ODDÍL 2.

MNOŽSTVÍ USPOŘÁDANÁ A DOBŘE USPOŘÁDANÁ.

1. MNOŽSTVÍ USPOŘÁDANÁ.

Při mnohých množstvích vyskytují se jejich prvky v jakémsi přirozeném uspořádání; na příklad v „množství všech králů českých“ je přirozeno, srovnati jednotlivé prvky (t. j. české krále) v pořadí, tak jak po sobě časově následovali. Nebo uvažuji-li množství celých čísel kladných, mají tato čísla jisté pořadí podle velikosti. Nebo jde-li o povýšení v nějakém úřadě, srovnáme si napřed úřednictvo na příklad podle služebních let (nebo třeba podle nějakých složitějších pravidel, jež jsou výslednicí kvalifikace, služební doby, fysického stáří a pod.). Jest účelno, definovati takové „uspořádání“ množství obecně:

Definice. Množství M nazýváme **uspořádaným** (*geordnet, ordonné*), *jestliže je dán jistý předpis, jenž dovoluje určiti, který ze dvou libovolně daných (od sebe různých) prvků a, b množství M leží před druhým (okolnost, že a leží před b, píšeme $a \prec b$). Tento předpis musí míti tyto vlastnosti:*

1. *Pro libovolné dva prvky a, b množství M platí vždy jeden a jen jeden z těchto vztahů: $a \prec b$, $a = b$, $b \prec a$ (t. j. buď jest a před b, nebo a totožné s b, nebo b před a).*

2. *Je-li $a \prec b$, $b \prec c$, jest i $a \prec c$ (t. j. je-li a před b, b před c, jest i a před c).*

POZNÁMKY. 1. Místo $a \prec b$ budeme psáti také $b \succ a$ (čti: b leží (jest) za a).

2. Množství prázdné a množství složené z jediného prvku můžeme pokládati vždy za uspořádané, neboť v tomto případě naše definice nic nepožaduje (neexistují totiž v takovém množ-

ství dva od sebe různé prvky); ostatně další vývody jsou vždy triviální, jde-li o množství konečná, takže čtenář si vždy tyto případy může promysliti sám.

Definice tato jest, jak je viděti, zcela přirozená: vlastnosti 1 a 2, požadované pro symbol $\prec$, odpovídají doslovně základním vztahům pro znamení nerovnosti ($<$).

Jinak je možno vysloviti tuto definici takto: vytvořme množství P všech párů (a, b), kde a, b jsou libovolné *navzájem různé* prvky množství M $(a \neq b)$; při tom pořadí prvků v páru (a, b) pokládáme za podstatné; t. j. klademe $(a, b) = (a', b')$ tehdy a jen tehdy, je-li $a = a'$, $b = b'$ — tedy na příklad jest $(a, b) \neq (b, a)$.

Rozdělme nyní množství P ve dvě částečná množství P_1 a P_2 bez společných prvků; t. j. $P_2 = P - P_1$; tehdy a jen tehdy, když pár (a, b) patří k P_1, pišme $a \prec b$.

Od množství P_1 a P_2 požadujeme pak tyto vlastnosti:

1. Patří-li (a, b) k P_1, patří (b, a) k P_2 a naopak: patří-li (a, b) k P_2, patří (b, a) k P_1; t. j. platí vždy jeden a jen jeden ze vztahů $a \prec b$, $b \prec a$ (je-li $a \neq b$).

2. Patří-li páry (a, b), (b, c) k P_1, patří i pár (a, c) k P_1 (t. j. je-li $a \prec b$, $b \prec c$, je i $a \prec c$).

Je patrno, že obě definice jsou totožné: P_1 (resp. P_2) je prostě množství všech párů (a, b), pro něž platí $a \prec b$ (resp. $b \prec a$).

Uveďme několik příkladů:

1. Množství všech čísel celých kladných, uspořádaných podle velikosti; t. j. $a \prec b$, je-li $a < b$. Na příklad $2 \prec 3$, $5 \prec 10$, $7 \succ 3$.

2. Množství všech čísel celých kladných, uspořádaných v opačném pořádku podle velikosti; t. j. $a \prec b$, je-li $a > b$; na příklad $2 \prec 1$, $3 \prec 2$, $5 \succ 10$.

