2n-1)(2n+1)}$$

což jest **formule Wallisova** již v DP, 91 jiným způsobem získaná.

Odmocněním a snadnou úpravou získáme z (11) snadno také tento vztah

$$\sqrt{\pi} = \frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots 2n-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n+\varepsilon}}, \qquad 0<\varepsilon<\tfrac{1}{2}.$$

Dosadíme-li z tohoto výrazu za $\dfrac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots 2n-1}$ do (8), máme

$$I_{2n} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n+\varepsilon}},$$

odkudž vyplývá nejprve pro m *sudé*

$$\lim_{m=\infty} (\sqrt{m}\,.\,I_m) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \tag{12}$$

kterýž vztah snadno různým způsobem lze rozšířiti i pro m *liché*. (Na př. na základě (10), anebo podobně, jako jsme jej odvodili pro m sudé.)

6a. Dokažte, že, jsou-li p, q čísla celá, kladná

$$\int_0^{\pi} \sin^{2p} x \cos^{2q} x\, dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p} x \cos^{2q} x\, dx = \pi\,\frac{1.3.5\ldots(2p-1).1.3\ldots(2q-1)}{2.4.6\ldots\ldots\ldots\ldots(2p+2q)},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p+1} x \cos^{2q} x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2q} x \cos^{2p+1} x\, dx = \frac{1.3.5\ldots(2q-1).2.4\ldots 2p}{3.5.7\ldots\ldots\ldots(2p+2q+1)},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p+1} x \cos^{2q+1} x \, dx = \frac{1}{2p+2q+2} \cdot \frac{p!\, q!}{(p+q)!}.$$

6b. Dokažte, že pro $a > 0$, $b > 0$

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos^{2p} x \sin^{2q} x \, dx}{(a \cos^2 x + b \sin^2 x)^{p+q+1}} = \frac{\pi}{a^{p+1/2} b^{q+1/2}} \cdot \frac{1.3\ldots(2p-1).1.3\ldots(2q-1)}{2.4\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2p+2q)}$$

a z toho první z formulí 6a. (Derivací podle a resp. b za integr. znaménkem z integrálu, ve kterém jest $p = 0$, $q = 0$ a který se přímo vypočte. Viz také dol př. 8.)

6b'. Stanovte integrál ($a > 0$, $b > 0$; p, q, r čísla celá $\geqq 0$)

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos^{2p} x \sin^{2q} x \, dx}{(a \cos^2 x + b \sin^2 x)^{p+q+r+1}}.$$

Návod. V rovnici předcházejícího příkladu místo a, b položíme $a+\lambda$, $b+\lambda$, čímž výraz v závorce za integračním znaménkem se nacházející se změní v $a\cos^2 x + b \sin^2 x + \lambda$. Derivujeme potom obě strany rovnice tak vzniklé podle λ a to r-krát. Konečně klademe $\lambda = 0$; dostaneme po snadné úpravě, značíme-li poslední zlomek na pravé straně prvé rovnice příkladu **6a** se nacházející $\{p, q\}$, tento výraz pro daný integrál

$$\frac{\pi}{a^{p+1/2} b^{q+1/2}} \cdot \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} \cdot \{p+k,\ q+l\} \cdot \frac{1}{a^k b^l}; \qquad k+l = r.$$

Tak na př.
$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{(a \cos^2 x + b \sin^2 x)^3} = \frac{\pi}{8\sqrt{ab}} \left(\frac{3}{a^2} + \frac{2}{ab} + \frac{3}{b^2} \right).$$

6c.
$$\int_0^{\pi} \frac{\cos 2mx}{a \cos^2 x + b \sin^2 x} \, dx = (-1)^m \frac{\pi}{\sqrt{ab}} \left(\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right)^m,$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos(2m+1)x}{a \cos^2 x + b \sin^2 x} \, dx = 0,$$

m celé, kladné ($\geqq 0$); $a > 0$, $b > 0$.

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin 2mx}{a \cos^2 x + b \sin^2 x} \, dx = 0.$$

Správnosť posledních dvou vztahů nahlédne čtenář ihned, provede-li substituci $x = \pi - x'$. Prvá rovnice jest platna nejprve pro $m = 0$ (viz př. 6b), dále pro $m = 1$. Neboť

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = -\frac{a+b}{a-b} + \frac{2}{a-b} (a \cos^2 x + b \sin^2 x).$$

Označíme-li tedy integrál v prvé rovnici se vyskytující I_m, jest

$$I_1 = -\frac{a+b}{a-b} \frac{\pi}{\sqrt{ab}} + \frac{2}{a-b} \cdot \pi = -\frac{\pi}{\sqrt{ab}} \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$$

Konečně v důsledku rovnice

$$\cos(2m+2)x+\cos(2m-2)x=2\cos 2mx\,.\,\cos 2x,$$

dosadíme-li ještě do ní za $\cos 2x$ podle rovnice svrchu vypsané, následuje rekurentní vztah

$$I_{m+1}+I_{m-1}+2\,\frac{a+b}{a-b}\,I_m=0,$$

ze kterého indukcí snadno v prvé rovnici uvedený výsledek. Tento jest ostatně velmi speciálním případem rovnic př. 11k jinak odvozených.

7. Jest vypočísti za předpokladu, že $c^2-a^2-b^2>0$ a že $c-a>0$,

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{a\cos x+b\sin x+c}.$$

Primitivní funkce jest tu aspoň pro intervaly $(0,\pi)$, $(\pi, 2\pi)$

$$\frac{2}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{(c-a)\operatorname{tg}\frac{1}{2}x+b}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}}+k. \tag{13}$$

Kdybychom užili k výpočtu daného integrálu bez bližší rozvahy formule (1), dostali bychom výsledek nesprávný, totiž 0. Příčina toho tkví v tom, že funkci (13) nelze pokládati za primitivní funkci k integrované v *celém* intervalu integračním, neboť jest to funkce nespojitá a to v bodě $x=\pi$. Označíme-li funkci (13) bez konstanty k stručně $\varphi(x)$, jest totiž

$$\varphi(\pi-0)=\frac{\pi}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}},\qquad \varphi(\pi+0)=-\frac{\pi}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}}.$$

Máme-li dostati funkci primitivní pro celý interval $(0, 2\pi)$ platnou, musíme tedy konstantu k ve výraze (13) pro interval $(\pi, 2\pi)$ jinak voliti, než pro interval $(0,\pi)$ a mimo to budeme tu funkci i pro hodnotu $x=\pi$ definovati. Položíme na př.

$$F(x)=\varphi(x)\qquad \text{pro } x \text{ v } (0,\pi),$$
$$F(x)=\varphi(x)+\frac{2\pi}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}}\qquad \text{pro } x \text{ v } (\pi+0, 2\pi).$$

Funkce $F(x)$ takto v celém intervalu $(0, 2\pi)$ definovaná jest spojitá a má za derivaci funkci $\dfrac{1}{a\cos x+b\sin x+c}$ v *celém intervalu* $(0, 2\pi)$. Pomocí $F(x)$ na základě (1) dostaneme ovšem výsledek správný.

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{a\cos x+b\sin x+c}=F(2\pi)-F(0)=\frac{2\pi}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}} \tag{14}$$
$$\text{pro } c^2-a^2-b^2>0.$$

Rovnice tato jest v platnosti pro $c>a$; poněvadž však zároveň $c^2>a^2+b^2>a^2$, jest c kladné. Pro c záporné dostáváme týž výsledek násobený -1.

7a. Stejným způsobem mohli bychom vyčísliti integrál předch. příkladu za předpokladu, že a, b, c jsou obecná čísla komplexní. Avšak nejprve podáme pouze výpočet integrálu $(C\neq 0)$

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{Ai\cos x+Bi\sin x+C}\qquad A, B, C \text{ jsou čísla reálná. } i \text{ imag. jedn.}$$

Primitivní funkce k funkci za integračním znaménkem jest (odst. 46)

$$\frac{1}{i\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\cdot \overline{\log}\,\frac{C\operatorname{tg}\frac{1}{2}x - i[A\operatorname{tg}\frac{1}{2}x - B + \sqrt{A^2+B^2+C^2}]}{C\operatorname{tg}\frac{1}{2}x - i[A\operatorname{tg}\frac{1}{2}x - B - \sqrt{A^2+B^2+C^2}]}.$$

Když x probíhá interval $(0, 2\pi)$, argument $\overline{\log}$ v tomto výraze uvedený opisuje uzavřenou křivku v rovině komplexní proměnné, kterážto křivka protíná dvakráte osu čísel reálných a to pro $x = 0, (2\pi)$ a pro $x = \pi$. Pro tyto dvojí hodnoty jest argument funkce $\overline{\log} < 0$ a $+1$. Podle toho jak jsme definovali funkci $\overline{\log}$, kteráž jest nespojita pouze podél reálné osy v záporné její polovici majíc na obou březích příslušného řezu konstantní rozdíl $2\pi i$, jest logaritmická funkce ve výraze pro primitivní funkci se vyskytující, umenšíme-li jenom buď počáteční anebo koncovou hodnotu o $\pm 2\pi i$, funkcí spojitou, když x probíhá interval $(0, 2\pi)$ a její hodnota pro $x = 2\pi$ jest pak (po umenšení) o $\pm 2\pi i$ větší než její hodnota pro $x = 0$; i jest tedy

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{Ai\cos x + Bi\sin x + C} = \frac{2\pi\varepsilon}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad C \neq 0 \tag{14'}$$

kde $\varepsilon = \pm 1$ a, jak buď přímo (naznačenou úvahou) anebo rozmanitým jiným způsobem vyplývá, $\varepsilon = \operatorname{sign} C$.

Výsledek tento jest důležitý tím, že nám podává převratnou hodnotu odmocniny $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ ve tvaru integrálu z jednoduché funkce čísel A, B, C a proměnné integrační x.

8. Podobně jako v příkladě 7 dostáváme

$$\int_0^{\pi}\frac{dx}{a\cos^2 x + 2b\sin x\cos x + c\sin^2 x} = \frac{\pi}{\sqrt{ac-b^2}} \quad \text{při } ac - b^2 > 0,$$

kterýžto výsledek vyplývá ostatně snadnou substitucí $(x = 2x')$ z (14) a naopak.

9. Pro výpočet integrálu

$$\int_0^{\pi}\frac{1-r^2}{1+2r\cos x + r^2}\,dx$$

lze použíti přímo vzorce (a), odst. 47, kdež jest udaná primitivní funkce platna pro interval $(0, \pi - \varepsilon)$, při čemž ε jest číslo kladné libovolně malé. Dostaneme pro daný integrál, je-li x v intervalu $(0, \pi - \varepsilon)$,

$$\int_0^{x'}\frac{1-r^2}{1+2r\cos x + r^2}\,dx = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{1-r}{1+r}\operatorname{tg}\frac{x'}{2}\right).$$

Platnost této rovnice můžeme rozšířiti i pro $x' = \pi$, jestliže v tomto případě $(x' = \pi)$ na pravé straně, jež pro $x' = \pi$ stává se neurčitou, dosadíme limitu pravé strany pro $\lim x' = \pi$; neboť pak bude pravá strana funkcí spojitou proměnné x' pro $0 \leq x' \leq \pi$; pro limitu pravé strany dostáváme dva různé výsledky podle toho, je-li $|r| < 1$ anebo $|r| > 1$. Máme tak

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\frac{1-r^2}{1+2r\cos x + r^2}\,dx &= \pi \qquad \text{pro } |r| < 1,\\ &= -\pi \qquad \text{pro } |r| > 1.\end{aligned} \tag{15}$$

Z tohoto výsledku na základě identity

$$1+\frac{1-r^2}{1+2r\cos x+r^2}=\frac{2(1+r\cos x)}{1+2r\cos x+r^2}$$

plyne ihned

$$\int_0^\pi \frac{1+r\cos x}{1+2r\cos x+r^2}\,dx=\pi \quad \text{pro } |r|<1, \qquad =0 \quad \text{pro } |r|>1; \tag{16}$$

a podobně

$$\int_0^\pi \frac{2\cos x+2r}{1+2r\cos x+r^2}\,dx=0 \quad \text{pro } |r|<1, \qquad =\frac{2\pi}{r} \quad \text{pro } |r|>1. \tag{16'}$$

10. Primitivní funkcí k funkci proměnné r dané integrálem

$$\int_0^\pi \frac{2\cos x+2r}{1+2r\cos x+r^2}\,dx$$

v intervalu, v němž jest $|r|>1$, jest

$$\int_0^\pi \log(1+2r\cos x+r^2)\,dx \tag{17}$$

(neboť čitatel zlomku za znaménkem integračním se nacházejícího jest derivací jmenovatele podle r v celém intervalu, v němž $|r|>1$, mimo to jsou splněny všechny ostatní podmínky postačující k tomu, abychom v integrálu (17) mohli derivování podle r prováděti podle pravidel odst. 9). Podle rovnice (16′) jest tou primitivní funkcí také (je-li $|r|>1$) $2\pi\log|r|$. I jest tedy

$$\int_0^\pi \log(1+2r\cos x+r^2)\,dx=2\pi\log|r|+\text{konst} \qquad |r|>1. \tag{18}$$

Avšak tuto rovnici lze psáti ve tvaru

$$\int_0^\pi \log(1+2r^{-1}\cos x+r^{-2})\,dx=\text{konst} \qquad |r|>1 \tag{18'}$$

(odečteme-li na obou stranách $2\pi\log|r|=\int_0^\pi \log r^2\,dx$).

K určení konstanty můžeme si za r zvoliti číslo jakékoliv v absolutní hodnotě větší než 1. Zvolíme si r tak veliké, aby $\log(1+2r^{-1}\cos x+r^{-2})$ byl v intervalu $(-\varepsilon, \varepsilon)$, při čemž ε jest číslo kladné libovolné (libovolně malé). Pak jest (odst. 58)

$$-\pi\varepsilon<\int_0^\pi \log(1+2r^{-1}\cos x+r^{-2})\,dx<\pi\varepsilon$$

a tedy podle (18′) $\qquad -\pi\varepsilon<\text{konst}<\pi\varepsilon,$

ať ε jest jakkoliv malé. Jest tedy konst $=0$ a máme (v důsledku (18) a (18′))

$$\int_0^\pi \log(1+2r\cos x+r^2)=2\pi\log|r|, \qquad |r|>1$$
$$=0 \qquad |r|<1.$$

11. Abychom vyčíslili integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{m-1}\,dx}{x^{2n} - 2x^n \cos\varphi + 1}$$

použijeme formule v odst. 18, 4. Omezíme se při tom na případ, *že m jest liché, a n sudé.*

Nejprve jest, jelikož

$$\lim_{x=\infty} [\log(x^2 + ax + b) - \log x^2] = \lim_{x=\infty} \log\left(1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2}\right) = 0,$$

$$\lim_{x=\infty} \sum_{k=0}^{n-1} B_k \log(x^2 - (a\alpha^k + a^{-1}\alpha^{-k})\,x + 1) = \lim_{x=\infty} \sum_{k=0}^{n-1} B_k \log x^2 =$$

$$\lim_{x=\infty} \log x^2 \sum_{k=0}^{n-1} B_k.$$

Avšak $\sum\limits_{k=0}^{n-1} B_k = 0$, jak snadno užitím formulí pro součet řady geometrické a na základě okolnosti, že $\alpha^n = 1$, vyplývá. I jest limita součtu prvých členů v příslušné primitivní funkci při $\lim x = \infty$ rovna nule a rovněž i pro $\lim x = -\infty$.

Dále jest
$$\left[\operatorname{arc\,tg} \frac{2x - (a\alpha^k + a^{-1}\alpha^{-k})}{-i(a\alpha^k - a^{-1}\alpha^{-k})}\right]_{-\infty}^{+\infty} = \pm\pi,$$

při čemž horní znaménko jest bráti, jestliže

$$-i(a\alpha^k - a^{-1}\alpha^{-k}) = 2\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}$$

jest kladné a dolní, jestliže $2\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}$ jest záporné. Předpokládáme-li $0 < \varphi < 2\pi$ (s vyloučením ovšem hodnoty $\varphi = \pi$, pro kterou není základní formule odst. 18. platna), nastává případ první pro $k = 0, 1, 2, \ldots, \frac{n}{2} - 1$, druhý pak pro $k = \frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1, \ldots, n - 1$.

Následkem toho jest

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{m-1}}{x^{2n} - 2x^n\cos\varphi + 1}\,dx = 2\pi i \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} B'_k - 2\pi i \sum_{\frac{n}{2}}^{n-1} B'_k = 4\pi i \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} B'_k =$$

$$= \frac{4\pi i}{2n(a^n - a^{-n})}\left[a^{m-n}\frac{1 - \alpha^{\frac{mn}{2}}}{1 - \alpha^m} + a^{-m+n}\frac{1 - \alpha^{-\frac{mn}{2}}}{1 - \alpha^{-m}}\right] =$$

$$= \frac{8\pi i}{2n(a^n - a^{-n})}\left[\frac{a^{m-n}}{1 - \alpha^m} + \frac{a^{-m+n}}{1 - \alpha^{-m}}\right] (\text{neboť } \alpha^{\frac{n}{2}} = -1 \text{ a tedy i } \alpha^{\frac{mn}{2}} = -1)$$

$$= \frac{2\pi}{\sin\varphi} \cdot \frac{\sin\left[\frac{m}{n}(\pi - \varphi) + \varphi\right]}{n\sin\frac{\pi m}{n}}.$$

Vezmeme-li v úvahu, že se zřetelem k okolnosti, že m jest liché a n sudé primitivní funkce v odstavci 18, 4 uvedená lichá (t. j. že pro ni jsou v platnosti vztahy $F(-x) = -F(x)$, $F(0) = 0$), jest

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{m-1}}{x^{2n} - 2x^n \cos\varphi + 1}\, dx = 2\int_0^{\infty} \frac{x^{m-1}}{x^{2n} - 2x^n \cos\varphi + 1}\, dx.$$

Provedeme-li dále v posledním integrálu substituci $x^n = \xi$, máme, kladouce pro stručnost

$$\frac{m}{n} = \mathrm{a}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\xi^{\mathrm{a}-1}}{\xi^2 - 2\xi \cos\varphi + 1}\, d\xi = \frac{\pi}{\sin\varphi} \frac{\sin[\mathrm{a}(\pi - \varphi) + \varphi]}{\sin \mathrm{a}\pi}, \tag{19}$$

kterýžto výsledek byl odvozen za předpokladu, že číslo a jest číslo racionální a to tvaru $\frac{2\mu+1}{2\nu}$, kladné a menší než 2; dále, že $0 < \varphi < 2\pi$ a nadto φ různé od π.

Vztah (13) lze psáti též v následujícím tvaru poněkud jednodušším (místo φ dosadíme $\pi - \varphi$)

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \frac{\xi^{\mathrm{a}-1}}{\xi^2 + 2\xi \cos\varphi + 1}\, d\xi &= -\frac{\pi}{\sin\varphi} \frac{\sin(\mathrm{a}-1)\varphi}{\sin \mathrm{a}\pi} \\ &= \frac{\pi}{\sin\varphi} \frac{\sin(\mathrm{a}-1)\varphi}{\sin(\mathrm{a}-1)\pi},\end{aligned} \tag{19$_1$}$$

$$\varphi \neq 0, \qquad -\pi < \varphi < \pi, \qquad 0 < \mathrm{a} < 2.$$

Klademe-li v (19) $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, $\xi^2 = x$, $\frac{1}{2}\mathrm{a} = b$, máme po snadné úpravě

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{b-1}\, dx}{x+1} = \frac{\pi}{\sin b\pi}, \qquad 0 < b < 1, \tag{20}$$

platný dosud jenom, když b jest číslo racionální tvaru $\frac{2\mu+1}{4\nu}$.

