ODDÍL 5.

DODATKY K INTEGRÁLNÍMU POČTU.

Tento oddíl obsahuje důkazy některých vět, jež byly v kapitolách o integrálním počtu buď uvedeny bez důkazu nebo jejichž důkaz byl jen naznačen.

1. **Poznámky k odstavci 64.** Budiž dána funkce $f(x)$, jež jest definována v intervalu $\langle a, b \rangle$ všude vyjma v jistém množství reducibilním M; předpokládejme dále, že existuje funkce $F(x)$, jež je spojitá v intervalu $\langle a, b \rangle$ (všude bez výjimky) a jež má za derivaci funkci $f(x)$ všude v intervalu $\langle a, b \rangle$, vyjma nejvýše v bodech množství M. V tomto odstavci dokážeme tuto větu:

Věta I. Je-li $f(x) > 0$ pro každé x intervalu $\langle a, b \rangle$, vyjma nejvýše v bodech množství M, jest $F(x)$ funkcí rostoucí v $\langle a, b \rangle$ (všude bez výjimky).

Věta II. Je-li $f(x) \geqq 0$ pro každé x intervalu $\langle a, b \rangle$, vyjma nejvýše v bodech množství M, jest $F(x)$ funkcí neklesající v $\langle a, b \rangle$ (všude bez výjimky).

Záměnou $f(x)$ za $-f(x)$ dostaneme ihned příslušné věty, odpovídající předpokladům $f(x) < 0$, resp. $f(x) \leqq 0$.

Z věty II a z obdobné věty za předpokladu $f(x) \leqq 0$ plyne ihned: Je-li $f(x) = 0$ pro každé x intervalu $\langle a, b \rangle$, vyjma nejvýše v bodech množství M, potom je funkce $F(x)$ současně neklesající a nerostoucí v $\langle a, b \rangle$, t. j. $F(x)$ je konstantní v $\langle a, b \rangle$. Je-li tedy dána funkce $f(x)$ v $\langle a, b \rangle$ (vyjma v množství reducibilním) a jsou-li $F(x)$, $G(x)$ dvě funkce spojité v $\langle a, b \rangle$ (všude bez výjimky), jež mají v $\langle a, b \rangle$ derivaci rovnou $f(x)$ všude, vyjma v jistém reducibilním množství, potom má $F(x) - G(x)$ derivaci rovnou nule všude vyjma v množství reducibilním a tedy jest $F(x) - G(x)$ konstantní; z čehož plyne $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$. Tím jest dokázán výrok v odstavci 64, strana 132, řádek 13—14: *„Integrál (A), existuje-li při funkci $f(x)$, jest číslo jednoznačně stanovené.“* Je-li v $\langle a, b\rangle$ stále $f(x) > 0$ vyjma v jistém množství reducibilním, jest (při $a < b$) podle věty I

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) > 0,$$

čímž je dokázán výrok v odstavci 64, strana 151, řádek 10—11 (za předpokladu existence toho integrálu). Zbývá tedy dokázati věty I a II. Ježto oba důkazy probíhají téměř stejně (jenom místo $>$ jest při větě druhé třeba psáti $\geqq$ a místo „rostoucí“ je třeba psáti „neklesající“), provedu jen důkaz věty I.

Budiž tedy dána funkce $F(x)$, spojitá v $\langle a, b\rangle$, jež má kladnou derivaci pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$, jež neleží v jistém reducibilním množství M. Máme dokázati, že funkce $F(x)$ jest rostoucí v $\langle a, b\rangle$.

My si dokážeme tuto **pomocnou větu**: *Je-li α libovolné číslo ze $\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2$ a je-li $\langle c, d\rangle$ libovolný interval,**) *jehož žádný vnitřní bod nepatří k M^α, potom je $F(x)$ rostoucí v intervalu $\langle c, d\rangle$.*

Jakmile tato pomocná věta bude dokázána, jsme s důkazem naší věty hotovi; neboť M je podle předpokladu reducibilní; existuje tedy číslo α_0 tak, že M^{α_0} je množství prázdné. Interval $\langle a, b\rangle$ neobsahuje tedy žádný bod z M^{α_0}, tedy podle pomocné věty je $F(x)$ rostoucí v $\langle a, b\rangle$, jak bylo dokázati.

Důkaz pomocné věty provedeme transfinitní indukcí. Uvažujme výrok:

(A_α): Funkce $F(x)$ je rostoucí v každém intervalu $\langle c, d\rangle$, jehož žádný vnitřní bod nepatří k M^α.

Výrok (A_α) je správný pro $\alpha = 0$; neboť, je-li $\langle c, d\rangle$ interval, jehož žádný vnitřní bod nepatří k M^0, potom (ježto $M \subset M^0$) má funkce $F(x)$ kladnou derivaci v každém vnitřním bodě intervalu $\langle c, d\rangle$; dále je $F(x)$ spojitá v $\langle c, d\rangle$ a tedy je funkce $F(x)$ rostoucí v intervalu $\langle c, d\rangle$ (třeba podle věty o střední hodnotě diferenciálního počtu).