3. Množství všech čísel celých kladných uspořádaných takto: napřed číslo 1, potom prvočísla, srovnaná podle velikosti, potom všechny součiny dvou (stejných nebo různých) prvočísel, srovnané podle velikosti, potom všechny součiny tří prvočísel, srovnané podle velikosti atd.; tedy toto uspořádání:

$$1, 2, 3, 5, 7, \ldots, 4, 6, 9, 10, \ldots, 8, 12, 18, 20, \ldots, 16, 24 \ldots$$

Při tom každé číslo vlevo stojí před každým číslem vpravo; na příklad $3 \prec 6$, $9 \prec 8$, $10 \prec 16, \ldots$

4. Množství všech čísel racionálních nezáporných ($\geqq 0$), uspořádané podle velikosti.

5. Množství všech čísel racionálních, uspořádaných podle velikosti jmenovatele, při čemž čísla se stejným jmenovatelem jsou uspořádána podle velikosti čitatele*); tedy

*) V tomto a v následujícím příkladě myslíme si číslo racionální psáno jako podíl dvou čísel celých p/q, kde $q > 0$ a p, q jsou nesoudělná.

$$\ldots, -\tfrac{2}{1}, -\tfrac{1}{1}, \tfrac{0}{1}, \tfrac{1}{1}, \tfrac{2}{1}, \ldots, -\tfrac{5}{2}, -\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{2}, \ldots, -\tfrac{4}{3}, -\tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{4}{3}, \ldots;$$

na příklad

$$\tfrac{5}{3} \prec \tfrac{4}{7}, \quad -\tfrac{2}{1} \prec -\tfrac{10}{3}, \quad \tfrac{1}{2} \prec \tfrac{3}{2}.$$

6. Množství všech čísel racionálních p/q, uspořádaných podle velikosti součtu $|p|+q$, při čemž čísla s touž hodnotou $|p|+q$ jsou srovnána podle rostoucího p:

$$\tfrac{0}{1}, -\tfrac{1}{1}, \tfrac{1}{1}, -\tfrac{2}{1}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{1}, -\tfrac{3}{1}, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{3}{1}, -\tfrac{4}{1}, \ldots$$

7. Množství všech čísel reálných, uspořádaných podle velikosti.

8. Množství všech čísel reálných, uspořádaných takto: napřed čísla racionální podle velikosti, potom čísla iracionální podle velikosti; na příklad $2 \prec 3 \prec \sqrt{2} \prec 1+\sqrt{2}$.

9. Množství těchto čísel

$$\tfrac{0}{1}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, \ldots, 1+\tfrac{0}{1}, 1+\tfrac{1}{2}, 1+\tfrac{2}{3}, \ldots, 2+\tfrac{0}{1}, 2+\tfrac{1}{2}, 2+\tfrac{2}{3}, \ldots,$$

t. j. množství všech čísel

$$k+\frac{n-1}{n} \qquad (k=0, 1, 2, \ldots;\ n=1, 2, 3, \ldots),$$

uspořádaných podle velikosti.

Uspořádané množství je dáno, jsou-li dány jeho prvky a jejich pořadí (t. j. je-li dán význam symbolu $\prec$); dvě množství uspořádaná považujeme za totožná, mají-li tytéž prvky a totéž pořadí.

2. PODOBNOST MNOŽSTVÍ USPOŘÁDANÝCH.

Dvě množství uspořádaná M a N nazýváme **podobnými** (ähnlich, semblable), jestliže je možno přiřaditi prvky množství M prvkům množství N vzájemně jednoznačně tak, že pořadí zůstává při tom zachováno [to znamená: označím-li znakem $f(m)$ onen prvek z N, jenž je přiřazen prvku m z množství M, potom ze vztahu $a \prec b$ plyne $f(a) \prec f(b)$*)]. Takové přiřazení budeme nazývati **podobným zobrazením.** Je vidět, že definice je symetrická vzhledem k množstvím M, N. Podobnost uspořádaných množství M, N značíme vzorcem

$$M \simeq N.$$

*) Při tom ve vztahu $a \prec b$ jest myšleno pořadí prvků v M, ve vztahu $f(a) \prec f(b)$ pořadí prvků v N. Měli bychom tedy vlastně tento rozdíl nějak vyznačit, třeba takto

$$a \underset{M}{\prec} b, \quad f(a) \underset{N}{\prec} f(b);$$

neboť, kdyby na příklad prvky $f(a)$, $f(b)$ patřily též k M, bylo by mezi nimi definováno dvojí pořadí, jednak v množství M, jednak v N. Nebudeme však většinou toto rozlišení prováděti, neboť ze souvislosti bude většinou jasno, o které uspořádání jde.