11a. Důkaz vztahů ($a, b, c, \ldots$ jsou čísla komplexní, jichž imaginární část $\neq 0$)

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{\overline{\log a} - \overline{\log b}}{a - b},$$

$$-\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+a)(x+b)(x+c)} = \frac{\overline{\log a}}{(a-b)(a-c)} + \frac{\overline{\log b}}{(b-a)(b-c)} + \frac{\overline{\log c}}{(c-a)(c-b)},$$

. . . .

provésti lze snadno rozkladem funkce integrované ve zlomky částečné. Z rovnic těchto následují vztahy

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{\pi i}{2a}, \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)} = -\frac{\pi i}{2ab(a+b)},$$

v nichž při a, b předpokládáno u imaginárních částí znaménko kladné. Z předposlední rovnice snadno následuje (integrál z téže funkce tam se nacházející v mezích však $-\infty$, $+\infty$ jest dvakráte větší)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{Ax^2 + 2Bx + C} = \frac{\pi i}{\sqrt{B^2 - AC}} \cdot \varepsilon\,, \quad \varepsilon = \operatorname{sign} \Re\left(\frac{\sqrt{B^2 - AC}}{Ai}\right).$$

Při tom jako obvykle značí $\Re$ reálnou část argumentu v připojené závorce se nacházejícího, o kterémž v příkladě vypsaném jest předpokládáno, že jest od nuly různý.

11b. Jestliže a jest číslo komplexní tvaru $M + Ni$, $N \neq 0$, pak

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(x - a)\, dx = 2\pi i \,.\, \operatorname{sign} N, \quad \operatorname{sign} N = \pm 1 \text{ podle toho, zda } N \text{ jest kladné či záp.}$$

Návod. Primitivní funkce jest $2 \log \sin \frac{1}{2}(x - a)$; jestliže x se mění od 0 do 2π, pak číslo komplexní $\sin \frac{1}{2}(x - a)$ opíše polovičku elipsy se středem v bodě 0 s poloosami $\operatorname{Ch} \frac{1}{2} N$, $|\operatorname{Sh} \frac{1}{2} N|$ a to po elipse ve směru kladném (záp.), je-li $N > 0$ (< 0); amplituda toho čísla komplexního, mění-li se s x spojitě, vzroste o π $(-\pi)$, tedy $\log \sin \frac{1}{2}(x - a)$ o πi $(-\pi i)$.

11c. Integrál

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a \cos x + b \sin x + c}, \quad \text{kde} \quad a = a_1 + i a_2, \quad b = b_1 + i b_2, \quad c = c_1 + i c_2$$

a kde $a_1 b_2 - a_2 b_1 = (ab)$, (bc), (ca) nejsou vesměs rovny nule (jinak by se daný integrál redukoval v podstatě na integrál příkladu 7), dá se převésti na integrál příkladu 7b.

Neboť jest identicky

$$\frac{1}{a \cos x + b \sin x + c} = \frac{1}{2i \sqrt{c^2 - a^2 - b^2}} \left[\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(x - \alpha_1) - \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(x - \alpha_2)\right],$$

kde $$\frac{-c + \sqrt{c^2 - a^2 - b^2}}{a - bi} = e^{i\alpha_1}, \quad \frac{-c - \sqrt{c^2 - a^2 - b^2}}{a - bi} = e^{i\alpha_2} \quad \text{(viz odst. 49).}$$

Při vyšetřování daného integrálu jest nutno vyloučiti případ, ve kterém jedno z čísel α_1, α_2 jest reálné,*) kterýžto případ nastává tenkrát a jenom tenkrát, když $(ab)^2 = (bc)^2 + (ca)^2$. (K důkazu stačí nalézti podmínku nutnou a postačující, aby dvě rovnice

$$a_1 \cos x + b_1 \sin x + c_1 = 0, \qquad a_2 \cos x + b_2 \sin x + c_2 = 0$$

měly společné reálné řešení.) Výraz $(ab)^2 - (bc)^2 - (ca)^2$ získává tudíž se zřetelem k danému integrálu význam a vyjádříme jej pomocí čísel

$$M_1,\ N_1,\ M_2,\ N_2, \quad \text{kde} \quad \alpha_1 = M_1 + N_1 i, \quad \alpha_2 = M_2 + N_2 i.$$

Vyjádření jest snadné, uvážíme-li, že čísla $a - bi$, $2c$, $a + bi$ jsou úměrna číslům 1, $-(e^{i\alpha_1} + e^{i\alpha_2})$, $e^{i(\alpha_1 + \alpha_2)}$ (koeficient úměrnosti jest obecně číslo komplexní λ). Dostaneme, že výraz $(ab)^2 - (bc)^2 - (ca)^2$ jest nehledě k činiteli $|\lambda|^2$ rovný výrazu

$$8e^{-2N_1 - 2N_2} \,.\, [\operatorname{Ch}(N_1 + N_2) - \cos(M_1 - M_2)] \,.\, \operatorname{Sh} N_1 \,.\, \operatorname{Sh} N_2 \,.$$

---

*) Neboť funkce za znaménkem integračním se stává v intervalu integračním nekonečnou a rovněž příslušná primitivní funkce.

Výraz tento jest kladný, jsou-li N_1, N_2 stejného; záporný, jsou-li protivného znaménka. I jest tedy podle předch. příkladu

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a\cos x + b\sin x + c} = \begin{cases} 0, \text{ jestliže } (ab)^2 > (bc)^2 + (ca)^2, \\ \dfrac{2\pi}{\sqrt{c^2 - a^2 - b^2}} \cdot \operatorname{sign} N_1, \text{ jestliže } (ab)^2 < (bc)^2 + (ca)^2, \end{cases}$$

sign N_1 můžeme v tomto vyjádření daného integrálu nahraditi výrazem

$$\operatorname{sign} \Re\left(\frac{\sqrt{c^2 - a^2 - b^2}}{c}\right), \left(\text{stačí uvažovati výraz } \frac{e^{i\alpha_1} - e^{i\alpha_2}}{e^{i\alpha_1} + e^{i\alpha_2}}\right).$$

(Viz Jacobi, Werke, VI str. 156 a násl.)

POZNÁMKA. Při řešení tohoto příkladu mlčky předpokládáno, že $c^2 - a^2 - b^2 \neq 0$. Výsledek nalezený však jest platný, i když $c^2 - a^2 - b^2 = 0$, jak čtenář snadno dokáže. V tomto případě jest totiž $\alpha_1 = \alpha_2$ a jest v platnosti vždy případ prvý. Avšak také bylo mlčky předpokládáno, že $a - bi \neq 0$. Než i tentokráte, když $a - bi = 0$, výsledek získaný jest platný a integrál daný jest v případě druhém roven $2\pi/c$, v případě prvém pak rovný nule, obojí v souhlase se svrchu získanými vzorci. Obdobné poznámky lze přičiniti i k příkladům **11k, l.**

11d. Dokažte, že

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{cotg}(x + ai)\, dx = \log\left|\frac{\operatorname{Ch} a}{\operatorname{Sh} a}\right| - \frac{\pi i}{2} \operatorname{sign} a, \quad a \text{ reálné číslo, různé od nuly.}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{cotg}(x + A + Bi)\, dx = \log \operatorname{cotg}(A + Bi), \quad A, B \text{ reálná}; \quad B \neq 0.$$

Návod. K stanovení na př. druhého integrálu stačí uvážiti, že primitivní funkcí jest $\overline{\log} \sin(x + A + Bi)$ ve všech intervalech, v nichž tato funkce jest funkcí spojitou. V těch bodech, v nichž funkce ta jest nespojitá, mění se hodnota její o $\pm 2\pi i$ a jest tedy (ještě se zřetelem k cvičení př. 1, odst. 18c) hodnota integrálu na levé straně druhé rovnice rovna pravé straně té rovnice zvětšené o celistvý násobek čísla $2\pi i$. Avšak pravá strana druhé rovnice jest spojitou funkcí čísel A, B v každém oboru uzavřeném, v němž B jest různo od nuly. Rovněž tak levá strana (podle věty o střední hodnotě). I určíme neznámý cel. násobek čísla $2\pi i$, volíme-li vhodně B. Nejpohodlnější jest voliti B velmi veliké (symbolicky klademe $B = +\infty$ aneb $B = -\infty$); shledáme pak, že násobek ten se redukuje na nulu.

První rovnice jest speciálním případem druhé (viz také Hermite, Oeuvres, t. IV, str. 525 a násl.).

11e. Dokažte, že za stejných předpokladů o A, B jako v předch. př.

$$\int_a^b \operatorname{cotg}(x + A + Bi)\, dx = \overline{\log} \frac{\sin(b + A + Bi)}{\sin(a + A + Bi)} + 2\pi i\, E_1\left(\frac{a - b}{2\pi}\right) \cdot \operatorname{sign} B,$$

kde $E_1(\xi)$ značí číslo celé obsažené v intervalu $(\xi - \frac{1}{2}, \xi + \frac{1}{2} - 0)$. Odvodí se stejně jako výsledek v příkladu předch.

11f. Dokažte vztah (α jest číslo komplexní, jehož imaginární část jest od 0 různa)

$$\int_a^b \frac{dx}{\sin(x+\alpha)} = \overline{\log}\,\frac{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}(a+\alpha)}{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}(b+\alpha)}\,.$$

Jakožto speciální případy této rovnosti dostáváme hodnoty těchto integrálů udané od Hermitea (Oeuvres, t. IV, str. 528)

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sin(x-ai)} = +\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sin(x+ai)} = 2\log\frac{1+e^{-a}}{1-e^{-a}},$$

a reálné, >0.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin(x-ai)} = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin(x+ai)} = 4i \operatorname{arc\,tg} e^{-a}.$$

Vztah obecný jest důsledkem rovnosti v př. 11e a rovnice

$$\frac{1}{\sin(x+\alpha)} = \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{1}{2}(x+\alpha) + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(x+\alpha).$$

11 g. Integrály (n jest číslo celé kladné >0, ostatní označení s příslušnými předpoklady jest uvedeno v příkladě 11b).

$$\int_0^{2\pi} e^{inx}\,.\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(x-\alpha)\,dx = 2\pi i e^{ni\alpha}(1+\operatorname{sign} N),$$

$$\int_0^{2\pi} e^{-nix}\,.\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(x-\alpha)\,dx = 2\pi i\, e^{-ni\alpha}(-1+\operatorname{sign} N) \qquad (\times)$$

lze vypočísti snadno na podkladě výsledku př. 11b. Tak na př. při prvním integrálu platí pro integrovanou funkci identicky (místo e^{ix} resp. $e^{i\alpha}$ kladeno pro stručnost z resp. a)

$$e^{inx}\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(x-\alpha) = iz^n\frac{z+a}{z-a} = i(z^n-a^n)\frac{z+a}{z-a} + ia^n\frac{z+a}{z-a} =$$

$$i(z^n + 2z^{n-1}a + 2z^{n-2}a^2 + \cdots + 2za^{n-1} + a^n) + a^n\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(x-\alpha).$$

Integrujeme-li tento výraz člen za členem v mezích 0, 2π, máme ihned naznačený výsledek.

11h. Jest dále

$$\int_0^{2\pi} \cos nx \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(x-\alpha)\,dx = 2\pi i \operatorname{sign} N\,.\,e^{in\varepsilon\alpha},$$

$$\int_0^{2\pi} \sin nx \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(x-\alpha)\,dx = 2\pi e^{in\varepsilon\alpha},$$

kde $\varepsilon = \operatorname{sign} N$. Výsledky tyto jsou bezprostřední důsledky rovnic ($\times$).

11k. Z výsledků příkladu předch. a z první rovnice příkladu 11c následuje ihned

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos nx\,dx}{a\cos x + b\sin x + c} = \frac{\pi\varepsilon}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}}\cdot\left(e^{in\varepsilon\alpha_1} - e^{in\varepsilon\alpha_2}\right),$$

jestliže $(ab)^2 > (bc)^2 + (ca)^2$

$$= \frac{\pi\varepsilon}{\sqrt{c^2 - a^2 - b^2}} \left(\frac{\varepsilon\sqrt{c^2 - a^2 - b^2} - c}{a^2 + b^2} \right)^n ((a + bi)^n + (a - bi)^n),$$

jestliže $(ab)^2 < (bc)^2 + (ca)^2$. Při tom značí $\varepsilon = \operatorname{sign} N_1$. (Označení viz v př. 11c).
Stejně jest

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin nx\, dx}{a \cos x + b \sin x + c} = -i\varepsilon \int_0^{2\pi} \frac{\cos nx\, dx}{a \cos x + b \sin x + c},$$

jestliže $(ab)^2 > (bc)^2 + (ca)^2$;

jestliže pak $(ab)^2 < (bc)^2 + (ca)^2$,

$$= \frac{\pi\varepsilon}{i\sqrt{c^2 - a^2 - b^2}} \left(\frac{\varepsilon\sqrt{c^2 - a^2 - b^2} - c}{a^2 + b^2} \right)^n ((a + bi)^n - (a - bi)^n).$$

Zvláště pak jest v případě prvém:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos x\, dx}{a \cos x + b \sin x + c} = i\varepsilon \int_0^{2\pi} \frac{\sin x\, dx}{a \cos x + b \sin x + c} = \frac{2\pi}{a - \varepsilon bi};$$

v případě druhém:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos x\, dx}{a \cos x + b \sin x + c} = \frac{2\pi a}{\sqrt{c^2 - a^2 - b^2}} \cdot \frac{\sqrt{c^2 - a^2 - b^2} - \varepsilon c}{a^2 + b^2},$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin x\, dx}{a \cos x + b \sin x + c} = \frac{2\pi b}{\sqrt{c^2 - a^2 - b^2}} \cdot \frac{\sqrt{c^2 - a^2 - b^2} - \varepsilon c}{a^2 + b^2}.$$

11 l. Z posledních rovnic předcházejícího příkladu a z výsledku př. 11c obdržíme, přejdeme-li k primitivním funkcím podle c, resp. podle a, b (obdobně jako v příkladu 10, kde jsme uvažovali primitivní funkci podle r) k těmto integrálům

případ prvý:

$$\int_0^{2\pi} \log (a \cos x + b \sin x + c)\, dx = 2\pi \overline{\log} (a - \varepsilon bi) + k_1;$$

případ druhý:

$$\int_0^{2\pi} \log (a \cos x + b \sin x + c)\, dx = 2\pi \overline{\log} (c + \varepsilon \sqrt{c^2 - a^2 - b^2}) + k_2.$$

Při tom funkce $\log (a \cos x + b \sin x + c)$ za znaménkem integračním jest určena jednoznačně tak, že si zvolíme její hodnotu pro jedno x z intervalu integračního na př. pro $x = 0$ libovolně (mezi hodnotami té funkci příslušejícími a lišícími se o celistvý násobek čísla $2\pi i$) a ostatní hodnoty stanovíme požadavkem, aby funkce uvažovaná byla v intervalu integračním spojitá (nehledě po případě k tomu jednomu bodu, v němž jsme si volili hodnotu funkce). Konstanty k_1, k_2 nezávisí na a, b, c a jsou to hodnoty numerické, závislé také na volbě funkce $\log (a \cos x + \cdots)$; různé hodnoty, které vznikají různou volbou té funkce, liší se o celistvý násobek čísla $4\pi^2 i$. Abychom až na tento celistvý násobek hodnoty ty úplně stanovili, volíme vhodně a, b, c. Tak v případě prvém položíme $c = 0$, $a = 1$, $b = i$, čímž integrál nabývá hodnotu $2\pi^2 i + 4n\pi^2 i$, kde n jest celé. Pravá strana (na které $\varepsilon = +1$) se redukuje na $2\pi \log 2$. I máme k stanovení k_1 vztah

$$2\pi \log 2 + k_1 = 2\pi^2 i + 4n\pi^2 i, \quad k_1 = -2\pi \log(-2) + 4n'\pi^2 i$$

a tedy jest v prvém případě

$$\int_0^{2\pi} \log(a \cos x + b \sin x + c)\, dx = 2\pi \log \tfrac{1}{2}(\varepsilon bi - a) + 4m\pi^2 i, \qquad m \text{ celé.}$$

V druhém případě klademe $c = C$, $a = i$, $b = i$; při tom předpokládáme C reálné kladné, velmi veliké (nekonečně veliké 1. řádu vzhledem 1). Pak jest integrál roven $2\pi \log C + 4n\pi^2 i$. Na pravé straně jest $\varepsilon = +1$; jest pak pravá strana rovna (abstrahujeme-li rovněž od veličin reálných nekonečně malých)

$$k_2 + 2\pi \log(C + \sqrt{C^2 + 2}) \doteq + 2\pi \log 2C + k_2,$$

tudíž

$$k_2 = -2\pi \log 2;$$

$$\int_0^{2\pi} \log(a \cos x + b \sin x + c)\, dx = 2\pi \log \tfrac{1}{2}(c + \varepsilon\sqrt{c^2 - a^2 - b^2}) + 4m\pi^2 i, \qquad m \text{ celé.}$$

2. INTEGRÁLY ZE SOUČTŮ NEKONEČNÝCH ŘAD.

69. Již v odst. 6 byla vytknuta důležitost, kterou mají integrály z nekonečných řad, jichž členové jsou funkce proměnné (integrační), pro definici integrálu na podkladě primitivní funkce. Poznámka tam učiněná prokazovala ihned existenci integrálů (primitivních funkcí) k velké většině funkcí v analysi používaných a měla pro následující zásadní důležitost. Vedle toho integrací nekonečných řad jest nám umožněno v četných případech integrály z funkcí skutečně počítati a často to bývá nejúčelnější prostředek k tomu výpočtu. Jelikož pak věty pro integraci nekonečných řad při různých definicích integrálů jenom v podružných věcech (ve věcech totiž majících spíše teoretický význam) se liší, pojednám soustavně již na tomto místě (na základě definice integrálu jakožto primitivní funkce) o integrálech z řad nekonečných, jichž členové jsou funkce integrační proměnné, jakož i o použití těch integrálů z řad pro výpočet určitých integrálů. Později během výkladů dalších doplním změnami, které v příslušných větách nastávají, vycházíme-li od jiné definice integrálu.

V DP odst. 122, důsledek 2 byla dokázána věta: Mají-li funkce $u_k(x)$ derivace v intervalu $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$, je-li nekonečná řada $u'_1(x) + u'_2(x) + u'_3(x) + \cdots$ stejnoměrně konvergentní pro všecka x, pro něž $0 < |x - x_0| < \delta$, a je-li konečně řada $u_1(x) + u_2(x) + \cdots$ konvergentní pro $x = x_0$, jest tato řada vůbec konvergentní v intervalu $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ a její součet $s(x)$ má v bodě $x = x_0$ derivaci, pro niž $s'(x_0) = u'_1(x_0) + u'_2(x_0) + \cdots$.