Předpokládejme nyní, že je dáno pořadové číslo $\alpha > 0$ a že výrok (A_β) je správný pro všechna β, jež jsou menší než α. Máme dokázati, že i výrok (A_α) je správný. Rozeznávejme dva případy:

Budiž předně α číslo prvního druhu, číslo bezprostředně předcházející označme δ, takže $\alpha = \delta + 1$. Budiž $\langle c, d\rangle$ libovolný

*) Slovem „interval“ rozumím v tomto odstavci vždy interval, jenž je obsažen v intervalu $\langle a, b\rangle$ (tedy $a \leqq c < d \leqq b$); jiné intervaly neuvažuji.

interval, jehož žádný vnitřní bod nepatří k M^α. Zvolme libovolné kladné číslo ε (tak malé, že $c+\varepsilon<d-\varepsilon$). Ježto množství M^α je derivace množství M^δ a ježto množství M^α nemá žádného bodu v otevřeném intervalu (c, d), tedy leží v intervalu $\langle c+\varepsilon, d-\varepsilon\rangle$ nejvýše konečný počet bodů množství M^δ. Interval $\langle c+\varepsilon, d-\varepsilon\rangle$ lze tedy rozdělit na konečný počet intervalů*) tak, že žádný vnitřní bod kteréhokoliv z těch intervalů nepatří k M^δ; ježto výrok (A_δ) je podle předpokladu správný, je funkce $F(x)$ rostoucí v každém z těch částečných intervalů a tedy (jak patrno) i v celém intervalu $\langle c+\varepsilon, d-\varepsilon\rangle$. Funkce $F(x)$ je tedy spojitá v intervalu $\langle c, d\rangle$ a rostoucí v každém intervalu $\langle c+\varepsilon, d-\varepsilon\rangle$ $(\varepsilon>0)$: tedy je $F(x)$ (jak čtenář okamžitě nahlédne) rostoucí v intervalu $\langle c, d\rangle$. Výrok (A_α) je tedy správný.

Budiž za druhé α číslo druhého druhu: lze tedy nalézti (viz oddíl 3, odstavec 4, věta VI) rostoucí posloupnost $\alpha_1<\alpha_2<\ldots$ tak, že $\lim\limits_{n=\infty} \alpha_n=\alpha$. Jest pak

$$M^\alpha=\prod_{\beta<\alpha} M^\beta=\prod_{n=1}^{\infty} M^{\alpha_n}. \tag{1}$$

Neboť především každé α_n jest menší než α, každý „faktor" M^{α_n} vpravo jest tedy též obsažen vlevo; čili $\prod\limits_{\beta<\alpha} M^\beta \subset \prod\limits_{n=1}^{\infty} M^{\alpha_n}$.

Za druhé budiž p nějaký bod z $\prod\limits_{n=1}^{\infty} M^{\alpha_n}$ a budiž β nějaké číslo menší než α; ježto podle definice (viz odd. 3, odst. 4, bod 4) jest α nejmenší číslo, jež je větší než všechna α_n, musí existovati n_0 tak, že $\beta\leqq\alpha_{n_0}$; pak je tedy $M^\beta\supset M^{\alpha_{n_0}}$ a tedy bod p, jenž patří k $M^{\alpha_{n_0}}$, patří tím spíše k M^β. Ježto je β libovolné číslo menší než α, patří p k množství $\prod\limits_{\beta<\alpha} M^\beta$ a tedy $\prod\limits_{\beta<\alpha} M^\beta \supset \prod\limits_{n=1}^{\infty} M^{\alpha_n}$. Tedy platí (1). Budiž nyní $\langle c, d\rangle$ libovolný interval, jehož žádný vnitřní bod nepatří k M^α. Zvolme libovolné kladné číslo ε (tak malé, že $c+\varepsilon<d-\varepsilon$) a označme znakem N^β průnik uzavřeného) množství M^β s uzavřeným intervalem $\langle c+\varepsilon, d-\varepsilon\rangle$. Podle (1 jest

$$N^\alpha=\prod_{n=1}^{\infty} N^{\alpha_n}.$$

---

*) Za dělicí body zvolím právě ony body z M^δ, jež leží v intervalu $(c+\varepsilon, d-\varepsilon)$.

Množství N^{α} jest prázdné; množství N^{α_1}, $N^{\alpha_2}, \dots$ tvoří „nerostoucí" posloupnost uzavřených ohraničených množství; jejich průnik je prázdný: tedy (podle oddílu 4, odstavce 4, věty III) aspoň jedno množství $N^{\alpha_{n_0}}$ musí býti prázdné. V intervalu $\langle c+\varepsilon, d-\varepsilon\rangle$ neleží tedy žádný bod množství $M^{\alpha_{n_0}}$ a tedy, podle předpokladu (ježto $\alpha_{n_0} < \alpha$), je $F(x)$ rostoucí v intervalu $\langle c+\varepsilon, d-\varepsilon\rangle$. Funkce $F(x)$ jest tedy spojitá v intervalu $\langle c, d\rangle$ a rostoucí v každém intervalu $\langle c+\varepsilon, d-\varepsilon\rangle$ $(\varepsilon > 0)$; tedy je $F(x)$ rostoucí v intervalu $\langle c, d\rangle$. Výrok (A_α) je tedy správný.