Samozřejmě $M \cong M$ (každé uspořádané množství je podobno samo sobě); vztahy $M \cong N$ a $N \cong M$ znamenají totéž; ze vztahů $M \cong N$, $N \cong P$ plyne, jak čtenář okamžitě nahlédne, že též $M \cong P$. Jsou-li si dvě množství podobná, jsou ovšem též ekvivalentní (neboť podobné zobrazení je vzájemně jednoznačné): naopak však mohou býti ekvivalentní dvě množství, jež si nejsou podobná (na příklad v předcházejícím odstavci jsou v příkladech 1, 3, 4, 5 všechna množství spočetná, ale žádná dvě z nich nejsou si podobná; cvičení pro čtenáře: proč?).

Je-li M uspořádané množství, N část množství M, potom pořadí prvků v M určuje specielně též jisté pořadí prvků v N: budeme-li mluviti *o části N* (částečném množství) *uspořádaného množství M*, budeme tím rozumět množství N, *uspořádané tak, že jeho prvky mají totéž pořadí, jako měly v M**).

Budiž M uspořádané množství; budiž a nějaký prvek z M: množství všech prvků z M, jež jsou $\prec a$, nazývá se **úsekem** (Abschnitt, segment) množství M, příslušným prvku a; značka $A_M(a)$. Úsek si při tom myslíme uspořádán podle téhož pořadí, jako je uspořádáno množství M. Úsek je tedy částí množství M, a to pravou částí, ježto a k němu nepatří. Úsek může být ovšem též prázdný — to nastává tehdy, jestliže před prvkem a neleží žádný prvek z M (v tom případě budeme říkati, že prvek a je **prvním prvkem** z M).

I. *Úsek úseku jest opět úsekem: přesněji: budiž $N = A_M(a)$, $P = A_N(b)$; potom jest*

$$P = A_M(b).$$

*Důkaz***): $N = A_M(a)$ je množství oněch prvků z M, jež jsou $\prec a$. Ježto b musí ležeti v N, jest též $b \prec a$. Ale $A_N(b)$ jest množství všech prvků z N, jež jsou $\prec b$; t. j. množství všech prvků z M, jež jsou současně $\prec a$ a též $\prec b$; t. j. množství všech prvků z M, jež jsou $\prec b$ (neboť $b \prec a$). Tedy

$$A_N(b) = A_M(b).$$

II. *Zobrazíme-li množství M podobně na množství N, zobrazí se každý úsek množství M podobně na nějaký úsek množství N.*

Důkaz: Nechť prvek a z M se zobrazí na prvek b z N; následkem podobnosti se všechny prvky $\prec a$ zobrazí na prvky

---

*) Ve smyslu poslední poznámky pod čarou můžeme to vysloviti takto: jsou-li a b dva prvky z N a je-li $a \underset{M}{\prec} b$, je též $a \underset{N}{\prec} b$.

**) Až do konce tohoto odstavce vynechávám u uvažovaných množství přívlastek „uspořádaný“, abych byl stručnější.

$\prec b$ a prvky $\succ a$ se zobrazí na prvky $\succ b$. T. j.: úsek $A_M(a)$ se zobrazí na úsek $A_N(b)$: a toto zobrazení je zřejmě podobné.

3. MNOŽSTVÍ DOBŘE USPOŘÁDANÁ.

Všimněme si blíže příkladů v odstavci 1! Množství 1. má jedničku za první prvek. Ale nejenom to množství samo, nýbrž i každá jeho neprázdná část má první prvek (jinými slovy: v každém neprázdném množství celých čísel kladných jest jedno číslo nejmenší — samozřejmě, neboť stačí jíti v řadě $1, 2, 3, \ldots$ tak daleko, až *po prvé* potkáme nějaké číslo toho množství). Tato vlastnost jest tak důležitá, že jest záhodno dáti jí zvláštní jméno:

Definice. Uspořádané množství M nazvu **dobře uspořádaným** *(wohlgeordnet, bien ordonné), jestliže každá neprázdná část množství M obsahuje první prvek* (t. j. obšírněji: jestliže v každé neprázdné části N existuje prvek a takový, že pro všechny prvky b z množství N, různé od a, platí $a \prec b$).

Všimněme si těch ostatních příkladů! Množství 2. 5. 7. 8. nejsou dobře uspořádaná, neboť neobsahují sama prvního prvku*) (uvědomíme si, že množství jest svým vlastním částečným množstvím). Také množství 4. není dobře uspořádané: samo obsahuje sice první prvek, ale na příklad množství všech racionálních čísel $> \frac{1}{2}$ (nebo > 0 nebo $> \sqrt{2}$) je částí množství 4., ale neobsahuje prvního prvku (t. j. nejmenšího čísla).