Kdybychom byli předpokládali, že funkce $u_k(x)$ mají derivace v intervalu $(x_0, x_0+\delta)$, že řada $u'_1(x)+u'_2(x)+\cdots$ jest stejnoměrně konvergentní pro všecka x, pro něž $\delta > x - x_0 > 0$ a že řada $u_1(x)+u_2(x)+\cdots$ jest konvergentní pro $x = x_0$, bylo by na základě obecné věty cit. odst. (DP, 122) vyplývalo, že řada $u_1(x)+u_2(x)+\cdots$ jest konvergentní v intervalu $(x_0, x_0+\delta)$ a že její součet $s(x)$ má v bodě $x = x_0$ derivaci zprava, jež jest rovna součtu $u'_1(x_0)+u'_2(x_0)+\cdots$.

Obdobný výrok lze učiniti o derivaci funkce $s(x)$ v bodě $x = x_0$ zleva.

Z těchto vět vyplývá ihned (budiž $a < b$): *Je-li řada* $u'_1(x)+ + u'_2(x)+\cdots$ *stejnoměrně konvergentní v intervalu* $(a+0, b-0)$ *a je-li řada* $u_1(a)+u_2(a)+\cdots$ *konvergentní, pak funkce* $s(x) = u_1(x)+u_2(x)+\cdots$ *má v intervalu* (a, b) *ve všech bodech derivaci* (v bodě a zprava, v b zleva), *jež jest dána součtem nekonečné řady* $u'_1(x)+u'_2(x)+\cdots$, t. j.

$$s'(x) = u'_1(x)+u'_2(x)+u'_3(x)+\cdots \qquad \textbf{(Základní věta.)}$$

(Nejprve totiž, volíme-li $x_0 = a$ a $\delta = b - a$, následuje z citovaných vět konvergence řady $u_1(x)+u_2(x)+\cdots$ v intervalu (a, b) a výraz pro derivaci funkce $s(x)$ v bodě a zprava, potom, volíme-li za x_0 některou hodnotu z intervalu (a, b) jinou než a, snadno ostatní tvrzení; mlčky při tom byla předpokládána existence derivací funkcí $u_k(x)$ v interv. (a, b).)

Větu poslední můžeme, používáme-li pojmu určitého integrálu (jakožto primitivní funkce), vysloviti takto (klademe v ní

$$v_1(x) = u'_1(x),\ v_2(x) = u'_2(x), \ldots;\ \int_a^x v_1(x)\,dx = u_1(x),\ \int_a^x v_2(x)\,dx = u_2(x), \ldots):$$

Věta 1. Jestliže řada

$$v_1(x)+v_2(x)+v_3(x)+\cdots\cdots \tag{1}$$

je stejnoměrně konvergentní v intervalu $(a+0, b-0)$ *a má za součet* $S(x)$, *pak, existují-li v* (a, b) *integrály k funkcím* $v_k(x)$, *existuje tam i integrál k* $S(x)$ *a jest*

$$\int_a^x S(x)\,dx = \int_a^x v_1(x)\,dx + \int_a^x v_2(x)\,dx + \int_a^x v_3(x)\,dx + \cdots, \quad \textit{je-li } x \text{ v } (a, b). \tag{2}$$

Neboť, že řada na pravé straně jest konvergentní pro $x = a$, jest patrno — všichni členové její jsou pro $x = a$ rovni nule. Ostatní podmínky požadované k platnosti věty jsou pak splněny na základě předpokladů větou daných.

Jelikož však věta, kterou jsme si odvodili, vyplynula jako pouhý důsledek věty diferenciálního počtu, jsou integrály určité v (2) se vyskytující integrály podle původní jich definice (jakožto primitivní funkce) a nikoliv integrály podle definice rozšířené (odst. 61 a násl.). Pro onen případ lze ještě větu doplniti výrokem, že *řada* (2) *jest stejnoměrně konvergentní.* Zvolme si, abychom to dokázali kladné číslo ε libovolně. Pak, poněvadž jest řada (1) stejnoměrně konvergentní v $(a+0,\ b-0)$, existuje číslo N takové, že pro všecka $n > N$ jest

$|r_n(x)| < \varepsilon/(b-a)$, je-li $r_n(x)$ zbytek řady (1) po n-tém členu a x v $(a+0, b-0)$.

Označíme-li $R_n(x)$ zbytek řady (2) po n-tém členu, jest podle věty svrchu vyslovené

$$R_n(x) = \int_a^x r_n(x)\,dx \quad \text{a tedy podle (2'') odst. 58} \quad |R_n(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(x-a) < \varepsilon$$

pro všechna $n > N$, čímž věta dokázána.

70. Větu odst. předch. lze nejprve rozšířiti pro ten případ, že řada (1) jest stejnoměrně konvergentní v každém intervalu položeném na (a, b), ve kterém není žádný z konečného počtu bodů $c_1, c_2, \ldots, c_N$ v intervalu (a, b) se nacházejících. Můžeme totiž tvrditi: *Věta* 2. *Jestliže řada* (1) *jest stejnoměrně konvergentní v každém intervalu položeném na* (a, b) *a neobsahujícím* (*ani na svých hranicích*) *žádný z bodů* $c_1, c_2, \ldots, c_N$ *toho intervalu, je-li dále řada*

$$\int_a^x v_1(x)\,dx + \int_a^x v_2(x)\,dx + \int_a^x v_3(x)\,dx + \cdots \tag{2'}$$

konvergentní v intervalu (a, b) *a představuje-li v něm funkci spojitou* (*což nastane na př. tenkráte, je-li v* (a, b) *stejnoměrně*

ı *tní*), *jest součet řady* (2′) *dán integrálem* $\int_a^x S(x)\,dx$, *při čemž pojem integrálu jest brán ve smyslu odst.* 61 *a také integrály z funkcí* $v_k(x)$ *ve* (2′) *nechť jsou ve smyslu odst.* 61 *funkce spojité, jež jsou primitivními funkcemi k* $v_k(x)$ *v každém intervalu položeném na* (a, b) *a neobsahujícím žádný z bodů* $c_1, c_2, \ldots, c_N$.

Neboť každý bod různý od bodů $c_1, c_2, \ldots, c_N$ leží v intervalu neobsahujícím žádný z bodů $c_1, c_2, \ldots$, v němž jest tedy řada (1) stejnoměrně konvergentní, a v němž tudíž součet řady (2′) představuje podle základní věty předch. odst. primitivní funkci k součtu řady (1). Tím a v důsledku rozšíření pojmu integrálního odstavcem 61 jest věta dokázána.

Jelikož řada (2′) jest v důsledku předpokladů v každém intervalu položeném na (a, b) a neobsahujícím žádný z bodů c_1, $c_2, \ldots, c_N$ stejnoměrně konvergentní (viz předch. odst.), *postačí k zjištění, zda součet řady* (2′) *jest funkcí spojitou v* (a, b). *vyšetření, zda součet ten jest spojitou funkcí v bodech* $c_1, c_2, \ldots, c_N$.

POZNÁMKA 1. Věta zůstává v platnosti i tenkráte, předpokládáme-li že řada (1) *jest stejnoměrně konvergentní v každém intervalu neobsahujícím* (ani na hranicích) *žádný z bodů reducibilního množství číselného* $\mathfrak{A}$. Konečně i o členech řady (2′) bychom mohli předpokládati, že to jsou integrály definované podle odst. 64, že jsou tedy funkce spojité, jichž derivace podle x existují a jsou rovny $v_k(x)$ ve všech bodech intervalu (a, b) s výjimkou po případě bodů obsažených v reducibilním množství číselném $\mathfrak{A}_1$, které však jest totéž pro všecka k. Důkaz tohoto rozšířeného tvrzení jest rovněž jednoduchý důsledek základní věty a příslušných definic.

POZNÁMKA 2. Věty o integraci řad nekonečných, jichž členové jsou funkce proměnné x, můžeme také jinak vysloviti a to tak, že se týkají integrálu z limity řady funkční $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x) \ldots$ o nekonečném počtu členů. Tak na př. větu 1. odst. 69 můžeme nahraditi větou jí ekvivalentní:

Jestliže existuje limita

$$\lim_{n=\infty} f_n(x) = f(x),$$

ke kteréžto limitě $f_n(x)$ *konverguje v intervalu* $(a+0, b-0)$ *stejnoměrně a existují-li ke všem* $f_n(x)$ *primitivní funkce v tomto intervalu, pak existuje v něm i k* $f(x)$ *primitivní funkce a jest*

$$\int_a^x f(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \int_a^x f_n(x)\,dx \qquad \textit{pro všecka } x \textit{ v } (a\ b).$$

Tato věta bezprostředně následuje z věty 1, jakož patrno, nahradíme-li řadu ve větě 1 řadou

$$f_1(x) + [f_2(x) - f_1(x)] + [f_3(x) - f_2(x)] + \cdots$$

t. j. klademe-li $v_k(x) = f_k(x) - f_{k-1}(x)$.

Obdobně lze vysloviti i větu 2 (odst. 70), což však netřeba podrobněji rozváděti.

PŘÍKLAD 1. Řada

$$(1-x) + x(1-x) + x^2(1-x) + \cdots$$

jest konvergentní stejnoměrně v každém intervalu položeném na $(-1, 1)$ neobsahujícím body -1, 1.

Řada, kterou integrací v mezích $(0, x)$ dostaneme,

$$\left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2}\right) + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right) + \cdots$$

jest stejnoměrně konvergentní v intervalu $(-1, 1)$; neboť,

$$|\, r_n(x)\, | = \left|\frac{x^n}{n}\right| \leqq \frac{1}{n}$$

a tedy $|\, r_n(x)\, | < \varepsilon$ pro všecka $n > \frac{1}{\varepsilon}$ a pro všecka x intervalu $(0, 1)$). Jest tedy součet řady druhé integrálem součtu řady prvé v mezích $(0, x)$, při čemž můžeme si x zvoliti rovným i 1, jak plyne z věty právě dokázané a jak čtenář snadno verifikuje.

PŘÍKLAD 2. Totéž, co platí o řadě příkladu předcházejícího, platí o řadě

$$\log x + x \log x + x^2 \log x + \cdots$$

v intervalu $(0, 1)$, bereme-li ji v úvahu bez prvého členu. Integrujeme-li jednotlivý člen v mezích $(0, 1)$, dostáváme

$$\int_0^1 x^{k-1} \log x \, dx = \left[\frac{x^k \log x}{k}\right]_0^1 - \frac{1}{k}\int_0^1 x^{k-1}\, dx = -\frac{1}{k^2};$$

součet řady dané však jest

$$\frac{\log x}{1-x}.$$

I jest tedy

$$\int_0^1 \frac{\log x}{1-x}\, dx = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = -\frac{\pi^2}{6}, \qquad \text{(DP, 159, rovnice } (h)).$$

Tímto postupem lze obecněji stanoviti

$$\int_0^1 \frac{(\log x)^{2m-1}}{1-x}\, dx = -(2\pi)^{2m} \cdot \frac{B_m}{4m},$$

kde m jest celé číslo kladné, což přenechávám čtenáři (viz cit. rovnici z DP).

PŘÍKLAD 3. (Darbouxův). Řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[kx\, e^{-kx^2} - (k+1)\, x\, e^{-(k+1)x^2}\right] \tag{a}$$

jest řada konvergentní pro všecka x a její součet jest $x\, e^{-x^2}$. Integrujeme-li v mezích $(0, x)$, dostáváme řadu

$$-\tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{-kx^2} - e^{-(k+1)x^2}\right); \tag{b}$$

i tato řada konverguje a jest její součet $-\frac{1}{2} e^{-x^2}$ při $x \neq 0$, pro $x = 0$ jest součet 0. Avšak

$$\int_0^x x e^{-x^2}\, dx = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\, e^{-x^2}$$

a není tedy integrál součtu prvé řady v mezích $(0, x)$ rovný součtu druhé řady. Z toho uzavíráme, že řada (a) není v intervalu $(0, x)$ ba ani v intervalu $(0+0, x)$ stejnoměrně konvergentní (neboť pak by podle věty 1. nemohla okolnost právě vytčená nastati). Vskutku řada (a) není v intervalu, který obsahuje bod 0 třeba i na hranicích, stejnoměrně konvergentní, avšak v každém jiném intervalu nastává stejnoměrná konvergence. Kdyby dále řada (b) byla funkcí spojitou v bodě 0, byl by její součet integrálem v mezích 0, x funkce dané součtem řady (a); jelikož však tomu tak není, jest patrno podle věty 2, že řada (b) není spojitou v bodě $x=0$, a není tudíž také stejnoměrně konvergentní v žádném intervalu obsahujícím bod $x=0$, což ovšem snadno lze dokázati.

PŘÍKLAD 4. K výpočtu integrálu

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{a+b\sin x}{a-b\sin x} \frac{dx}{\sin x} \qquad |b|<|a|$$

použijeme rozvoje (DP, 137)

$$\log\frac{1+\xi}{1-\xi}=2\left[\frac{\xi}{1}+\frac{\xi^3}{3}+\frac{\xi^5}{5}+\cdots\right].$$

Dostáváme

$$\log\frac{a+b\sin x}{a-b\sin x}=2\left[\frac{b}{a}\sin x+\tfrac{1}{3}\frac{b^3}{a^3}\sin^3 x+\tfrac{1}{5}\frac{b^5}{a^5}\sin^5 x+\cdots\right].$$

Rozvoj tento (i když jej násobíme $1/\sin x$) jest konvergentní stejnoměrně pro každý interval x, neboť konverguje rychleji než řada geometrická s kvocientem b/a, ať jest x jakékoliv. Dostaneme pak integrací součet členů tvaru

$$2\cdot\frac{1}{2k+1}\cdot\frac{b^{2k+1}}{a^{2k+1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2k} x\,dx=\pi\cdot\frac{1.3.5\ldots 2k-1}{2.4.6\ldots 2k}\cdot\frac{1}{2k+1}\,\frac{b^{2k+1}}{a^{2k+1}}$$

pro $k=0, 1, 2, \ldots$, kterýžto součet jest, jak známo, $\pi \arcsin b/a$. Jest tedy

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\frac{a+b\sin x}{a-b\sin x}\,\frac{dx}{\sin x}=\pi\arcsin\frac{b}{a}, \qquad |b|<|a|.$$

Stejně se dokáže (pro $|b|<|a|$)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\frac{a+b\sin x}{a-b\sin x}\sin x\,dx=\pi\,\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}.$$

PŘÍKLAD 5. Integrál

$$\int_0^\infty \frac{x^{b-1}}{1+x}\,dx, \qquad 0<b<1$$

si nejprve rozložíme ve dva a ve druhém provedeme substituci $x=1/x'$; dostaneme

$$\int_0^\infty\frac{x^{b-1}}{1+x}\,dx=\int_0^1\frac{x^{b-1}}{1+x}\,dx+\int_1^\infty\frac{x^{b-1}}{1+x}\,dx=\int_0^1\frac{x^{b-1}+x^{-b}}{1+x}\,dx.$$

Avšak
$$\frac{x^{b-1}+x^{-b}}{1+x}=(x^{b-1}+x^{-b})(1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots).$$
Řada jest stejnoměrně konvergentní v intervalu $(0, 1-\varepsilon)$, kde $0<\varepsilon<1$. Řada integrací vzniklá jest však konvergentní stejnoměrně v celém intervalu $(0, 1)$, neboť integrujeme-li v mezích $(0, x)$ dostaneme řadu
$$\left(\frac{x^b}{b}+\frac{x^{1-b}}{1-b}\right)-\left(\frac{x^{b+1}}{b+1}+\frac{x^{2-b}}{2-b}\right)+\left(\frac{x^{b+2}}{b+2}+\frac{x^{3-b}}{3-b}\right)-\cdots, \tag{d}$$
aneb, píšeme-li členy v jiném pořádku, řadu
$$=\frac{x^b}{b}-\left(\frac{x^{b+1}}{b+1}+\frac{x^{-b+1}}{b-1}\right)+\left(\frac{x^{b+2}}{b+2}+\frac{x^{-b+2}}{b-2}\right)-\cdots,$$
která konverguje i pro $x=1$ absolutně a pro ostatní x v $(0, 1)$ konverguje ještě rychleji než pro $x=1$; konverguje tedy stejnoměrně a můžeme pak podle věty odst. 70 položiti (kladouce do (d) $x=1$)
$$\int_0^\infty \frac{x^{b-1}}{1+x}\,dx=\frac{1}{b}-\left(\frac{1}{b+1}+\frac{1}{b-1}\right)+\left(\frac{1}{b+2}+\frac{1}{b-2}\right)-\left(\frac{1}{b+3}+\frac{1}{b-3}\right)+\cdots,$$
čímž daný integrál vypočten.

Tento integrál jsme však vypočetli již dříve a dostali jsme pro b racionální tvaru $\frac{2\mu+1}{4\nu}$ výsledek (viz cvičení k odst. 68, př. 11)
$$\int_0^\infty \frac{x^{b-1}}{1+x}\,dx=\frac{\pi}{\sin b\pi}, \qquad 0<b<1. \tag{e}$$
Srovnáme-li oba výsledky dospíváme ke vztahu
$$\frac{\pi}{\sin b\pi}=\frac{1}{b}-\left(\frac{1}{b+1}+\frac{1}{b-1}\right)+\left(\frac{1}{b+2}+\frac{1}{b-2}\right)-\cdots \tag{f}$$
dokázanému sice jenom pro b racionální tvaru $\frac{2\mu+1}{4\nu}$, avšak poněvadž obě strany poslední rovnice jsou funkce spojité, *platnému pro každé b uvnitř* $(0, 1)$. Tedy i (e) *jest platno pro každé b*, jež hoví nerovninám $0<b<1$.

PŘÍKLAD 6. Užíváme-li výsledku v (f) — který ostatně v poněkud jiné formě jest odvozen i v DP, 160 — máme ihned
$$\int_0^1 \sin\pi x.\left[\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right)+\left(\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-2}\right)-(\ldots)+\cdots\right]dx=$$
$$=\int_0^1 \sin\pi x.\frac{\pi}{\sin\pi x}\,dx=\pi\int_0^1 dx=\pi. \tag{g}$$
Řadu v hranaté závorce — nehledíme-li k prvému jejímu členu — můžeme rozložiti ve dvě řady
$$-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}-\cdots\cdots,$$
$$-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-4}-\cdots\cdots,$$

jež obě jsou stejnoměrně konvergentní. Neboť při $0 < x < 1$ jest zbytek po $(n-1)$-tém členu řady prvé znaménka téhož jako člen n-tý a co do absolutní hodnoty menší než součet řady

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+4}+\cdots\quad=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}<\frac{2}{n}$$

a stejně tomu jest i při řadě druhé. Stejnoměrná konvergence prvé řady očividně se nezruší, násobíme-li každý člen výrazem $\sin \pi x$ (neboť ten výraz jest stále v absolutní hodnotě $\leqq 1$). Můžeme tedy v důsledku dokázaných vět tvrditi, že integrál v mezích 0, 1 ze součinu $\sin \pi x$ a řady prvé jest rovný součtu integrálů z jednotlivých členů řady prvé násobených $\sin \pi x$. Vypočtěme součet prvých n takových integrálů. Jest nejprve

$$\int_0^1 \frac{(-1)^k}{x+k} \sin \pi x \, dx = (-1)^{2k} \int_k^{k+1} \frac{\sin \pi x'}{x'} dx' = \int_k^{k+1} \frac{\sin \pi x}{x} dx; \quad \text{subst. } x+k=x'$$

a tedy součet prvých n integrálů vznikajících z členů řady prvé (vynechávám funkci za znaménkem integračním)

$$\int_1^2 + \int_2^3 + \int_3^4 + \cdots + \int_n^{n+1} = \int_1^{n+1} \frac{\sin \pi x}{x} dx.$$

Tudíž v důsledku vět o integraci řad stejnoměrně konvergentních

$$\int^1 \sin \pi x \left[-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} + \cdots \right] dx = \lim_{n=\infty} \int_1^{n+1} \frac{\sin \pi x}{x} dx = \int_1^{\infty} \frac{\sin \pi x}{x} dx,$$

čímž prokázáno zároveň, že integrál na pravé straně poslední rovnice má význam. Stejně jest

$$\int_0^1 \sin \pi x \left[-\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} + \cdots \right] dx = \int_{-\infty}^0 \frac{\sin \pi x}{x} dx,$$

a rovnice (g) se změní v rovnost

$$\pi = \int_0^1 \frac{\sin \pi x}{x} dx + \int_1^{\infty} \frac{\sin \pi x}{x} dx + \int_{-\infty}^0 \frac{\sin \pi x}{x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi x}{x} dx.$$

Jelikož pak $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{\sin \pi x}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin \pi x}{x} dx$, $\dfrac{\sin \pi x}{x}$ jest funkce sudá,

máme konečně

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \pi x}{x} dx = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Klademe-li v tomto integrálu $x = ax'/\pi$, kde $a > 0$, máme ihned poněkud obecnější výsledek

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \tfrac{1}{2}\pi, \qquad a > 0.$$

Avšak změní-li v poslední rovnici a svoje znaménko, změní své znaménko celá levá strana, takže ještě poněkud obecněji můžeme psáti při každém a

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\,dx = \tfrac{1}{2}\pi \operatorname{sign} a,$$

kde $\operatorname{sign} a = +1, -1, 0$ podle toho, zda a jest kladné, záporné, nule rovné.