Na základě transfinitní indukce je tedy výrok (A_α) správný pro všechna α ze $\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2$, čímž pomocná věta je dokázána.

2. **Poznámka k odstavci 66.** Tento odstavec nepotřebuje vlastně poznámek; potřebné věty byly dokázány v oddíle 4. odstavci 10 (hlavně viz větu III). Jenom musí dáti čtenář pozor na názvosloví, jež je v tomto dodatku o teorii množství trochu změněno. Na straně 153, řádek 13—11 zdola, se praví: Množství $\mathfrak{B}$ (dokonalé, ležící v intervalu $\langle a, b\rangle$) dostaneme, vyloučíme-li z $\langle a, b\rangle$ vnitřní body v jednoduše spočetném množství intervalů $\delta_1, \delta_2, \dots$ atd. do nekonečna. Žádné dva z těchto intervalů nemají společné body.

Při tom δ_k jest myšleno jako uzavřený interval, třeba $\delta_k = \langle a_k, b_k\rangle$. Tedy vnitřní body toho intervalu tvoří otevřený interval (a_k, b_k); ty intervaly (a_k, b_k) $(k = 1, 2, \dots)$ tvoří právě styčné intervaly k $\mathfrak{B}$; požadavek, že žádné dva z intervalů $\delta_1, \delta_2, \dots$ nemají společných bodů, znamená patrně, že žádné dva styčné intervaly nemají společných koncových bodů; to je však právě tvrzení věty III v oddílu 4, odstavci 10.

3. **Poznámka k cvičení 24 na straně 327.** Na řádce 22 se tvrdí bez důkazu, že množství reducibilní má míru (délku) nulovou podle Jordana. Při tom se myslí na ohraničená množství v R_1. Dokažme tuto větu.

Budiž tedy M reducibilní ohraničené množství v R_1. Máme dokázati: Je-li ε libovolné číslo kladné, pak existuje konečný počet intervalů, jež pokrývají*) množství M a jejichž úhrnná délka je menší než ε (definice délky podle Jordana byla v odstavci 90 zavedena trochu jinak, čtenář si však snadno dokáže, že naše tvrzení jest postačující pro to, aby množství M mělo délku nulovou ve smyslu odstavce 90). Je zřejmě lhostejno, užívám-li při pokrývání množství M intervalů uzavřených či

*) T. j. každý bod z M leží aspoň v jednom z těch intervalů.

otevřených; my budeme užívati (pro větší pohodlí) intervalů otevřených.

Přistupme k důkazu. Množství M je reducibilní, tedy (oddíl 4, odstavec 12, věta IV) je jeho derivace M^1 nejvýše spočetná; body z M^1 označme $x_1, x_2, x_3, \dots$ (řada tato je buď konečná nebo nekonečná). Kolem každého bodu x_n jako středu sestrojme otevřený interval $I_n = (x_n - \varepsilon/2^{n+2}, x_n + \varepsilon/2^{n+2})$; intervaly $I_1, I_2, \dots$ pokrývají uzavřené ohraničené množství M^1, tedy podle zobecněné věty Borelovy (odstavec 191) lze z intervalů $I_1, I_2, \dots$ vybrati *konečnou* skupinu intervalů

$$K_1, K_2, \dots, K_m,$$

jež pokrývají množství M^1; celková délka intervalů $K_1, K_2, \dots, K_m$ je menší než

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

Budiž N množství oněch bodů z množství M, jež *nejsou obsaženy v žádném z intervalů* $K_1, K_2, \dots, K_m$. Tvrdím: Množství N je konečné (po případě ovšem prázdné). Neboť každý bod zhuštění množství N by musil býti tím spíše bodem zhuštění množství M, t. j. musil by patřiti k M^1. Ale každý bod z M^1 leží v některém otevřeném intervalu K_i, jenž neobsahuje žádný bod z N; žádný bod z M^1 nemůže tedy býti bodem zhuštění množství N. Množství N nemá tedy vůbec bodů zhuštění a jest ohraničené; tedy (podle věty oddílu 4, odstavec 3) jest N množství konečné; nechť se skládá třeba z p bodů. Kolem každého bodu množství N (je-li $p > 0$) jakožto středu opišme otevřený interval délky $\varepsilon/2p$; označme ty intervaly $L_1, L_2, \dots, L_p$. Intervaly $L_1, L_2, \dots, L_p$ pokrývají tedy všechny body z M, jež neleží v žádném z intervalů $K_1, K_2, \dots, K_m$. Tedy intervaly

$$L_1, L_2, \dots, L_p, \quad K_1, K_2, \dots, K_m$$

(jichž je konečný počet) pokrývají *celé* množství M. Součet jejich délek jest pak menší než

$$p\frac{\varepsilon}{2p} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \varepsilon,$$

čímž naše tvrzení dokázáno.