Zato množství 6. je dobře uspořádané: neboť, označíme-li jeho prvky po řadě

$$a_1 = \tfrac{0}{1},\; a_2 = -\tfrac{1}{1},\; a_3 = \tfrac{1}{1},\; a_4 = -\tfrac{2}{1}, \ldots,$$

má každá neprázdná část tvar

$$\{a_{l_1}, a_{l_2}, a_{l_3}, \ldots\}$$

a první prvek — t. j. prvek s nejmenším indexem — najdu tak, že najdu nejmenší číslo mezi celými kladnými čísly $l_1, l_2, \ldots$

Také, což na první pohled více překvapí, množství 9. je dobře uspořádané; je-li totiž N libovolná neprázdná část, jejíž prvky jsou tedy čísla tvaru $k + (n-1)/n$, dostanu první prvek (t. j. nejmenší číslo) z N tak, že vezmu ona čísla z N, jimž přísluší nejmenší hodnota k, a mezi nimi vyberu to, jemuž přísluší nejmenší hodnota n. Též množství 3. je dobře uspořádané, jak čtenář teď již snadno sám dokáže.

*) Čtenář snadno dokáže, že dokonce žádné nekonečné částečné množství množství 2. nemá prvního prvku — za to má „poslední“ prvek.

Dokážeme si nyní tyto věty:

III. *Každá část množství dobře uspořádaného je množství dobře uspořádané.*

Důkaz: Budiž N částí dobře uspořádaného množství M; máme dokázati, že každá neprázdná část P množství N obsahuje první prvek; to je však samozřejmé, neboť P je částí dobře uspořádaného množství M. (Čtenář nechť má zde a v následujícím stále na mysli, že při přechodu k množstvím částečným se původní pořadí podle naší úmluvy zachovává).

IV. *Každé množství podobné množství dobře uspořádanému je dobře uspořádané.*

Důkaz: Buďte M_1, M_2 dvě množství uspořádaná podobná; M_1 budiž dobře uspořádané. Máme dokázati, že každá neprázdná část N_2 toho množství M_2 obsahuje první prvek. Existuje podobné zobrazení množství M_1 na M_2, jež každému prvku m z M_1 přiřazuje jistý prvek $f(m)$ z M_2. Prvky množství N_2 jsou při tom přiřazeny vzájemně jednoznačně prvkům jisté neprázdné části N_1 množství M_1. Ježto M_1 je dobře uspořádané, obsahuje N_1 jistý první prvek a_1; t. j. $a_1 \prec m$, probíhá-li m všechny prvky množství N_1, různé od a_1; jestliže však m probíhá všechny prvky z N_1, různé od a_1, potom podle definice množství N_1 probíhá $f(m)$ všechny prvky z N_2, různé od $f(a_1)$; následkem podobnosti jest pak $f(a_1) \prec f(m)$; t. j. $f(a_1)$ jest prvním prvkem z N_2, jak bylo dokázati.

4. ZÁKLADNÍ VĚTA O MNOŽSTVÍCH DOBŘE USPOŘÁDANÝCH.

Dokážeme napřed několik vět, které připravují důkaz oné základní věty.

V. *Množství dobře uspořádané není podobné žádnému svému úseku.*

Důkaz: Předpokládejme, že množství dobře uspořádané M je podobno svému úseku $A_M(a)$. Potom existuje podobné zobrazení, jež každému prvku m z M přiřazuje jistý prvek — označme jej $f(m)$ — z $A_M(a)$ (tedy $f(m)$ jest též prvkem z M); platí tedy $f(m) \prec a$ pro každý prvek m z M; specielně tedy $f(a) \prec a$. Budiž N množství oněch prvků m z M, pro něž $f(m) \prec m$; N není prázdné, ježto a patří k N; obsahuje tedy N jistý první prvek, jejž označím b; tedy platí $f(b) \prec b$ a b jest první prvek, pro nějž to platí: pišme $f(b) = c$, tedy $c \prec b$ a tedy *neplatí* $f(c) \prec c$. Ze vztahu $c \prec b$

plyne však následkem podobnosti $f(c) \prec f(b)$, t. j. $f(c) \prec c$. Tím jsme dostali žádaný spor.