71. Věty předcházející pro integraci řad předpokládají interval (a, b), ve kterém se integrace provádí, konečný. Lze jich však užíti i na interval *nekonečný*, provedeme-li napřed vhodnou záměnu proměnné integrační, tak aby se interval nekonečný změnil na konečný. Tak na př. běží-li o integraci v mezích (a, ∞), kde a jest kladné, stačí proměnnou integrační x nahraditi proměnnou $y = \frac{1}{x}$ a dostaneme interval $\left(0, \frac{1}{a}\right)$, na který užití vět právě uvedených jest přípustno. Po případě — jeví-li se to účelno — lze interval rozděliti dříve na několik intervalů; na př. interval integrační $(-\infty, \infty)$ bychom mohli rozděliti ve tři $(-\infty, -b)$, $(-b, a)$, (a, ∞), kde a, b jsou kladny, a potom užíti při prvním a třetím intervalu naznačené substituce.

Často však lze rozhodnouti, zda integrací řady v intervalu nekonečném dospíváme k témuž výsledku jako integrací jejího součtu, i v případech, v nichž užití vět dosud dokázaných nevede k cíli. K tomu cíli provedeme tuto úvahu. Budiž dána řada nekonečná o součtu $s(x)$

$$s(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \cdots$$

a máme rozhodnouti, zda jest platna tato rovnice

$$\int_{b_0}^\infty s(x)\,dx = \int_{b_0}^\infty u_1(x)\,dx + \int_{b_0}^\infty u_2(x)\,dx + \int_{b_0}^\infty u_3(x)\,dx + \cdots \tag{9}$$

K tomu samozřejmě se vyžaduje nejprve, aby integrály $\int_{b_0}^\infty s(x)\,dx$, $\int_{b_0}^\infty u_k(x)\,dx$ měly význam. Dále budeme požadovati, aby pro všecka $B \geqq b_0$, $B' > B$ byla splněna rovnice

$$\int_B^{B'} s(x)\,dx = \int_B^{B'} u_1(x)\,dx + \int_B^{B'} u_2(x)\,dx + \int_B^{B'} u_3(x)\,dx + \cdots, \tag{10}$$

(o čemž nás poučují zpravidla věty dokázané odst. 69, po př. 70). Podle definice integrálu $\int_{b_0}^\infty s(x)\,dx$ jest

$$\int_{b_0}^\infty s(x)\,dx = \int_{b_0}^{b_1} s(x)\,dx + \int_{b_1}^{b_2} s(x)\,dx + \int_{b_2}^{b_3} s(x)\,dx + \cdots, \tag{11}$$

kde $b_0, b_1, b_2, b_3 \ldots$ jest jednoduše spočetná řada čísel rostoucích s indexem nade všecky meze.

Můžeme pak podle (10) psáti

$$\int_{b_0}^{b_1} s(x)\,dx = \int_{b_0}^{b_1} u_1(x)\,dx + \int_{b_0}^{b_1} u_2(x)\,dx + \int_{b_0}^{b_1} u_3(x)\,dx + \cdots,$$

$$\int_{b_1}^{b_2} s(x)\,dx = \int_{b_1}^{b_2} u_1(x)\,dx + \int_{b_1}^{b_2} u_2(x)\,dx + \int_{b_1}^{b_2} u_3(x)\,dx + \cdots,$$

$$\int_{b_2}^{b_3} s(x)\,dx = \int_{b_2}^{b_3} u_1(x)\,dx + \int_{b_2}^{b_3} u_2(x)\,dx + \int_{b_2}^{b_3} u_3(x)\,dx + \cdots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Uvažujme nyní řadu dvojnou o členech

$$v_{ik} = \int_{b_{i-1}}^{b_i} u_k(x)\,dx; \qquad i, k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Sčítáme-li tuto řadu dvojnou napřed podle řádek, t. j. podle k, dostaneme pravou stranu rovnice (11) a tedy za součet $\int_{b_0}^{\infty} s(x)\,dx$. Sčítáme-li napřed podle i, obdržíme za součet

$$\int_{b_0}^{\infty} u_1(x)\,dx + \int_{b_0}^{\infty} u_2(x)\,dx + \int_{b_0}^{\infty} u_3(x)\,dx + \cdots.$$

Tyto součty jistě jsou stejny, je-li řada o členech v_{ik} absolutně konvergentní (DP, 52). Máme tak větu:

K platnosti rovnice (9) *jsou vedle samozřejmých podmínek tyto podmínky postačitelny:*

1. *Rovnice* (10) *jest splněna pro každé* $B \geqq b_0$, $B' > B$.

2. *Lze voliti jednoduše spočetnou řadu čísel* $b_0, b_1, b_2, \ldots.$ *rostoucích nade všecky meze tak, že řada dvojná o členech* v_{ik} *jest absolutně konvergentní.*

Od podmínky 2. očividně můžeme upustiti, jestliže členy $u_k(x)$ aspoň od jistého indexu ν počínajíce jsou stále kladny pro všecka $x > A > b_0$. Pak totiž ve dvojné řadě, ke které jsme vedeni integrací řady dané v mezích (A, ∞), může se jednati jenom o absolutní konvergenci (neboť členové od indexu ν počínajíce jsou stále kladni).

PŘÍKLAD. K výpočtu integrálu

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx \qquad \alpha > 0$$

rozvineme $\frac{\sin x}{x}$ v řadu, dostaneme

$$e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} = e^{-\alpha x} \left(\frac{1}{1!} - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots \right). \tag{f}$$

Řada tato jest stejnoměrně konvergentní v každém intervalu pro x. Abychom však získali si jistoty, že můžeme (aniž bychom porušili rovnost) integrovati (*f*) v mezích $(0, \infty)$, vyšetříme ještě, zda podle návodu svrchu podaného můžeme sestrojiti dvojnou řadu o členech v_{ik} absolutně konvergentní. Čísla b_k zvolíme si tím, že klademe $b_k = k$. Pak absolutní hodnota členu v_{ik} jest

$$| v_{ik} | = \int_{k-1}^{k} e^{-\alpha x} \frac{x^{2i-2}}{(2i-1)!} dx < e^{-\alpha(k-1)} \frac{k^{2i-2}}{(2i-1)!}.$$

Sčítáme-li napřed podle řádků (podle i), vidíme podle poslední nerovniny, že dostáváme v každém řádku součet absolutních hodnot menší než $e^{k-\alpha(k-1)}$ a tudíž, že dvojná řada bude absolutně konvergentní, když $\alpha > 1$. Můžeme tedy za předpokladu $\alpha > 1$ integrovati (*f*) na obou stranách v mezích $(0, \infty)$, čímž obdržíme (př. 1 ve cvičení odst. 68)

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{3\alpha^3} + \frac{1}{5\alpha^5} - \cdots = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\alpha}. \tag{g}$$

$$\alpha > 1.$$

Zároveň jest patrno na příkladě propočítaném, že vskutku nepostačí, běží-li o integraci řad v mezích (a, ∞), aby splněn byl požadavek stejnoměrné konvergence v intervale (a, B), kde B jest libovolně veliké. Neboť řada v rovnici (*g*) jest pro $\alpha < 1$ divergentní, a řada (*f*) jest stejnoměrně konvergentní i pro $a < 1$ v každém konečném intervalu.

POZNÁMKA. Můžeme metodu tu vyloženou pro integrály, jichž jedna mez jest ∞, rozšířiti i na integrály v mezích konečných. Abych úvahu k tomu se vztahující co nejsrozumitelněji naznačil, budu uvažovati případ co nejjednodušší. Budiž dána řada nekonečná $u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) \ldots$, která jest konvergentní stejnoměrně v každém intervalu (a, b'), kde $a < b' < b$. Řada ta představuje tudíž svým součtem v intervalu $(a, b - 0)$ funkci, již označíme $s(x)$. Funkce tato může býti v $(a, b-0)$ i nekonečnou (právě v okolí bodu b), avšak integrál z $s(x)\,dx$ může existovati i pro celý interval (a, b).

Tento integrál existuje, příslušejí-li v (a, b) k funkcím $v_k(x)$ funkce primitivní, což budeme předpokládati, nejprve pro každý interval (a, b'); integrál pak pro (a, b), existuje-li, jest dán rovnicí

$$\int_a^b s(x) dx = \lim_{b'=b} \int_a^{b'} s(x)\, dx \tag{h}$$

(viz odst. 61, pozn. 2); limita na pravé straně a integrál na levé straně zároveň buď existují aneb neexistují. Na základě této rovnice můžeme vývody podané pro integrál v mezích b_0, ∞ opakovati téměř beze změny při rozhodování o otázce, zda limita (h) existuje a současně zda jest platna rovnost

$$\int_a^b s(x)\,dx = \int_a^b u_1(x)\,dx + \int_a^b u_2(x)\,dx + \int_a^b u_3(x)\,dx + \cdots \tag{k}$$

Nebudu se šířiti o podmínkách postačujících ke kladnému odpovědění na obě otázky, kteréž podmínky čtenář podle předcházející úvahy si odvodí.*) Uvedu toliko jednu jednoduchou podmínku

$$\int_a^{b_1} + \int_{b_1}^{b_2} + \int_{b_2}^{b_3} + \cdots, \quad \text{kde } a < b_1 < b_2 < b_3 < \ldots \text{ a } \lim_{n=\infty} b_n = b\,.$$

k tomu postačitelnou. Postačí na př. k ní, aby vedle podmínek svrchu zavedených a podmínek samozřejmých (týkajících se existence integrálů na pravé straně rovnice (k)) bylo splněno

$$u_k(x) \geqq 0 \text{ pro všecka } x \text{ v } (b-\varepsilon, b) \text{ a pro všecka } k > N\,. \tag{l}$$

Při tom si kladné číslo ε můžeme zvoliti tak malé, jak chceme a číslo N může býti libovolně veliké; znaménko pak $\geqq$ lze nahraditi v (l) znaménkem $\leqq$.

72. Výpočet určitých integrálů pomocí řad. V příkladech k výkladům předcházejícím byly naznačeny metody, jež jsou užitečny při výpočtu určitých integrálů a jež se opírají o integraci nekonečných řad. V následujícím poukáži ještě na užitek rozvoje Taylorova a na příkladě objasním pojem asymptotického rozvoje. Výpočtu eliptických integrálů pomocí řad bude pak věnován zvláštní oddíl této kapitoly.

Platí-li pro $f(x)$ rozvoj Taylorův

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots$$

konvergující, když x jest v intervalu (a, b), jest ihned

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a) f(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f'(a) + \frac{(b-a)^3}{3!} f''(a) + \cdots \tag{1}$$

Rozvoj, který dostáváme, jest, jak snadno nahlédnouti, rozvoj

*) Řada na pravé straně rovnice (11) nahradí se při tom řadou (vypisuji jenom značky integrální)

Taylorův pro funkci $\int_a^b f(x)\,dx$ (při proměnné b). Kdybychom užili rozvoje Taylorova

$$f(x)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{1!}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2!}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 f''\left(\frac{a+b}{2}\right)+\cdots,$$

dostali bychom (za předpokladu jeho konvergence v intervalu (a, b))

$$\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{2}{3!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 f''\left(\frac{a+b}{2}\right)+ \tag{2}$$

$$+\frac{2}{5!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(IV)}\left(\frac{a+b}{2}\right)+\cdots,$$

rozvoj to jevící symetrii vzhledem k mezím a zpravidla rychleji konvergující než (1). Tento rozvoj lze snadno odvoditi z rozvoje (1), rozložíme-li dříve interval integrační na dva intervaly

$$(\tfrac{1}{2}(a+b),\ a),\quad (\tfrac{1}{2}(a+b),\ b).$$

Nebylo by nesnadno v rozvojích (1) a (2) udati zbytky, což však tu opomíjím.

Často jest účelno, lze-li funkci za integračním znaménkem rozložiti v součin, toliko jeden činitel rozvinouti v řadu Taylorovu.

Příklad. Jest vypočísti log 2 daný integrálem

$$\log 2=\int_0^1 \frac{dx}{1+x}.$$

Užitím (1) dostáváme

$$\log 2=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots,$$

řadu známou zvolna konvergentní. Užijeme-li však (2), máme

$$\log 2=2\left[\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.3^3}+\frac{1}{5.3^5}+\cdots\right],$$

řadu rovněž známou rychleji konvergující. Kdybychom si interval integrační rozdělili a psali

$$\log 2=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{1+x}+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{dx}{1+x}$$

a na každý z obou integrálů použili formule (2), dostali bychom

$$\log 2=2\left[\frac{1}{1.5}+\frac{1}{3.5^3}+\frac{1}{5.5^5}+\cdots\right]+2\left[\frac{1}{1.7}+\frac{1}{3.7^3}+\cdots\right].$$

POZNÁMKA. Jest zajímavo, že jedna řada pro numerický výpočet integrálů ještě dříve byla uveřejněna než Taylorova. Jest to t. zv. řada *Bernoulliova**), která však vyplývá z (1) prostou záměnnou čísel a, b.

73. Výpočet $\int_0^a e^{-x^2}\,dx$. Integrál tento — který má velikou důležitost hlavně v počtu pravděpodobnosti — počítáme, *je-li kladné číslo a malé*, nejjednodušeji pomocí rozvoje e^{-x^2} v řadu potenční. Jest ihned

$$\int_0^a e^{-x^2}dx = a - \frac{a^3}{1!3} + \frac{a^5}{2!5} - \frac{a^7}{3!7} + \cdots$$

Rozvoj na pravé straně je sice konvergentní pro každé a a dává vždy hodnotu hledaného integrálu. Jestliže však jest a veliké, na př. při $a = 5$, konverguje pravá strana s počátku pomalu (členy s počátku rostou) a počet pomocí uvedeného rozvoje jest nepohodlný. Tu však lze použíti s prospěchem t. zv. **asymptotického rozvoje** daného integrálu. Abychom rozvoj tento provedli a tak získali příležitost k objasnění pojmu rozvoje asymptotického, užijeme na integrál z funkce e^{-x^2} v intervalu (a, ∞) opětovně integrace částečné. I máme

$$\int_a^\infty e^{-x^2}dx = \int_a^\infty 2xe^{-x^2}.\frac{1}{2x}\,dx = \frac{e^{-a^2}}{2a} - \tfrac{1}{2}\int_a^\infty e^{-x^2}\frac{dx}{x^2}, \tag{1}$$

$$= \frac{e^{-a^2}}{2a} - \frac{1.e^{-a^2}}{2^2a^3} + \frac{1.3}{2^2}\int_a^\infty e^{-x^2}\frac{dx}{x^4},$$

$$= \frac{e^{-a^2}}{2a} - \frac{1.e^{-a^2}}{2^2a^3} + \frac{1.3e^{-a^2}}{2^3a^5} - \frac{1.3.5}{2^3}\int_a^\infty e^{-x^2}\frac{dx}{x^6}$$

a obecně po λ krocích

$$\int_a^\infty e^{-x^2}dx = \frac{e^{-a^2}}{2a}\left[1 - \frac{1}{2a^2} + \frac{1.3}{(2a^2)^2} - \cdots + (-1)^{\lambda-1}\frac{1.3.5\ldots(2\lambda-3)}{(2a^2)^{\lambda-1}}\right] + r_\lambda, \tag{2}$$

kde

$$r_\lambda = (-1)^\lambda\frac{1.3.5\ldots(2\lambda-1)}{2^\lambda}\int_a^\infty e^{-x^2}\frac{dx}{x^{2\lambda}}.$$

Hodnotu výrazu r_λ můžeme odhadovati pomocí věty o střední

*) V „Acta Eruditorum" z roku 1694; Joh. Bernoulli, Opera I, 123—125. Řada Taylorova jest po prvé uvedena ve spise Taylorově „Methodus incrementorum directa et inversa" uveřejněném v r. 1715.

hodnotě. Jest ihned, uvážíme-li, že funkce za integračním znamením se nacházející jest menší než $e^{-x^2}/a^{2\lambda}$.

$$|r_\lambda| < \frac{1.3.5\ldots(2\lambda-1)}{2^\lambda a^{2\lambda}} \int_a^\infty e^{-x^2}\,dx.$$

Avšak podle (1) jest

$$\int_a^\infty e^{-x^2}\,dx < \frac{e^{-a^2}}{2a}$$

a tedy

$$|r_\lambda| < \frac{1.3.5\ldots(2\lambda-1)}{2^{\lambda+1} a^{2\lambda+1}} e^{-a^2}, \quad r_\lambda = (-1)^\lambda \frac{1.3\ldots(2\lambda-1)}{2a(2a^2)^\lambda} e^{-a^2}.\Theta,$$

při čemž $0 < \Theta < 1$. Tak jsme vedeni k tomuto výsledku: *Podržíme-li prvých λ členů řady*

$$\frac{e^{-a^2}}{2a}\left[1 - \frac{1}{(2a^2)} + \frac{1.3}{(2a^2)^2} - \frac{1.3.5}{(2a^2)^3} + \cdots\right], \tag{3}$$

dává nám příslušný výraz hodnotu integrálu $\int_a^\infty e^{-x^2}dx$ *s chybou menší co do absolutní hodnoty, než jest abs. hodnota členu $\lambda+1$-vého* (a ona chyba jest téhož znaménka, jako jest tento člen).

Označme součet prvých λ členů řady (3) značkou s_λ. Pak jest podle věty právě uvedené

$$0 < (-1)^\lambda \left(\int_a^\infty e^{-x^2}\,dx - s_\lambda\right) < \frac{1.3.5\ldots(2\lambda-1)}{2a.(2a^2)^\lambda} e^{-a^2}. \tag{4}$$

Z nerovniny této vyplývá, že rozdíl integrálu právě vyšetřovaného a s_λ konverguje k nule, když a roste nade všecky meze, ba ten rozdíl konverguje k nule s rostoucím a nade všecky meze, když jsme jej byli dříve znásobili funkcí $e^{a^2}.(2a^2)^\lambda$, jež s rostoucím a velmi rychle vzrůstá a to tím rychleji, čím větší jest λ. Rychlost pak této konvergence jest tím větší, čím větší jest λ.

Řadě té vlastnosti říká se **řada asymptotická** proměnné a (s ohledem k tomu, že součty s_λ jaksi asymptoticky s rostoucím a se blíží pravé hodnotě příslušné funkce a to tím rychleji, čím větší jest λ). Řady asymptotické (aspoň v tomto smyslu, v jakém zde byly zavedeny) mohou, avšak nemusí býti konvergentní. Pro nás zvláštní zájem pak mají řady asymptotické, jež jsou divergentní. Takovouto řadou asymptotickou divergentní jest právě řada (3). Avšak přes to, že (3) jest divergentní, můžeme, je-li a dosti veliké, jí často užíti jakožto vhodnou pomůcku pro výpočet integrálu v (1); neboť pravá strana nerovniny (4) může býti učiněna při vhodně voleném λ (a při a dosti velikém) velmi malá. Na př., je-li $a=5$, má člen 14. v řadě (3) hodnotu menší než $3 \,.\, 10^{-22}$ a můžeme tudíž pomocí (3) při $a=5$, $\lambda=13$ ustanoviti integrál $\int_a^\infty e^{-x^2} dx$ na 21 cifer. Mohli bychom však při $a=5$ přesnost ještě více zvětšiti, jelikož nejmenší člen jest tu 26.

Obdobné úvahy platny jsou pro řady asymptotické obecně. Podávají nám důležitý příklad řad divergentních poskytujících, ačkoliv jsou divergentní, užitek pro numerické výpočty.

Cvičení.

1. Dokažte rozvoje v $(0 < r < 1)$

α) $$\frac{\cos\varphi \mp r}{1 \mp 2r\cos\varphi + r^2} = \cos\varphi \pm r\cos 2\varphi + r^2\cos 3\varphi \pm r^3\cos 4\varphi + \cdots,$$

β) $$\frac{\sin\varphi}{1 \mp 2r\cos\varphi\, r^2 +} = \sin\varphi \pm r\sin 2\varphi + r^2\sin 3\varphi \pm r^3\sin 4\varphi + \cdots,$$

γ) $$\frac{\cos(\varphi+\alpha) \mp r\cos\alpha}{1 \mp 2r\cos\varphi + r^2} = \cos(\varphi+\alpha) \pm r\cos(2\varphi+\alpha) + r^2\cos(3\varphi+\alpha) \pm \cdots,$$

δ) $$\frac{\sin(\varphi+\alpha) \mp r\sin\alpha}{1 \mp 2r\cos\varphi + r^2} = \sin(\varphi+\alpha) \pm r\sin(2\varphi+\alpha) + r^2\sin(3\varphi+\alpha) \pm \cdots,$$

ε) $$\frac{1}{2}\,\frac{1-r^2}{1 \mp 2r\cos\varphi + r^2} = \tfrac{1}{2} \pm r\cos\varphi + r^2\cos 2\varphi \pm r^3\cos 3\varphi + \cdots,$$

ι) $$\tfrac{1}{2}\log(1 \pm 2r\cos\varphi + r^2) = \pm\frac{r\cos\varphi}{1} - \frac{r^2\cos 2\varphi}{2} \pm \frac{r^3\cos 3\varphi}{3} - \cdots,$$

$\varkappa$) $$\operatorname{arc\,tg}\frac{r\sin\varphi}{1+r\cos\varphi} = \frac{r\sin\varphi}{1} - \frac{r^2\sin 2\varphi}{2} + \frac{r^3\sin 3\varphi}{3} - \cdots,$$

λ) $$\operatorname{arc\,tg}\frac{r\sin\varphi}{1-r\cos\varphi} = \frac{r\sin\varphi}{1} + \frac{r^2\sin 2\varphi}{2} + \frac{r^3\sin 3\varphi}{3} + \cdots,$$

μ) $$\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} = \frac{\sin\varphi}{1} + \frac{\sin 2\varphi}{2} + \frac{\sin 3\varphi}{3} + \cdots, \qquad 0 < \varphi < 2\pi,$$

ν) $$\frac{\varphi}{2} = \frac{\sin\varphi}{1} - \frac{\sin 2\varphi}{2} + \frac{\sin 3\varphi}{3} - \cdots, \qquad -\pi < \varphi < \pi.$$

Návod. Označíme-li, berouce na př. znaménko horní, pravé strany rovnic α), β), krátce X, Y, máme snadným počtem pro X, Y tyto rovnice

$$X\cos\varphi + Y\sin\varphi = 1 + rX, \qquad -X\sin\varphi + Y\cos\varphi = rY,$$

Z těchto dvou rovnic se X, Y snadno vypočtou. Stejně se vypočtou pravé strany při dolním znaménku a rovněž týmž způsobem odvodí se rovnice γ), δ). Rovnice ι), $\varkappa$), λ) odvodí se integrací z α), β). Rovnice μ), ν) vyplývají konečně jako důsledek věty Abelovy (DP, 148) z $\varkappa$) a λ). Jiné odvození z těchto rovnic viz ve cvičení za odst. 18*m* příklady 15, 16.

Vyšetřte stejnoměrnost konvergence se zřetelem k proměnné φ u jednotlivých řad. (K vyšetření tomu při posledních dvou řadách jest účelno dříve řady ty znásobiti první $\sin \frac{1}{2}\varphi$, druhou $\cos \frac{1}{2}\varphi$ a potom součiny upraviti.)

2. Odvoďte na základě rozvojů př. 1 integrály

$$\alpha)\ \int_0^\pi \log(1 + 2r\cos\varphi + r^2)\,d\varphi = 0, \qquad -1 < r < 1; \quad \text{(integrací rozvoje } 1\iota)$$
$$= 2\pi \log |r|, \qquad |r| > 1,$$

(z předcházející rovnice, viz cvič. za odst. 68, př. 10).

$$\beta)\ \int_0^\pi \frac{\varphi \sin\varphi\, d\varphi}{1 - 2r\cos\varphi + r^2} = \frac{\pi}{r}\log(1 + r), \qquad -1 < r < 1,$$
$$= \frac{\pi}{r}\log\left(1 + \frac{1}{r}\right), \qquad |r| > 1.$$

Zda lze psáti v důsledku právě napsaných výsledků (klademe-li v nich $r = 1$).

$$\int_0^\pi \varphi \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\varphi\, d\varphi = 2\pi \log 2\,?$$

Návod. Rovnici β) dostaneme, znásobíme-li každý člen pravé strany rovnice 1ν) pravou stranou rovnice 1β) a integrujeme součiny tak vzniklé jeden po druhém a sečteme. (Viz př. 5a ze cvičení za odst. 68.)

$$\gamma)\ \int_0^\pi \log(1 + 2r\cos\varphi + r^2)\,.\,\log(1 + 2s\cos\varphi + s^2)\,d\varphi =$$
$$= 2\pi\,\psi(r\,.\,s), \qquad \text{je-li } |r| < 1,\ |s| < 1;$$
$$= 2\pi\,\psi\left(\frac{r}{s}\right), \qquad \text{je-li } |r| < 1,\ |s| > 1;$$
$$= \pi \log r^2\,.\,\log s^2 + 2\pi\,\psi\left(\frac{1}{r\,.\,s}\right), \qquad \text{je-li } |r| > 1,\ |s| > 1.$$

Při tom jest $\psi(x)$ funkce Abelova, definovaná řadou $\frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \cdots$ (odst. 52). Odvodí se obdobě jako vztah β). Obdobné poznámky platny jsou i pro následující příklady:

$$\delta)\ \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log\sin x\, dx = -\frac{\pi}{2}\log 2, \qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\log\sin x)^2\, dx = \frac{\pi^3}{24} + \frac{\pi}{2}(\log 2)^2.$$

$$\int_0^\pi \operatorname{arctg}(a\sin\varphi)\operatorname{arctg}(b\sin\varphi)\,d\varphi = 2\pi\left[\psi(r\,.\,s) - \tfrac{1}{4}\,\psi(r^2\,.\,s^2)\right],$$

kde $\quad r = \dfrac{-1 + \sqrt{1 + a^2}}{a}, \qquad s = \dfrac{-1 + \sqrt{1 + b^2}}{b}.$

Návod. Rozvoj potřebný pro $\operatorname{arc\,tg}(a\sin\varphi)$ dostaneme, sčítáme-li rovnice $\varkappa$) a λ).

$$\iota)\ \int_0^\pi \sin\varphi \operatorname{arc\,tg}(a\sin\varphi)\,d\varphi = \pi\,\frac{-1 + \sqrt{1 + a^2}}{a}.$$

Návod. Plyne z ε), dělíme-li b a necháme-li b konvergovati k nule; lze však také získati pomocí integrace řad přímo.

$$\left.\begin{aligned} \varkappa) \int_0^{\pi}\frac{\log(1+2r\cos\varphi+r^2)}{1+2s\cos\varphi+s^2}\,d\varphi &= \frac{2\pi}{1-s^2}\,.\log(1-rs),\\ \int_0^{\pi}\frac{\log(1+2r\cos(\varphi+\alpha)+r^2)}{1+2s\cos(\varphi+\beta)+s^2}\,d\varphi &= \frac{\pi}{1-s^2}\log(1-2rs\cos(\alpha-\beta)+r^2s^2)\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}|r|&<1,\\ |s|&<1.\end{aligned}$$

Na základě výsledku posledně uvedeného lze odvoditi snadno hodnotu integrálu

$$\int_0^{\pi}\frac{\log(A+B\cos\varphi+C\sin\varphi)\,d\varphi}{a+b\cos\varphi+c\sin\varphi},$$

pokud tento integrál má význam.

3. Dokažte vztah

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-2ax+a^2}\,\sqrt{1-2bx+b^2}}=\frac{1}{\sqrt{ab}}\log\frac{1+\sqrt{ab}}{1-\sqrt{ab}}.$$

4. Předpokládáme-li rozvoj

$$\frac{1}{\sqrt{1-2ax+x^2}}=1+aP_1(x)+a^2P_2(x)+\ldots, \qquad (\times)$$

kde $P_k(x)$ jest polynom k-tého stupně v x (tak zv. **polynom Legendrův**, viz DP 162, př. 1, kde však užito k označení písmena X místo P), následují z příkladu předchozího pro polynomy ty vztahy

$$\int_{-1}^{1}P_m(x)\,P_n(x)\,dx=0,\qquad \int_{-1}^{1}P_n^2(x)\,dx=\frac{2}{2n+1},\qquad m\neq n.$$

5. Jako z př. 3 následuje, že integrál tam se nacházející jest funkcí součinu a, b, tak lze totéž obecněji dokázati o integrálu

$$\varphi(a,b)=\int_{-1}^{1}\frac{(1-x^2)^{\frac{s-1}{2}}\,dx}{(1-2ax+a^2)^{\frac12 s}(1-2bx+b^2)^{\frac12 s}}.$$

Návod. K důkazu postačí (DP, 225) dokázati, že funkcionální determinant funkce $\varphi(a,b)$ a součinu $a.b$ jest rovný nule, t. j. že

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\varphi}{\partial a}, & \dfrac{\partial\varphi}{\partial b}\\ b, & a\end{vmatrix}=0 \qquad \text{aneb} \qquad a\frac{\partial\varphi}{\partial a}-b\frac{\partial\varphi}{\partial b}=0.$$

Vykonáme-li naznačené derivace za integračním znaménkem, dostane poslední rovnice tvar (po krácení rozdílem $(a-b)$)

$$\int_{-1}^{1}\frac{[a+b)-(1+ab)x](1-x^2)^{\frac{s-1}{2}}\,dx}{(1-2ax+a^2)^{\frac{s+2}{2}}(1-2bx+b^2)^{\frac{s+2}{2}}}=0. \qquad (+)$$

Integrál transformovati možno lineární substitucí převádějící x v y a jež přiřaďuje bodům

$$\frac{a+b}{1+ab}, \quad -1, \quad 1 \quad \text{po řadě body} \quad 0, \quad -1, \quad 1;$$

tato substituce jest

$$x = \frac{(1+ab)y + (a+b)}{(a+b)y + (1+ab)}, \qquad y = \frac{(1+ab)x - (a+b)}{-(a+b)x + (1+ab)}.$$

Provedeme-li naznačenou substituci, mění se integrál v (+) na integrál tvaru

$$\int_{-1}^{1} \frac{y(1-y^2)^{\frac{s-1}{2}}}{(Ay^2+B)^{\frac{s+2}{2}}}\, dy$$

a ten jest vskutku roven nule (pozn. 1, odst. 68).

6. Integrál $\varphi(a, b)$ příkladu předch. jest rovný integrálu

$$\varphi(a, b) = \Psi_s(a\,.\,b) = \frac{1}{(1-ab)^{s-1}} \int_0^{\pi} \frac{\sin^s\varphi\, d\varphi}{1 + 2\sqrt{ab}\cos\varphi + ab}.$$

Návod. V důsledku předch. příkl. lze nahraditi a, b dvěma čísly majícími týž součin. Klademe za a i za b výraz $\sqrt{ab}$ a v integrálu tak vzniklém použijeme př. 7, odst. 8.

7. Dokažte, že mezi Ψ_s (viz př. předch.) jest tento vztah

$$\Psi_{s-2} + 4ab\,\Psi_s = \frac{1+ab}{(1-ab)^{s-1}} \int_0^{\pi} \sin^{s-2}\varphi\, d\varphi.$$

8. Definujeme-li mnohočleny $V_n^{(s)}(x)$ pomocí vytvořující funkce rovnicí

$$(1 - 2ax + a^2)^{-\frac{1}{2}s} = \sum a^n V_n^{(s)}(x), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

pak pro tyto polynomy jsou platny vztahy

$$\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{\frac{s-1}{2}} V_m^{(s)}(x)\, V_n^{(s)}(x)\, dx = 0. \qquad m \neq n$$

(Následuje z příkladu 5.)

9. Dokažte, že

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{(a+b)x - \frac{1}{2}(a^2+b^2+x^2)}\, dx = e^{ab} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx.$$

Návod. Nejprve se dokáže, že integrál na levé straně jest funkcí součinu $a\,.\,b$ (viz př. 5). Pak se položí v integrálu tom $b = -a$ a a^2 se nahradí (v důsledku dokázaného) součinem $-ab$.

10. Definujeme-li polynom $H_n(x)$ pomocí vytvořující funkce rovnicí

$$e^{ax - \frac{1}{2}a^2} = \sum a^n H_n(x), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

(Hermiteovy polynomy), pak v důsledku výsledku příkladu předch. jsou platny relace

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} H_m(x)\, H_n(x)\, dx = 0, \qquad m \neq n$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} H^2_n(x)\, dx = \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx.$$

11. Pro polynomy Legendrovy (definované rovnicí (X) příkl. 4) jsou platny vztahy (ϑ v nich jest uvnitř intervalu $(0, \pi)$)

$$\frac{\pi}{2} P_n(\cos\vartheta) = \int_0^{\vartheta} \frac{\cos(n+\frac{1}{2})\varphi \,.\, d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\vartheta)}} = \int_{\vartheta}^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\varphi \,.\, d\varphi}{\sqrt{2(\cos\vartheta - \cos\varphi)}}.$$

Návod. První ze vztahů by vyplynul ihned z rovnice

$$\int_0^{\vartheta} [\cos\tfrac{1}{2}\varphi + r\cos\tfrac{3}{2}\varphi + r^2\cos\tfrac{5}{2}\varphi + \cdots + r^n\cos(n+\tfrac{1}{2})\varphi + \cdots] \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\vartheta)}} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - 2r\cos\vartheta + r^2}}$$

(v důsledku definice Legendr. pol. a věty o integraci nekon. řady). Avšak nekonečná řada na levé straně v hranaté závorce má podle př. 1 γ součet $(1-r)\cos\frac{1}{2}\varphi/(1-2r\cos\varphi+r^2)$; integrál pak

$$(1-r)\int_0^{\vartheta} \frac{\cos\frac{1}{2}\varphi \,.\, d\varphi}{(1-2r\cos\varphi + r^2)\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\vartheta)}}$$

vypočteme ihned, provedeme-li substituci

$$\sin\tfrac{1}{2}\varphi = x, \qquad \cos\varphi = 1 - 2x^2, \qquad \cos\vartheta = 1 - 2a^2,$$

kde $a = \sin\frac{1}{2}\vartheta$, a použijeme-li předposledního vztahu v příkladu 5 za cvičení k odst. 68. Integrál substitucí vzniklý totiž jest

$$(1-r)\int_0^{a} \frac{dx}{[(1-r)^2 + 4rx^2]\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Obdobně vyplyne i druhý vztah, který ostatně jest také jednoduchým důsledkem prvého a okolnosti, že $P_n(x)$ jest lichá funkce prom. x podle toho, zda n jest liché či sudé.

3. VÝPOČET INTEGRÁLŮ ELIPTICKÝCH.

74. Výpočet eliptického integrálu prvního druhu v Legendrově normálním tvaru řadou nekonečnou. Tu běží o výpočet integrálu

$$F(k, \Phi) = \int_0^{\Phi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} \qquad 0 < k^2 < 1.$$

Avšak podle věty binomické jest (při každém φ)

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} = 1 + \frac{1}{2}k^2\sin^2\varphi + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}k^4\sin^4\varphi + \cdots$$

$$+ \frac{1\,.\,3\ldots\ldots(2n-1)}{2\,.\,4\ldots\ldots 2n} k^{2n}\sin^{2n}\varphi + \cdots,$$

což jest řada stejnoměrně konvergentní v každém intervalu pro φ, takže po dosazení a integraci jest ihned

$$F(k, \Phi) = \Phi + \frac{1}{2} I_2 k^2 + \frac{1.3}{2.4} I_4 k^4 + \dots + \frac{1.3\dots(2n-1)}{2.4\dots 2n} I_{2n} k^{2n} + \dots \quad (1)$$

při čemž

$$I_{2n} = \int_0^{\Phi} \sin^{2n} \varphi \, d\varphi,$$

integrál to, který dovedeme pomocí redukčních formulí vypočítati (odst. 50, př. 5 rovn. (!)). Jest

$$I_{2n} = c_n \Phi - c_n \cos \Phi \, . \sin \Phi \, . \, g_n (\sin^2 \Phi),$$

při čemž

$$c_n = \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots 2n}, \qquad c_0 = 1$$

$$g_n(\xi) = 1 + \frac{2}{3} \xi + \frac{2.4}{3.5} \xi^2 + \dots + \frac{2.4\dots(2n-2)}{3.5\dots(2n-1)} \xi^{n-1},$$

takže

$$F(k, \Phi) = \mathfrak{K} . \Phi - \sin \Phi \cos \Phi \, . \sum_1^{\infty} c_n^2 k^{2n} g_n (\sin^2 \Phi),$$

kde

$$\mathfrak{K} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 k^{2n}. \quad (1')$$

Tím jest výpočet eliptického integrálu v normálním tvaru proveden. Řady získané konvergují poněkud rychleji než řada geometrická s kvocientem k;*) tedy, je-li k, modul to eliptického integrálu, malé, dosti dobře.