Buďtež M_1, M_2 dvě množství dobře uspořádaná. Je-li a_1 prvek z M_1, a_2 prvek z M_2, potom nazývám tyto prvky **homologickými**, jestliže úsek $A_{M_1}(a_1)$ je podobný úseku $A_{M_2}(a_2)$. Platí pak:

VI. *Žádný prvek z M_1 nemůže býti homologický s dvěma různými prvky z M_2.*

Důkaz: Nechť prvek a z M_1 je homologický s prvky b_1, b_2 z M_2; označení budiž tak voleno, že $b_1 \prec b_2$. Tedy platí

$$A_{M_1}(a) \simeq A_{M_2}(b_1), \qquad A_{M_1}(a) \simeq A_{M_2}(b_2),$$

odkudž

$$A_{M_2}(b_1) \simeq A_{M_2}(b_2);$$

to je však podle V nemožno: neboť $A_{M_2}(b_1)$ je zřejmě úsekem množství $A_{M_2}(b_2)$ (třeba podle odstavce 2, věta I).

Ke každému prvku z M_1 existuje tedy v M_2 nejvýše jeden (t. j. buď jeden nebo vůbec žádný) homologický prvek.

VII. *Buďtež M_1, M_2 dvě množství dobře uspořádaná; budiž N množství oněch prvků z M_1, k nimž existuje v M_2 homologický prvek: potom je buď $N = M_1$ nebo je N rovno nějakému úseku množství M_1.*

Důkaz: Jestliže N není rovno M_1, potom existují prvky v M_1, jež nemají homologického prvku v M_2, a mezi těmito prvky existuje jistý první prvek, označme jej a. Každý prvek $\prec a$ patří tedy k N, ježto má v M_2 prvek homologický; a nepatří k N; tvrdím pak, že žádný prvek $\succ a$ nepatří k N; kdyby totiž prvek $b \succ a$ patřil k N, potom by byl úsek $A_{M_1}(b)$ podobný nějakému úseku $A_{M_2}(b')$: ježto $A_{M_1}(a)$ jest úsekem množství $A_{M_1}(b)$, tedy by podobné zobrazení, jež zobrazuje $A_{M_1}(b)$ na $A_{M_2}(b')$, zobrazovalo úsek $A_{M_1}(a)$ podobně na nějaký úsek úseku $A_{M_2}(b')$, t. j. na nějaký úsek $A_{M_2}(a')$ množství M_2 (zde používám vět I a II odst. 2). Tedy by prvek a měl homologický prvek a' v M_2, což je proti předpokladu. N se tedy rovná právě množství všech prvků $\prec a$ z M_1, t. j. $N = A_{M_1}(a)$, jak bylo dokázati.

VIII. *Jestliže dobře uspořádaná množství M_1, M_2 mají tu vlastnost, že ke každému prvku z M_1 existuje homologický prvek v M_2 a rovněž ke každému prvku z M_2 existuje homologický prvek v M_1, potom množství M_1 a M_2 jsou podobná.*

Důkaz: Každému prvku m z M_1 přiřaďme jeho homologický prvek z M_2, jejž označím $f(m)$. Tím jsou si obě množství vzájemně jednoznačně přiřazena (podle VI); zbývá ještě dokázati, že toto přiřazení jest podobné, t. j. že ze vztahu $a \prec b$ plyne $f(a) \prec f(b)$. Vzhledem k vzájemné jednoznačnosti nemůže býti $f(a) = f(b)$. Stačí tedy dokázati, že nemůže býti $f(a) \succ f(b)$.

Předpokládejme tedy na okamžik, že

$$a \prec b, \qquad f(a) \succ f(b),$$

a označme $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$. Jest

$$A_{M_1}(a) \simeq A_{M_2}(\alpha), \qquad A_{M_1}(b) \simeq A_{M_2}(\beta).$$

Podobné zobrazení, jež zobrazuje $A_{M_1}(b)$ na $A_{M_2}(\beta)$, zobrazuje podle I a II (odstavec 2) úsek $A_{M_1}(a)$ (pamatujme, že $a \prec b$) na nějaký úsek množství $A_{M_2}(\beta)$, t. j. na nějaký úsek $A_{M_2}(\alpha')$, kde $\alpha' \prec \beta$. Tedy: $\alpha' \prec \beta$, $\beta \prec \alpha$, t. j. $\alpha' \prec \alpha$, tedy $\alpha' \neq \alpha$; a dále $A_{M_1}(a) \simeq A_{M_2}(\alpha)$, $A_{M_1}(a) \simeq A_{M_2}(\alpha')$; t. j. prvek a má v M_2 dva prvky homologické α, α' proti větě VI.