Nejdůležitější případ integrálu vypočteného nastává pro $\Phi = \frac{1}{2}\pi$, máme tak, tak zvaný **úplný (kompletní) eliptický integrál** (vlastně polovici úplného eliptického integrálu), který značíme K. V tomto případě máme

$$K = F(k, \tfrac{1}{2}\pi) = \tfrac{1}{2}\pi \, \mathfrak{K} = \tfrac{1}{2}\pi \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 k^6 + \dots \right) \quad (2)$$

75. Jestliže modul k jest blízký 1 a tedy řady předcházejícího odst. málo konvergentní, rozvineme funkci v Legendrově normálním tvaru podle mocnin *komplementárního* modulu, t. j. podle mocnin $k' = \sqrt{1-k^2}$, při čemž $k' \geq 0$. Píšeme

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = (\cos^2 \varphi + k'^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\cos \varphi} \left[1 - \frac{1}{2} k'^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + \frac{1.3}{2.4} k'^4 \operatorname{tg}^4 \varphi - \dots \right].$$

Řada v závorce jest stejnoměrně konvergentní vzhledem ku φ v intervalu $(0, \varphi_0)$, kde φ_0 jest úhel v prvním kvadrantu $(0 < \varphi_0 < \frac{1}{2}\pi)$

*) Rychlost konvergence rozvoje (1) závisí vedle toho ještě na Φ; při $0 < \Phi < \frac{1}{2}\pi$ jest $0 < I_{2n} < \sin^{2n} \Phi$.

takový, že $k' \operatorname{tg} \varphi_0 < 1$. Je-li tedy Φ v prvním kvadrantu a takové, že

$$k' \operatorname{tg} \Phi < 1, \tag{3}$$

máme integrací

$$F(k, \Phi) = J_0 - \tfrac{1}{2} J_2 k'^2 + \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4} J_4 k'^4 - \cdots, \tag{4}$$

kde

$$J_{2n} = \int_0^{\Phi} \sin^{2n} \varphi \cos^{-2n-1} \varphi \, d\varphi.$$

Jest nejprve (odst. 8, př. 3)

$$J_0 = \int_0^{\Phi} \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \log \operatorname{cotg} (\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\Phi) = \log \operatorname{tg} (\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\Phi);$$

pro ostatní J_{2n} pak jest (odst. 50, př. 5, rovn. (!!))

$$J_{2n} = (-1)^n c_n J_0 + (-1)^{n+1} c_n \frac{\operatorname{tg} \Phi}{\cos \Phi} g_n (-\operatorname{tg}^2 \Phi),$$

kde c_n, $g_n(\xi)$ mají týž význam jako v odst. předcházejícím. Jest tedy

$$F(k, \Phi) = \mathfrak{K}' \log \operatorname{tg} (\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\Phi) - \frac{\operatorname{tg} \Phi}{\cos \Phi} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 k'^{2n} g_n (-\operatorname{tg}^2 \Phi), \tag{4'}$$

při čemž zavedeno

$$\mathfrak{K}' = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 k'^{2n}.$$

Tím získány řady rychle konvergující, je-li komplementární modul eliptického integrálu dosti malý.

Užití tohoto rozvoje jest značně omezeno podmínkou (3); zejména nelze tak počítati integrály úplné 1. dr. V tomto případě a pak v těch, ve kterých není splněna nerovnina (3), můžeme si vypomoci úvahou následující.

Zaveďme do integrálu $F(k, \Phi)$ na místo integrační proměnné φ proměnnou φ' na základě vztahu

$$\operatorname{tg} \varphi \,.\, \operatorname{tg} \varphi' = \frac{1}{k'}, \quad \text{(viz odst. 40, transform. VIII.);}$$

dostaneme snadným počtem vztah

$$\int_0^{\Phi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \int_{\Phi'}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi'}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi'}},$$

kterýžto můžeme psáti na základě symbolu $F(k, \Phi)$ ve tvaru

$$F(k, \Phi) = F(k, \tfrac{1}{2}\pi) - F(k, \Phi'). \tag{5}$$

Při tom jest

$$\operatorname{tg} \Phi \,.\, \operatorname{tg} \Phi' = \frac{1}{k'} \tag{6}$$

a je-li Φ v prvním kvadrantu, jest i Φ' v prvním kvadrantu.

Pro ten případ, že $\Phi = \Phi'$, jest $\Phi = \Phi_0$, kde

$$\operatorname{tg}^2 \Phi_0 = \frac{1}{k'},$$

a z (5)

$$K = F(k, \tfrac{1}{2}\pi) = 2F(k, \Phi_0). \tag{7}$$

na základě kteréž rovnice vypočísti můžeme vždy i pomocí řady (4) (kladouce $\Phi = \Phi_0$) integrál úplný. Řada ta jest rychleji konvergentní než geometrická o kvocientu k'. Pro ostatní amplitudy lze vždy předpokládati se zřetelem ku (5) a (6) — známe-li ovšem při dotyčném k integrál úplný —

$$\operatorname{tg} \Phi < \frac{1}{\sqrt{k'}}.$$

Pro integrál úplný jest užití řady (4), užíváme-li prostřednictví amplitudy Φ_0, výhodnější než užití řady (2) jenom tehdy, je-li

$$k^2 > \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0{\cdot}618\ldots,$$

jak čtenář snadno odůvodní.

76. Odvodíme si na základě předcházejícího pro úplný integrál 1. druhu výraz, který *asymptoticky vyjadřuje jeho hodnotu pro ten případ, že k se blíží.* 1. Pro $k = 1$ nemá integrál 1. dr. vůbec význam a jest integrál funkcí k, jež jest nekonečná, když k jest v intervalu (0, 1). Bude tedy hledaný asymptotický výraz rovněž vzrůstati nade všecky meze pro lim $k = 1$. Užijeme k uvedenému účelu formule (7) a rozvoje (4'), ve kterém klademe $\Phi = \Phi_0$ (kde $\operatorname{tg}^2 \Phi_0 = 1/k'$), a počítáme jednotlivé členy násobené dvěma. Nejprve jest

$$2 \log \operatorname{tg}(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\Phi_0) = 2 \log [2 \operatorname{tg} \Phi_0 (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 \Phi_0})]$$
$$= \log \frac{4}{k'} + 2 \log (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{1 + k'}).$$

Poslední člen však blíží se k nule, když k se blíží k jedné (a k' tedy k nule); jest rozvinutelný v řadu mocninnou tvaru*)

$$2 \log (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{1 + k'}) = \tfrac{1}{2} k' + b_2 k'^2 + b_3 k'^3 + \cdots$$

Dále jest

$$\frac{\operatorname{tg} \Phi_0}{\cos \Phi_0} = \frac{\sqrt{1 + k'}}{k'} = \frac{1}{k'} + b'_0 + b'_1 k' + b'_2 k'^2 + \cdots$$

a

$$\Sigma c_n^2 k'^{2n} g_n (-k'^{-1}) = k'^2 (\tfrac{1}{4} + b''_1 k + b''_2 k^2 + \cdots),$$

kde b_i, b'_i, b''_i jsou numeričtí součinitelé. Při tom jsou poloměry

---

*) Neboť derivace té funkce jest $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+k'}}\right)\frac{1}{k'}$.

konvergenční příslušných potenčních řad čísla $\geqq 1$, jak čtenář snadno dokáže.**)

Dosadivše uvedené rozvoje do (7), obdržíme

$$K = \mathfrak{K}' . \log \frac{4}{k'} + k'^2 P(k'), \tag{8}$$

kde $P(k')$ potenční řada argumentu k s poloměrem konvergence $\geqq 1$. Jelikož i $\mathfrak{K}'$ jest potenční řada proměnné k' o polom. konv. $= 1$, vidíme z toho, že

$$K = \log \frac{4}{k'} + \eta(k'), \tag{9}$$

kde $\lim \eta(k') = 0$ *pro ten případ, že* $\lim k' = 0$ (a tudíž $\lim k = 1$), Lze dokonce tvrditi, že

$$\lim_{k'=0} \eta(k')\, k'^{-\alpha} = 0,$$

při čemž α jest libovolné číslo kladné menší než 2.
Rovnici (8) a (9) později ještě k dalším vývodům použijeme.

77. Výpočet eliptických integrálů 2. druhu řadami. Obdobné rozvoje lze odvoditi též pro eliptické integrály druhého druhu

$$E(k, \Phi) = \int_0^{\Phi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi.$$

Podle binomické věty jest

$$\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} = 1 - \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \varphi - \frac{1 . 1}{2 . 4} k^4 \sin^4 \varphi - \frac{1 . 1 . 3}{2 . 4 . 6} k^6 \sin^6 \varphi - \ldots .$$

a tedy s označením užitým v (1)

$$E(k, \Phi) = \Phi - \frac{1}{2} I_2 k^2 - \frac{1 . 1}{2 . 4} I_4 k^4 - \ldots . - \frac{1 . 1 . 3 \ldots . (2n-3)}{2 . 4 . 6 \ldots . 2n} I_{2n} k^{2n} - \ldots .$$

Pro *integrál úplný* máme (obdobně ku (2))

$$E(k, \tfrac{1}{2}\pi) = \tfrac{1}{2}\pi \left[1 - \frac{1}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1 . 3}{2 . 4}\right)^2 k^4 - \frac{1}{5}\left(\frac{1 . 3 . 5}{2 . 4 . 6}\right)^2 k^6 - \ldots . \right] = \tfrac{1}{2}\pi \mathfrak{E}.$$

Výraz pro $E(k, \Phi)$ lze obdobně upraviti jako rozvoj pro $F(k, \Phi)$ a rovněž lze odvoditi rozvoje postupující podle mocností komplementárního modulu k'.

Mnohem jednodušeji výsledky tyto získáme z výsledků známých pro integrál eliptický prvního druhu pomocí metody derivace podle parametru (odst. 9). Této metody můžeme beze všeho omezení používati, neboť funkce za integračním znaménkem u in-

---

**) Při posledním rozvoji stačí na př. sestrojiti majorantní funkci k té řadě tím, že místo $c_n{}^2$ a koeficientů numerických $g_n(\xi)$ dosadíme 1 a všecky členy bereme se znaménkem kladným.

tegrálů eliptických 1. a 2. druhu mají derivace všech řádů podle proměnných k, φ a jsou tyto derivace spojité funkce obou proměnných k, φ v každém intervalu integračním, je-li jenom k omezeno na interval položený uvnitř v intervalu $(-1, 1)$, Snadným počtem dostáváme

$$\frac{d(E(k, \Phi) \,.\, k^{-1})}{dk} = -\frac{F(k, \Phi)}{k^2}, \qquad (\alpha)$$

$$\frac{d(k \,.\, F(k, \Phi))}{dk} = \frac{E(k, \Phi)}{k'^2} - \frac{k^2 \sin \Phi \cos \Phi}{k'^2 \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \Phi}}. \qquad (\beta)$$

Z první rovnice a z (1') máme na př. (rovnici (1') násobíme $-1/k^2$, integrujeme podle k a potom násobíme k)

$$E(k, \Phi) = \mathfrak{E}\, \Phi + \sin \Phi \cos \Phi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n{}^2}{2n-1} k^{2n} g_n (\sin^2 \Phi).$$

Konstanta integrační, položena ihned rovna nule, neboť obě strany jsou rovny nule pro $\Phi = 0$. Z druhé rovnice bychom snadno získali na základě (4') rozvoj $E(k, \Phi)$ podle mocnin k'.

78. Vyjádření úplných integrálů řadami. Integrály úplné prvého i druhého druhu v normálním tvaru Legendrově dají se všechny vyjádřiti pomocí těchto čtyř integrálů

$$K = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad K' = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}}, \quad E = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi,$$

$$E' = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi$$

K, E vyjádřili jsme již jako mocninné řady modulu k; K', E' jsou tytéž mocninné řady modulu k', Zbývá jenom vyjádřiti K, E jakožto mocninné řady postupující podle mocnin komplementárního modulu k' anebo což je totéž K', E' jako mocninné řady postupující podle mocnin k. Z rovnice (8) následuje pro K' (zaměníme-li v ní k, K' za k', K) rozvoj tvaru

$$K' = \mathfrak{K} \log 4/k + k^2 P(k). \qquad (8')$$

$\mathfrak{K}$ jest známá nám mocninná řada argumentu k, při mocninné řadě $k^2 P(k)$ jsou však koeficienty nám neznámy. Víme toliko, že její konverg. poloměr jest $\geqq 1$. Koeficienty stanovíme pomocí rovnice diferenciálné, jíž hoví K' jakožto funkce proměnné k (obdobně jako v DP odst. 156). Z (α), (β) předch. odst. násl. nejprve, klademe-li tam $\Phi = \frac{1}{2}\pi$

$$\frac{d(Ek^{-1})}{dk} = -\frac{K}{k^2}, \quad \frac{d(kK)}{dk} = \frac{E}{k'^2} \text{ a tedy též } \frac{d(E'k'^{-1})}{dk'} = -\frac{K'}{k'^2}, \quad \frac{d(k'K')}{dk'} = \frac{E'}{k^2}.$$

V rovnicích posledních derivování podle k' můžeme nahraditi derivováním podle k podle vztahů

$$dk = -\frac{k'}{k}\,dk' \quad \text{a tedy} \quad \frac{d\varphi(k)}{dk'} = \frac{d\varphi}{dk}\cdot\frac{dk}{dk'} = -\frac{d\varphi}{dk}\cdot\frac{k'}{k},$$

takže jest

$$\frac{d(E'k'^{-1})}{dk} = \frac{kK'}{k'^3}, \quad \frac{d(k'K')}{dk} = -\frac{E'}{kk'}.$$

Z rovnic těchto následuje

$$\frac{d}{dk}\left[k\frac{d(k'K')}{dk}\right] = -\frac{kK'}{k'^3} \quad \text{aneb} \quad k(1-k^2)\frac{d^2K'}{dk^2} + (1-3k^2)\frac{dK'}{dk} - kK' = 0. \qquad (\gamma)$$

Kdybychom byli počítali rovnici diferenciální pro K' při neodvisle proměnné k', byli bychom dostali rovnici téhož tvaru, totiž

$$k'(1-k'^2)\frac{d^2K'}{dk'^2} + (1-3k'^2)\frac{dK'}{dk'} - k'K' = 0, \qquad (\gamma')$$

odkudž jest patrno, že rovnici (γ') splňuje identicky mocninná řada $\mathfrak{K}'$ a tudíž rovnici (γ) řada $\mathfrak{K}$ a dosadíme-li tedy do (γ) za K' podle (δ'), výraz s $\log 4/k$ jakožto činitelem po dosazení vypadne a nemusíme míti k němu zřetel. Proveďme to dosazení, značíce koeficienty rozvoje $k^2P(k)$ značkou a_i (takže a_i jest součinitel při k^i), a ,očítejme součinitel při k^i na levé straně. Dostaneme pro ten oučinitel výraz

$$(i+1)\,i\,a_{i+1} - (i-1)(i-2)\,a_{i-1} + (i+1)\,a_{i+1} - 3(i-1)\,a_{i-1} - a_{i-1} + b_i, \qquad (\delta)$$

kde b_i jest součinitel ve výrazu $-2(1-k^2)\dfrac{d\mathfrak{K}}{\partial k} + 2k\mathfrak{K}$. Koeficient tak nalezený musí býti rovný nule pro všechna celistvá i. Jelikož, jak z rozvoje pro $\mathfrak{K}$ patrno, $b_i = 0$, je-li i sudé (a indexy při a v koeficientu nalezeném — t. j. čísla $i+1$, $i-1$ — jsou oba stejné parity) jest patrno, že všechna a_i, kde i jest číslo liché, vymizejí; postačí tudíž v (δ) uvažovati jenom i lichá, i klademe $i = 2j+1$. Dostaneme pak se zřetelem k tomu, že rozvoj pro $\mathfrak{K}$ jest nám znám (odst. 74), tuto rovnici

$$(2j+2)^2 a_{2j+2} - (2j+1)^2 a_{2j} = 2(2j+2)c_{j+1}^2 - 2(2j+1)c_j^2.$$

Klademe-li ještě, abychom rovnici tuto co nejvíce zjednodušili $a_{2j} = \alpha_j c_j^2$, a používáme-li výrazu pro c_j^2 (odst. 74), změní se rovnice tato v

$$\alpha_{j+1} - \alpha_j = -\frac{2}{(2j+1)(2j+2)},$$

ze které postupně vypočteme (dosazujíce $j = 0, 1, 2, 3, \ldots, \alpha_0 = 0$) všechna α_j. Jest

$$\alpha_j = -2\left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \ldots + \frac{1}{(2j-1)\,2j}\right).$$

Máme tak rozvoj pro K'

$$K' = \mathfrak{K} \log \frac{4}{k} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} c_n^2 \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)2n}\right) k^{2n} \tag{ε}$$

a tedy záměnou k' za k

$$K = \mathfrak{K}' \log \frac{4}{k'} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} c_n^2 \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)2n}\right) k'^{2n}, \tag{ε'}$$

k nimž se druží ovšem jednodušší rozvoje

$$K = \tfrac{1}{2}\pi \mathfrak{K}, \quad K' = \tfrac{1}{2}\pi \mathfrak{K}', \tag{ι}$$

takže pro oba kompletní integrály máme vždy dva rozvoje, jeden z nich používá mocninných řad veličiny k, druhý veličiny k'.

79. Abychom získali rozvoje pro kompletní integrály druhého druhu, napíšeme si nejprve příslušné diferenciální rovnice (při neodvisle proměnné k). Ty jsou celkem 4 a dostáváme je, provedeme-li v předch. odstavci naznačené operace derivační, v tomto tvaru

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dk} &= \frac{E-K}{k}, & \frac{dE'}{dk} &= \frac{(K'-E')\,k}{k'^2}; \\ \frac{dK}{dk} &= \frac{E-k'^2 K}{kk'^2}, & \frac{dK'}{dk} &= \frac{k^2K'-E'}{kk'^2}. \end{aligned} \tag{$\varkappa$}$$

Tvar rovnic nás vede nejprve k tomu, abychom místo E, E' počítali výrazy $I = E - k'^2K$, $I' = -E' + k^2K'$. Výrazy I, I' ve tvaru integrálním jsou dány výrazy

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{k^2 \cos^2\varphi \, d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \qquad I' = -\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{k'^2 \cos^2\varphi \, d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}}.$$

Rovnice diferenciální svrchu uvedené se zjednoduší pro tyto výrazy ihned v rovnice

$$\frac{dI}{dk} = +kK, \quad \frac{dI'}{dk} = +kK', \quad \frac{dK}{dk} = \frac{I}{kk'^2}, \quad \frac{dK'}{dk} = \frac{I'}{kk'^2}, \tag{$\varkappa'$}$$

na jichž základě podáme snadno žádané vyjádření integrálů I, I' pomocí mocninných řad. Nejprve však vyšetříme hodnoty I, I' pro $k=0$. Jelikož pro $k=0$ E a E' se redukují na $\frac{1}{2}\pi$ a 1, dále k'^2K a k^2K' mají pro $k=0$ hodnoty $\frac{1}{2}\pi$ a 0 (druhý pro lim $k=0$), jest patrno, že můžeme I a I' pokládati za spojité funkce proměnné k v okolí bodu 0 a v bodě 0, přisoudíme-li druhé z těch funkcí pro $k=0$ hodnotu -1; prvá nabývá pro $k=0$ hodnoty 0.

Podle rovnice diferenciální (a výsledku právě uvedeného) jest

$$I=\int_0^k kK\,dk=\tfrac{1}{2}\pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n^2}{2n+2}k^{2n+2}=\tfrac{1}{2}\pi\mathfrak{J},\quad c_0=1,$$

$$I'=-1+\int_0^k kK'\,dk.$$

Provedeme-li při integraci prvého členu částečnou integraci, máme

$$I'=-1+\mathfrak{J}\log\frac{4}{k}-$$

$$-2\sum_{1}^{\infty}\frac{c_n^2}{2n+2}k^{2n+2}\left(\frac{1}{1\,.\,2}+\frac{1}{3\,.\,4}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\,2n}-\frac{1}{2\,(2n+2)}\right).$$

Z rovnic diferenciálních ($\varkappa'$) následuje téměř bezprostředně, že derivace výrazu $IK'-I'K$ podle k jest rovna nule; jest tedy tento výraz pro všecka k uvnitř intervalu (0, 1) konstantní. Avšak podle rozvojů pro I, I' právě napsaných a podle rozvojů pro K, K' předešlého odstavce (rovnice (ε) a první z rovnic (ι)) jest ihned

$$IK'-I'K=\tfrac{1}{2}\pi+k^2\mathfrak{P}(k^2)\qquad\text{pro}\quad |k|<1,$$

kde $\mathfrak{P}(k^2)$ jest potenční řada argumentu k^2. Avšak $k^2\mathfrak{P}(k^2)$, je-li konstantní, jest nutně identicky nule rovné (DP, 146) a tedy

$$IK'-I'K=\tfrac{1}{2}\pi. \tag{λ}$$

80. Další zjednodušení numerického výpočtu (*Landenova transformace*). Řady pro úplné integrály dají se ještě dále upraviti k numerickému výpočtu pomocí kvadratické transformace. (Příklad 3, odst. 41*b*)

$$z^2=\frac{1+k}{2}\,\frac{1+x}{1+kx},\qquad z>0.$$

Hodnotám -1, 1 pro x přiřaděno 0, 1 pro z, čímž z rovnice v cit. příkladě uvedené dostáváme (viz odst. 68)

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=2\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\frac{2}{1+k}\int_0^1\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k_1^2z^2)}}, \tag{1}$$

kde mezi k_1 a k jest vztah

$$k_1=\frac{2\sqrt{k}}{1+k}. \tag{2}$$

Tomuto vztahu lze dáti také tyto tvary ($k'_1=\sqrt{1-k_1^2}$, $k'=\sqrt{1-k^2}$):

$$k=\frac{1-k'_1}{1+k'_1},\quad k'_1=\frac{1-k}{1+k},\quad k'=\frac{2\sqrt{k'_1}}{1+k'_1},\quad (1+k)(1+k'_1)=2. \tag{2'}$$

Třetí z těchto tvarů shoduje se (až na záměnu k_1, k v k', k'_1)

s rovnicí (2) a můžeme tudíž, provedeme-li tutéž záměnu v (1), místo rovnice (1) (kterou opíši) psáti celkem dvě

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{1}{1+k}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k_1^2x^2)}},$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2_1x^2)}} = \frac{1}{1+k'_1}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}}$$

aneb se zřetelem ku poslední z rovnic (2')

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{1}{1+k}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k_1^2x^2)}}.$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}} = \frac{2}{1+k}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2_1x^2)}}.$$

Integrály zde se vyskytující jsou kompletní integrály prvního druhu v normálním tvaru Legendrově. Označíme-li je po řadě (ve shodě s označením dřívějším) K, K_1, K', K'_1 změní se rovnice tyto v rovnice

$$K = \frac{1}{1+k}K_1, \qquad K' = \frac{2}{1+k}K'_1 \tag{I}$$

a z těchto, derivujeme-li je podle k a pak náležitě upravíme (viz rovnici ($\varkappa'$) odst. 79).

$$\begin{aligned} I &= \frac{1+k}{2}I_1 - \frac{k(1-k)}{1+k}K_1 \\ I' &= (1+k)I'_1 - \frac{2k(1-k)}{1+k}K'_1 \end{aligned} \tag{II}$$

Rovnice (I) a (II) budou pro nás východiskem nové metody pro výpočet kompletních integrálů eliptických. Jimi se převádí výpočet těch integrálů s modulem k na výpočet jich s modulu k_1 a mohou býti tudíž již užitečny, kdybychom integrály ty počítali řadami (jak vyloženo v odst. předcházejících).

81. Střed aritmeticko-geometrický. Klademe-li v rovnici (2) $k_1 = a_1/b_1$, $k = a_0/b_0$, změní se ta rovnice v tuto

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{2\sqrt{a_0b_0}}{a_0+b_0},$$

jíž vyhovíme, klademe-li

$$a_1 = \sqrt{a_0b_0}, \qquad b_1 = \tfrac{1}{2}(a_0+b_0). \tag{3}$$

Pomocí těchto dvou rovnic jest z dvojice čísel $[a_0, b_0]$ vypočtena nová dvojice $[a_1, b_1]$. Z této dvojice týmiž rovnicemi můžeme vypočítati další dvojici $[a_2, b_2]$, atd., čímž dostaneme neomezený řetěz rovnic

$$a_r = \sqrt{a_{r-1} b_{r-1}}, \quad b_r = \tfrac{1}{2}(a_{r-1} + b_{r-1}), \quad r = 1, 2, 3, \ldots \tag{4}$$

Z rovnic (4) následuje

$$b_r - a_r = \tfrac{1}{2}(\sqrt{b_{r-1}} - \sqrt{a_{r-1}})^2, \tag{5}$$

odkudž následuje, že

$$b_r > a_r \text{ při } r = 1, 2, 3, \ldots$$

Z rovnice poslední však také následuje

$$b_r - a_r = \tfrac{1}{2}\frac{(b_{r-1} - a_{r-1})^2}{(\sqrt{b_{r-1}} + \sqrt{a_{r-1}})^2} = \tag{6}$$

$$= \tfrac{1}{2}(b_{r-1} - a_{r-1})\frac{b_{r-1} - a_{r-1}}{b_{r-1} + a_{r-1} + 2\sqrt{b_{r-1} a_{r-1}}}; \tag{6'}$$

tedy

$$b_r - a_r < \tfrac{1}{2}(b_{r-1} - a_{r-1}); \quad r = 2, 3, \ldots \tag{7}$$

Nadto z (4) a z okolnosti, že $a_{r-1} < b_{r-1}$, plyne, že $b_r < b_{r-1}$, $a_r > a_{r-1}$, a jest tedy řada čísel

$$b_1, b_2, b_3, \ldots$$

řadou čísel klesajících, řada pak

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

řadou čísel stoupajících, i mají tudíž následkem toho a vztahu $b_r > a_r$ obě řady limitu. Jelikož pak rozdíl stejnolehlých členů obou řad se zřetelem k (7) konverguje k nule, mají obě ty řady touž limitu, jež sluje vzhledem ke tvaru základních rovnic (4) střed *aritmeticko-geometrický* z čísel b_0, a_0. Označme aritmeticko-geometrický střed čísel b_0, a_0 značkou $M(b_0, a_0)$, t. j. klaďme

$$\lim_{r=\infty} b_r = \lim_{r=\infty} a_r = M(b_0, a_0).$$

Jest očividně

$$M(b_0, a_0) = M(a_0, b_0).$$

Zároveň jest patrno, zavedeme-li ještě $c_r = \sqrt{b_r^2 - a_r^2}$, z čehož snadno podle (4) následuje $c_r = \frac{1}{2}(b_{r-1} - a_{r-1}) = b_{r-1} - b_r$, že

$$\lim_{r=\infty} c_r = \lim_{r=\infty}(b_{r-1} - b_r) = 0.$$

Abychom blíže seznali rychlost, s jakou čísla b_r, a_r konvergují ke společné limitě, vezměme v úvahu ještě jednou rovnici (6'), kterou na základě (4) napíšeme ve tvaru

$$b_r - a_r = \frac{(b_{r-1} - a_{r-1})^2}{8b_{r+1}}. \tag{8}$$

aneb $$\frac{b_r - a_r}{a_{r+1}} = \frac{(b_{r-1} - a_{r-1})^2}{8a_{r+2}^2} < \frac{(b_{r-1} - a_{r-1})^2}{8a_{r+1}^2}.$$

Je-li tedy r již takové, aby a_{r+1} bylo blízké ku $M(b_0, a_0)$, jest odtud patrno, že relativní velikost rozdílu $b_r - a_r$ (vzhledem k číslu $M(b_0, a_0)$ jest přibližně rovna osmině ze čtverce relativní velikosti rozdílu předcházejícího $b_{r-1} - a_{r-1}$. Jest tudíž rychlost konvergence neobyčejně veliká. Totéž platí pak o rychlosti konvergence čísel c_r k nule. O těchto lze tvrditi, že $\lim 2^r c_r = 0$; neboť podle (7) nejprve jest $2^{r+1} c_{r+1} < 2^r c_r$ a (8) lze psáti takto

$$2^{r+1} c_{r+1} = \frac{(2^r c_r)^2}{2^{r+1} b_{r+1}} < \frac{(2^r c_r)^2}{2^{r+1} M(a_0, b_0)}.$$

82. Pomocí čísel a_r, b_r, c_r zavedených v odst. předch. můžeme formulím (I) a (II) odst. 80 dáti jednoduchý tvar. Tak na př. první formuli z (I) můžeme psáti (zaveďme opět Legendreův normální tvar užívající funkcí goniometrických)

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{a_0^2}{b_0^2} \sin^2 \varphi}} = \frac{b_0}{a_0 + b_0} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{a_1^2}{b_1^2} \sin^2 \varphi}}; \qquad k = \frac{a_0}{b_0}, \quad k_1 = \frac{a_1}{b_1}:$$

aneb po jednoduché úpravě (se zřetelem k vztahu $a_0 + b_0 = 2b_1$)

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{b_0^2 - a_0^2 \sin^2 \varphi}} = \tfrac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{b_1^2 - a_1^2 \sin^2 \varphi}}.$$

V této relaci bychom ovšem mohli místo a_0, b_0, a_1, b_1 psáti a_{r-1}, b_{r-1}, a_r, b_r. Učiníme-li to a provedeme-li obdobné transformace i při ostatních vztazích v (I) a (II), obdržíme

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{b_{r-1}^2 - a_{r-1}^2 \sin^2 \varphi}} = \tfrac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{b_r^2 - a_r^2 \sin^2 \varphi}}, \tag{a}$$

$$r = 1, 2, 3, \ldots, \qquad a_r^2 + c_r^2 = b_r^2,$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{b_{r-1}^2 - c_{r-1}^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{b_r^2 - c_r^2 \sin^2 \varphi}}, \tag{b}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} a_{r-1}^2 \frac{\cos^2 \varphi \, d\varphi}{\sqrt{b_{r-1}^2 - a_{r-1}^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} a_r^2 \frac{\cos^2 \varphi \, d\varphi}{\sqrt{b_r^2 - a_r^2 \sin^2 \varphi}} +$$

$$+ \frac{a_{r-1}^2 - a_r^2}{2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{b_r^2 - a_r^2 \sin^2 \varphi}}. \tag{c}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} c_{r-1}^2 \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{b_{r-1}^2 - c_{r-1}^2 \sin^2\varphi}} = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} c_r^2 \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{b_r^2 - c_r^2\sin^2\varphi}} +$$

$$+ (-a_{r-1}^2 + a_r^2)\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{b_r^2 - c_r^2\sin^2\varphi}}. \qquad (d)$$

Z těchto rovnic postupně použitých lze integrály, v nichž se vyskytují a_0, b_0, c_0, vyjádřiti pomocí integrálů, v nichž jsou a_r, b_r, c_r. Tak na př. pro prvé dva integrály jest ihned

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{b_0^2 - a_0^2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{2^r}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{b_r^2 - a_r^2\sin^2\varphi}},$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{b_0^2 - c_0^2\sin^2\varphi}} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{b_r^2 - c_r^2\sin^2\varphi}}.$$

V těchto rovnicích můžeme přejíti k limitám pro $\lim r = \infty$. Jest $\lim a_r = \lim b_r = M(a_0, b_0)$, $\lim c_r = 0$. Druhá z těchto rovnic ihned dává

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{b_0^2 - c_0^2\sin^2\varphi}} = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{M(a_0, b_0)}, \qquad (A)$$

čímž *úplný integrál eliptický prvého druhu vyjádřen jednoduše pomocí aritm.-geom. středu.* Při první z oněch rovnic jest třeba uvážiti, že a_r, b_r při dosti velikém r jsou čísla sobě blízká a že tedy modul eliptického integrálu na pravé straně se vyskytujícího, t. j. číslo a_r/b_r, jest blízký jedné. Tu však možno použíti asymptotického vyjádření integrálu eliptického (odst. 76) a lze první rovnici psáti ve tvaru

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{b_0^2 - a_0^2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{2^r b_r}\left[\log\frac{4}{k'_r} + \eta_r\right] = \frac{1}{b_r}\left[\frac{1}{2^r}\log\frac{4b_r}{c_r} + \eta'_r\right], \qquad (e)$$

kde $\lim \eta'_r = 0$ pro $\lim r = \infty$.

Avšak podle odst. 81 jest

$$c_r = \sqrt{b_r^2 - a_r^2} = b_{r-1} - b_r = \tfrac{1}{2}(b_{r-1} - a_{r-1}) = \tfrac{1}{2}\frac{b_{r-1}^2 - a_{r-1}^2}{b_{r-1} + a_{r-1}} = \frac{c_{r-1}^2}{4b_r},\ r = 1, 2, 3, \ldots$$

a tudíž

$$\begin{aligned}
\log c_r &= 2\log c_{r-1} - \log 4b_r,\\
\log c_{r-1} &= 2\log c_{r-2} - \log 4b_{r-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\log c_1 &= 2\log c_0 - \log 4b_1.
\end{aligned}$$

Z těchto rovnic vyplývá

$$\log c_r = -\log 4b_r - 2\log 4b_{r-1} - \cdots - 2^{r-1}\log 4b_1 + 2^r \log c_0.$$

Po dosazení pak do (e) a snadné úpravě obdržíme

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{b_0^2 - a_0^2 \sin^2\varphi}} = \frac{1}{b_r}\Big[\log 4 - \frac{1}{2}\log(b_0^2 - a_0^2) + \frac{1}{2}\log b_1 + \frac{1}{2^2}\log b_2 + \cdots +$$
$$+ \frac{1}{2^r}\log b_r + \frac{1}{2^r}\log b_r + \eta'_r\Big]$$

aneb též, upravíme-li závorku tak, abychom mohli přejíti k limitě pro lim $r = \infty$,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{b_0^2 - a_0^2 \sin^2\varphi}} = \frac{1}{M(a_0, b_0)}\Big[\log\frac{4}{k'} - \log\frac{b_0}{b_1} - \frac{1}{2}\log\frac{b_1}{b_2} - \frac{1}{2^2}\log\frac{b_2}{b_3} - \cdots\Big], \quad (B)$$

$$k' = \sqrt{1 - \frac{a_0^2}{b_0^2}},$$

čímž jest dáno druhé vyjádření úplného eliptického integrálu pomocí středu aritm.-geom. a čísel při něm se vyskytujících.

Podobně můžeme postupovati vycházejíce z rovnic (c), (d) odst. 82. Tu jest pouze míti na mysli, že (v důsledku toho, co jsme již dokázali v odst. 79,) a v důsledku, že lim $2^r c_r = 0$

$$\lim_{r=\infty} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} a_r^2 \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{b_r^2 - a_r^2 \sin^2\varphi}} = M(a_0, b_0), \quad \lim_{r=\infty} 2^r \int_0^{\frac{1}{2}\pi} c_r^2 \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{b_r^2 - c_r^2 \sin^2\varphi}} = 0$$

a píšeme-li ještě $a_{r-1}^2 - a_r^2 = a_{r-1}(a_{r-1} - b_{r-1})$, máme po snadném počtu

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} a_0^2 \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{b_0^2 - a_0^2 \sin^2\varphi}} = M(a_0, b_0) - \mathfrak{A}(a_0, b_0)\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{b_0^2 - a_0^2 \sin^2\varphi}} \quad (C)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} c_0^2 \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{b_0^2 - c_0^2 \sin^2\varphi}} = \mathfrak{A}(a_0, b_0)\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{b_0^2 - c_0^2 \sin^2\varphi}}, \quad (D)$$

kde $\mathfrak{A}(a_0, b_0)$ jest dáno řadou

$$\mathfrak{A}(a_0, b_0) = a_0(b_0 - a_0) + 2a_1(b_1 - a_1) + 2^2 a_2(b_2 - a_2) + 2^3 a_3(b_3 - a_3) + \cdots$$

Z výsledků docílených následuje ihned vztah

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} a_0^2 \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{b_0^2 - a_0^2 \sin^2\varphi}} \cdot \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{b_0^2 - c_0^2 \sin^2\varphi}} +$$
$$+ \int_0^{\frac{1}{2}\pi} c_0^2 \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{b_0^2 - c_0^2 \sin^2\varphi}} \cdot \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{b_0^2 - a_0^2 \sin^2\varphi}} = \frac{\pi}{2}, \quad (E)$$

kterýž jest ve shodě se vztahem (λ) odst. 79.

$\mathfrak{A}(a_0, b_0)$ jest řadou velmi rychle konvergující a můžeme pomocí vztahů definujících řady $a_0, a_1, a_2, \ldots b_0, b_1, b_2, \ldots$ ji převésti na tvar

$$\mathfrak{A}(a_0, b_0) = \tfrac{1}{2}(b_0^2 - a_0^2) - \tfrac{1}{4}\mathfrak{B}(a_0, b_0),$$

kde řada

$$\mathfrak{B}(a_0, b_0) = (b_0 - a_0)^2 + 2(b_1 - a_1)^2 + 2^2(b_2 - a_2)^2 + \cdots$$

jest ještě rychleji konvergující.

Pro Legendrovy integrály druhého druhu v původním tvaru vypočteme snadno z předcházejícího tyto vztahy

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{b_0^2 - a_0^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi = M(a_0, b_0) + [\tfrac{1}{2}(b_0^2 - a_0^2) + \tfrac{1}{4}\mathfrak{B}(a_0, b_0)] \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{b_0^2 - a_0^2 \sin^2\varphi}},$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{b_0^2 - c_0^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi = [\tfrac{1}{2}(b_0^2 + a_0^2) - \tfrac{1}{4}\mathfrak{B}(a_0, b_0)] \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{b_0^2 - c_0^2 \sin^2\varphi}}. \qquad (F)$$

Tím všecky čtyři integrály kompletní prvého a druhého druhu v Legendrově normálním tvaru vypočteny pomocí aritm.-geom. středu z čísel a_0, b_0, řady $\mathfrak{B}(a_0, b_0)$ a řady v hranaté závorce na pravé straně rovnice (B), kteréžto obě řady velmi rychle konvergují (stejně jako řady $a_0, a_1, a_2, \ldots; b_0, b_1, b_2, \ldots$ konvergují ke společné limitě, rovné číslu $M(a_0, b_0)$).