Následující věta obsahuje rozhodný krok k důkazu hlavní věty:

IX. *Buďtež M_1, M_2 dvě množství dobře uspořádaná; potom nastává vždy jeden z těchto případů:*

1. Buď jsou množství M_1 a M_2 podobná;

2. nebo je M_1 podobno nějakému úseku množství M_2;

3. nebo je M_2 podobno nějakému úseku množství M_1.

Důkaz: Budiž N_1 (resp. N_2) množství všech prvků z M_1 (resp. z M_2), k nimž existuje v množství M_2 (resp. M_1) homologický prvek. Tedy ke každému prvku z N_1 existuje v N_2 homologický prvek*) (neboť ten homologický prvek nemůže ležeti v $M_2 - N_2$, ježto prvky z $M_2 - N_2$ nemají homologických prvků v M_1) a rovněž ke každému prvku z N_2 existuje v N_1 homologický prvek. Podle VIII jest tedy

$$N_1 \simeq N_2. \tag{1}$$

Podle věty VII jsou nyní logicky možny pouze tyto čtyři případy:

1. Buď jest $N_1 = M_1$, $N_2 = M_2$; potom si množství M_1 a M_2 jsou podobná;

2. nebo jest $N_1 = M_1$, $N_2 =$ úseku množství M_2; potom M_1 jest podobno úseku množství M_2;

---

*) Tuto homologii jest bráti vlastně vzhledem k množstvím M_1, M_2; t. j. je-li a prvek z N_1, potom existuje prvek b z N_2 tak, že $A_{M_1}(a) \simeq A_{M_2}(b)$; ježto však N_1 se buď rovná M_1 nebo nějakému úseku množství M_1 (podle VII) — a rovněž tak N_2, tedy podle I (odstavec 2) jest $A_{M_1}(a) = A_{N_1}(a)$, $A_{M_2}(b) = A_{N_2}(b)$; t. j. tu homologii smíme bráti též vzhledem k množstvím N_1, N_2.

3. nebo jest $N_2 = M_2$, $N_1 =$ úseku množství M_1; potom jest M_2 podobno úseku množství M_1;

4. nebo jest $N_1 =$ úseku množství M_1, $N_2 =$ úseku množství M_2.

Věta IX bude zřejmě dokázána, dokážeme-li, že případ 4. nemůže nastati. Předpokládejme tedy, že případ 4. nastává; t. j. že

$$N_1 = A_{M_1}(a), \qquad N_2 = A_{M_2}(b).$$

Podle (1) jest potom

$$A_{M_1}(a) \cong A_{M_2}(b),$$

t. j. prvek a množství M_1 jest homologický prvku b množství M_2; to jest však spor, neboť a nemá homologického prvku v M_2, ježto a nemůže patřiti k množství $N_1 = A_{M_1}(a)$. Tím jest věta IX dokázána.

Poznamenejme ještě, že ony tři možnosti, uvedené ve větě IX, se navzájem vylučují; neboť za prvé, kdyby $M_1 \cong M_2$ a současně $M_1 \cong A_{M_2}(c)$, bylo by $M_2 \cong A_{M_2}(c)$, což je ve sporu s větou V; případy 1. a 2. (a z téhož důvodu případy 1. a 3.) se tedy navzájem vylučují. Ale také případy 2. a 3. se navzájem vylučují; neboť kdyby bylo $M_1 \cong A_{M_2}(c)$, $M_2 \cong A_{M_1}(d)$, potom by následkem poslední podobnosti byl úsek $A_{M_2}(c)$ podoben nějakému úseku množství $A_{M_1}(d)$, t. j. nějakému úseku množství M_1 (viz věty I a II odstavce 2); tedy by platilo

$$M_1 \cong A_{M_2}(c), \qquad A_{M_2}(c) \cong A_{M_1}(f),$$

t. j.

$$M_1 \cong A_{M_1}(f),$$

což je ve sporu s větou V.

Dokázali jsme tedy tuto **základní větu**: *Jsou-li M_1, M_2 dvě množství dobře uspořádaná, potom nastává vždy jeden a jen jeden z těchto tří případů:*

1. Buď jsou množství M_1 a M_2 podobná;

2. nebo je M_1 podobno nějakému úseku množství M_2;

3. nebo je M_2 podobno nějakému úseku množství M_1.