Příklady číselné. 1. Jest vypočísti

$$F(0{\cdot}6, \tfrac{1}{2}\pi) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - 0{\cdot}6^2 \sin^2\varphi}}.$$

Užijeme-li první metody aritmeticko-geometrického středu, můžeme klásti

$$\frac{c_0}{b_0} = \frac{3}{5}, \qquad c_0 = 3, \quad b_0 = 5; \qquad a_0 = 4.$$

Jest tedy vypočítati aritmeticko-geom. střed mezi 5 a 4. Dostaneme postupně

$$\begin{aligned} b_1 &= 4{\cdot}5, \\ a_1 &= 4{\cdot}472135955; \\ b_2 &= 4{\cdot}486067977, \\ a_2 &= 4{\cdot}486046344; \\ b_3 = a_3 &= 4{\cdot}486057161. \end{aligned}$$

Že a_3 shoduje se v prvých desíti cifrách s b_3, jest z hodnot čísel b_2, a_2 na základě vztahu (6) předem jasné a nebylo třeba a_3 zvlášť počítati. Jest tedy (klademe-li $M(5, 4) = b_3$)

$$F(0{\cdot}6, \tfrac{1}{2}\pi) = \tfrac{1}{2}\pi \frac{b_0}{M(b_0, a_0)} = 1{\cdot}750753803.$$

2. Vypočítati jest úplné integrály prvního a druhého druhu patřící k modulu $\frac{7}{25}$. Tu užijeme druhé metody aritmeticko-geom. středu (odst. 82) a stanovíme nejprve aritmeticko-geometrický střed mezi čísly $a_0 = 24$, $b_0 = 25$.

Jest při 7ciferném počítání

$$a_1 = 24{\cdot}49490,$$
$$b_1 = 24{\cdot}5;$$
$$a'_2 = b_2 = 24{\cdot}49745.$$

Můžeme tedy při výpočtu úplných integrálů předpokládati čísla $a'_2, a'_3, \ldots$ $b_2, b_3 \ldots$ jakožto sobě a číslu $M(b_0, a_0)$ rovna; použijeme-li to v rovnici (B), dostaneme po snadné úpravě

$$F\left(\frac{a_0}{b_0}, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{b_0}{M(b_0, a_0)}\left[\log 2 - \tfrac{1}{2}\log(b_0 - a_0) + \tfrac{1}{2}\log(b_1 + a_1)\right] + \eta,$$

kde η jest číslo, jež lze při sedmiciferném počítání (v našem příkladě) zanedbati. Avšak jest $\log(b_0 - a_0) = \log 1 = 0$ a dále

$$\tfrac{1}{2}\log(b_1 + a_1) = \tfrac{1}{2}\log 48{\cdot}99490 = \tfrac{1}{2}\log 49 + \tfrac{1}{2}\log\frac{48{\cdot}99490}{49} =$$
$$= \tfrac{1}{2}\log 49 - 0{\cdot}00005204\ldots$$

Na základě hodnot pro přirozený $\log 2$ a $\log 7$ (podle Studničkových logaritmů, 4. vyd., str. 2), máme po provedení naznačených operací

$$F(\tfrac{24}{25}, \tfrac{1}{2}\pi) = 2{\cdot}693142\ldots$$

Pro integrál druhého druhu máme podle (F) obdobně

$$b_0\, E\left(\frac{a_0}{b_0}, \frac{\pi}{2}\right) = M(b_0, a_0) + \frac{1}{b_0}\,[b'^2_0 - b'^2_1]\, F\left(\frac{a'_0}{b'_0}, \frac{\pi}{2}\right) + \eta'$$
$$= 24{\cdot}49745 + \tfrac{1}{25} \,.\, 0{\cdot}5 \,.\, 49{\cdot}5 \,.\, 2{\cdot}693142 + \eta'$$
$$= 27{\cdot}16366\ldots$$

POZNÁMKA 1. Transformace kompletních integrálů vyplývají bezprostředně také ze vzorců získaných původní transformací *Landenovou* (Philosophical Transact., 65, r. 1775, str. 285) Landen však neznal jejího významu pro výpočet elipt. integrálů a užil jí toliko k vyjádření oblouku rovnostranné hyperboly rozdílem dvou oblouků elipsy.

První, kdo této transformace k výpočtu eliptických integrálů použil, byl *Lagrange* (r. 1784, Oeuvres, sv. II., str. 253). *Legendre* pak uzpůsobil Landenovu transformaci vhodně pro numerický výpočet eliptických integrálů všech tří druhů (viz zejména Traité des fonc. ellip., 1. sv., str. 89).

Algoritmus středu aritm.-geometrického zavedl do matematiky *Gauss*, který rovněž odvodil metody pro numerický výpočet eliptických integrálů prvního a druhého druhu na základě aritm.-geometrického středu, čímž se výsledky Legendrovy hlavně při integrálech druhého druhu značně zjednodušily. (V pojednání „Determinatio attractionis quam in punctum quodvis positionis datae exercet planeta“, r. 1818, Werke, III., str. 331).

POZNÁMKA 2. Vztah $IK' - I'K = \pi/2$, odvozený v odstavci 79 a později ještě jednou v tomto odst. lze psáti, užíváme-li místo I, I' integrálů E, E' ve tvaru

$$E'K + EK' - KK' = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Relace tato sluje **Legendreova** a má důležitost pro teorii funkcí eliptických.

POZNÁMKA 3. Landenovy transformace lze použíti s prospěchem i pro výpočet eliptických integrálů vůbec (t. j. v mezích 0, Φ). Příslušné vývody podány zevrubně v prvém vydání „Integrálního počtu".

83. Kompletní (úplné) integrály eliptické v normálním tvaru Weierstrassově. Pod úplným eliptickým integrálem vyrozumíváme zpravidla integrály eliptické, jichž meze jsou nulové body polynomu 4. stupně*) nacházejícího se pod odmocninou. Tak na př. v Legendreově normálním tvaru, kde pod příslušnou k nim odmocninou jest polynom $(1-x^2)(1-k^2x^2)$, jsou kompletní integrály eliptické integrály, jichž meze jsou dvě ze čtyř hodnot ± 1, $\pm 1/k$.

Integrály ty dají se vyjádřiti pomocí integrálů K, K', pro něž také užívá se pojmenování integrálů úplných (vskutku jsou dva z integrálů úplných rovny $\pm 2K$, $\pm 2iK'$, což jsou integrály prvý v mezích $(-1, 1)$, druhý v mezích 1, $1/k$; rozdíl jest tedy málo podstatný).

Integrály eliptické úplné v normálním tvaru Weierstrassově jsou integrály eliptické v norm. tv. Weierstrassově, jichž meze jsou dva ze čtyř bodů $e_1, e_2, e_3, \pm\infty$. Abychom tyto integrály účelně a jednoznačně definovali, definujeme odmocninu za znaménkem integračním se vyskytující jednou pro vždy tímto způsobem. Odmocnina ta vyskytuje se v převratné své hodnotě; budeme pak ji (tu převratnou hodnotu) psáti ve tvaru $2^{-1} \cdot (x-e_1)^{-\frac{1}{2}} \cdot$ $\cdot (x-e_2)^{-\frac{1}{2}} (x-e_3)^{-\frac{1}{2}}$, při čemž $(x-e_i)^{-\frac{1}{2}}$ *znamenati bude hlavní hodnotu toho výrazu.* Tedy při x reálném jest $(x-e_i)^{-\frac{1}{2}}$ buď číslo reálné kladné, buď číslo ryze imaginárné, jež děleno i dává číslo kladné (číslo *positivně ryze imaginární*). Jest tedy ona převratná hodnota celé odmocniny, když x jest po řadě v intervalech $(-\infty, e_3)$, (e_3, e_2), (e_2, e_1), (e_1, ∞) číslo tvaru $-Bi$, $-B$, Bi, B, kde B jest číslo reálné kladné.**)

*) Je-li pod odmocninou polynom pouze třetího stupně, pak jeden nulový bod bereme za $\pm\infty$.

**) V úvahách těchto a násl. třeba míti stále na paměti, že $e_3 < e_2 < e_1$ a že $e_1 + e_2 + e_3 = 0$.

Pak zavedeme si jako *základní* tyto *dva kompletní integrály eliptické prvého druhu v normálním tvaru Weierstrassově*

$$
\begin{aligned}
\omega_1 &= \int_{e_1}^{\infty} 2^{-1}(x-e_1)^{-\frac{1}{2}}(x-e_2)^{-\frac{1}{2}}(x-e_3)^{-\frac{1}{2}}\,dx,\\
\omega_3 &= \int_{e_3}^{-\infty} 2^{-1}(x-e_1)^{-\frac{1}{2}}(x-e_2)^{-\frac{1}{2}}(x-e_3)^{-\frac{1}{2}}\,dx.
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

Čísla ω_1, ω_3/i jsou čísla kladná. Na tyto dva integrály lze převésti snadno ostatní kompletní integrály prvého druhu. Provedeme-li totiž lineární substituci na integrály dávající ω_1, ω_3

$$
x = e_2 + \frac{(e_2-e_1)(e_2-e_3)}{y-e_2} \quad \text{aneb} \quad y = e_2 + \frac{(e_2-e_1)(e_2-e_3)}{x-e_2},
$$

která mezím e_1, ∞ resp. e_3, $-\infty$ přiřaďuje e_3, e_2 resp. e_1, e_2, dostaneme ihned (viz odst. 39), že též

$$
\begin{aligned}
\omega_1 &= -\int_{e_3}^{e_2} 2^{-1}(x-e_1)^{-\frac{1}{2}}(x-e_2)^{-\frac{1}{2}}(x-e_3)^{-\frac{1}{2}}\,dx,\\
\omega_3 &= \int_{e_2}^{e_1} 2^{-1}(x-e_1)^{-\frac{1}{2}}(x-e_2)^{-\frac{1}{2}}(x-e_3)^{-\frac{1}{2}}\,dx.
\end{aligned}
\qquad (1')
$$

Z (1) a (1′) následuje

$$
\int_{-\infty}^{\infty} 2^{-1}(x-e_1)^{-\frac{1}{2}}(x-e_2)^{-\frac{1}{2}}(x-e_3)^{-\frac{1}{2}}\,dx = -\omega_3 - \omega_1 + \omega_3 + \omega_1 = 0; \qquad (2)
$$

tak jest patrno, že, je-li jedna mez integrálu eliptického prvého druhu v normálním tvaru Weierstrassově $+\infty$, můžeme ji zaměniti v $-\infty$. Speciálně můžeme psáti

$$
\omega_3 = \int_{e_3}^{\infty} 2^{-1}(x-e_1)^{-\frac{1}{2}}(x-e_2)^{-\frac{1}{2}}(x-e_3)^{-\frac{1}{2}}\,dx.
$$

Dále jest patrno, že ω_1, ω_3 lze vyjádřiti pomocí K a K'. Neboť transformujeme-li ω_1 z rovnice (1′) substitucí (odst. 40, pozn. 2)

$$
x = e_3 + (e_2 - e_3)\,t^2, \qquad t > 0 \qquad (3)
$$

dostaneme (meze e_3, e_2 se změní v 0, 1)

$$
\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \qquad k^2 = \frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}. \qquad (4)
$$

Dosadíme-li pak v integrálu pro ω_3 v (1′) podle rovnice $x = -x'$, máme ihned pro ω_3

$$
\omega_3 = -i\int_{-e_1}^{-e_2} 2^{-1}(x+e_3)^{-\frac{1}{2}}(x+e_2)^{-\frac{1}{2}}(x+e_1)^{-\frac{1}{2}}\,dx,
$$

t. j. ω_3 vzniká z ω_1 definovaného v rovnici (1'), zaměníme-li v ní $-e_3$, $-e_2$, $-e_1$ za e_1, e_2, e_3 a zároveň násobíme číslem i. Avšak záměnou $-e_3$, $-e_2$, $-e_1$ za e_1, e_2, e_3 změní se v (4) k^2 v k'^2, kde $k'^2 + k^2 = 1$ a kde tudíž k, k' jsou komplementární moduly; rovnice (4) přechází tedy tou záměnou v rovnici

$$\omega_3 = i\frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2 t^2)}}, \qquad k'^2 = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3} \tag{4'}$$

Máme tak větu: *Kompletní integrály v normálním tvaru Weierstrassově ω_1, ω_3 a integrály eliptické K, K' svrchu počítané jsou vázany relacemi*

$$\omega_1 = \frac{K}{\sqrt{e_1 - e_3}}, \qquad \omega_3 = \frac{iK'}{\sqrt{e_1 - e_3}}, \qquad \text{kde } k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}. \tag{5}$$

Tyto rovnice a vývody předcházejících odstavců nám dovolují pokládati veličiny ω_1, ω_3 za známé.

Za kompletní integrály eliptické druhého druhu v normálním tvaru Weierstrassově zavedu integrály

$$\begin{aligned} \eta_1 &= -\int_{e_3}^{e_2} 2^{-1}(x-e_1)^{-\frac{1}{2}}(x-e_2)^{-\frac{1}{2}}(x-e_3)^{-\frac{1}{2}}\,.\,x\,dx, \\ \eta_3 &= \int_{e_2}^{e_1} 2^{-1}(x-e_1)^{-\frac{1}{2}}(x-e_2)^{-\frac{1}{2}}(x-e_3)^{-\frac{1}{2}}\,.\,x\,dx, \end{aligned} \tag{6}$$

odpovídající výrazům (1') pro kompletní integrály prvého druhu, η_1 jest číslo reálné, η_3 ryze imaginární. Abychom tyto integrály vyjádřili pomocí kompletních integrálů Legendrových, provedeme na integrálu dávajícím η_1 opět substituci (3). Dostaneme snadným počtem

$$\eta_1 = \int_0^1 \frac{e_3 + (e_2 - e_3)t^2}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}\frac{dt}{\sqrt{e_1 - e_3}} = \frac{e_2}{\sqrt{e_1 - e_3}}K - \sqrt{e_1 - e_3}\,.\,I. \tag{7}$$

Dosadíme-li do výrazu pro η_3 číslo $-x$ za x, obdržíme nejprve

$$\eta_3 = i\int_{-e_1}^{-e_2} 2^{-1}(x+e_3)^{-\frac{1}{2}}(x+e_2)^{-\frac{1}{2}}(x+e_1)^{-\frac{1}{2}}\,x\,dx,$$

t. j. η_3 vznikne z η_1, zaměníme-li e_1, e_2, e_3 za $-e_3$, $-e_2$, $-e_1$ a násobíme-li pak $-i$. Záměnou e_1, e_2, e_3 za $-e_3$, $-e_2$, $-e_1$ však se mění k v k' a tedy K v K' a I v $-I'$ (viz odst. 79), takže rovnice (7) se mění v rovnici

$$\eta_3 = \frac{+ie_2}{\sqrt{e_1 - e_3}}K' - i\sqrt{e_1 - e_3}\,I'. \tag{7'}$$

Relace Legendrova (odst. 79, (λ)) mění se v důsledku (5), (7), (7′) ihned v rovnici

$$\omega_1 \eta_3 - \omega_3 \eta_1 = \tfrac{1}{2}\pi i. \tag{8}$$

84. Rozvoje pro integrály eliptické v normálním tvaru Weierstrassově. Bylo by snadno i ostatní rozvoje pro integrály (neúplné) v Legendrově normálním tvaru použíti k výpočtu integrálů (neúplných) v normálním tvaru Weierstrassově. Jelikož však vztahy příslušné v případě potřeby snadno se dají odvoditi — neboť transformace převádějící eliptické integrály z jednoho normálního tvaru do druhého jsou nám známy — nebudu se tou věcí dále zabývati. Odvodím pouze pro integrál eliptický jeden rozvoj jiného druhu, než byly rozvoje pro $F(k, \Phi)$, $E(k, \Phi)$. Uvažujme integrál

$$P(x) = \int_x^\infty 2^{-1}(x - e_1)^{-\frac{1}{2}}(x - e_2)^{-\frac{1}{2}}(x - e_3)^{-\frac{1}{2}}\, dx \quad \text{za předpokladu, že } x > e_1.$$

Zaveďme tam novou proměnnou integrační t rovnicí $x = t^{-1}$. Dostaneme, zavedeme-li zároveň invarianty g_2, g_3 (odst. 39)

$$P(x) = \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{\sqrt{4t(1-e_1t)(1-e_2t)(1-e_3t)}} = \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{\sqrt{4 \,.\, t\,(1 - \frac{1}{4} g_2 t^2 - \frac{1}{4} g_3 t^3)}}.$$

Podle věty binomické jest

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}(g_2 t^2 + g_3 t^3)}} = 1 + \frac{1}{8}(g_2 t^2 + g_3 t^3) + \frac{1 \,.\, 3}{2^4 \,.\, 2 \,.\, 4}(g_2 t^2 + g_3 t^3)^2 + \\ + \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2^6 \,.\, 2 \,.\, 4 \,.\, 6}(g_2 t^2 + g_3 t^3)^3 + \cdots$$

Řadu na pravé straně lze, umocníme-li a náležitě uspořádáme, psáti jako řadu potenční, jejíž poloměr konvergence jest, jak snadno patrno — neboť lze řadu tu pokládati za součin tří potenčních řad (binomických rozvojů) pro $(1 - e_i t)^{-\frac{1}{2}}$ —, rovný nejmenšímu z čísel $|e_i|^{-1}$. Dostáváme

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}(g_2 t^2 + g_3 t^3)}} = 1 + \tfrac{1}{8} g_2 t^2 + \tfrac{1}{8} g_3 t^3 + \tfrac{3}{128} g_2^2 t^4 + \tfrac{3}{64} g_2 g_3 t^5 + \\ + (\tfrac{3}{128} g_3^2 + \tfrac{5}{1024} g_2^3) t^6 + \cdots$$

Násobíme-li ještě tento rozvoj $2^{-1} t^{-\frac{1}{2}}$ a integrujeme-li v mezích 0, x^{-1}, obdržíme konečně

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(1 + \frac{g_2}{40}\frac{1}{x^2} + \frac{g_3}{56}\frac{1}{x^3} + \frac{g_2^2}{384}\frac{1}{x^4} + \frac{3 g_2 g_3}{704}\frac{1}{x^5} + \cdots\right),$$

což jest *rozvoj pro eliptický integrál 1. druhu v normálním tvaru Weierstrassově konvergentní, jestliže* $x > |e_i|$, $i = 1, 2, 3$.

Klaďme $P(x) = u$; pak jest u^2 vyjádřitelno na základě poslední rovnice jako potenční řada výrazu $1/x$. Inversí (DP odst. 155) můžeme pak naopak docíliti vyjádření $1/x$ jakožto potenční řady proměnné u^2. Dostaneme

$$\frac{1}{x} = u^2 + b_2 u^4 + b_3 u^6 + \cdots,$$

kde $b_2, b_3, \ldots.$ snadno vypočteme pomocí formulí (DP, str. 255, 256). Jest

$$b_2 = 0, \quad b_3 = -\tfrac{1}{20} g_2, \quad b_4 = -\tfrac{1}{28} g_3, \quad b_5 = -\tfrac{7}{1200} g_2^2 + \tfrac{3}{400} g_2^2 = \tfrac{1}{600} g_2^2 \ldots.$$

Aneb konečně, vezmeme-li převratnou hodnotu a provedeme-li dělení příslušnou potenční řadou

$$x = \frac{1}{u^2} + \tfrac{1}{20} g_2 u^2 + \tfrac{1}{28} g_3 u^4 + \tfrac{1}{1200} g_2^2 u^6 + \cdots$$