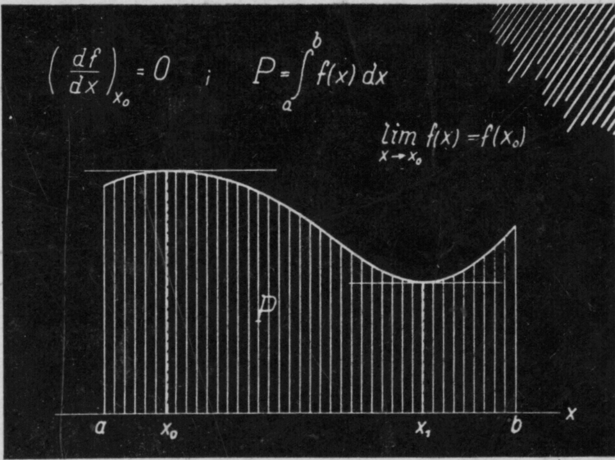
Co je a nač je vyšší matematika?

ČESTA K VĚDĚNÍ SV. 20



PROF. DR. EDUARD ČECH

CO JE A NAČ JE VYŠŠÍ MATEMATIKA?

JEDNOTA ČESKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ V PRAZE

K 26,—

CESTA K VĚDĚNÍ

E. Čech:

CO JE A NAČ JE VYŠŠÍ MATEMATIKA?

Tuto otázku si položil jistě mnohý z čtenářů a byla jistě mnohokráte zodpovídána učitelem na střední škole.

Přední náš matematik ukazuje širokým výkladem, jaké úvahy se provádějí v t. zv. vyšší matematice, a vysvětluje čtenáři základní věci: pojem limity funkce, co je derivace a co je integrál. Tyto tři základní pojmy přibližuje čtenáři názorně, vycházeje z malých poznatků o elementární algebře a geometrii, které jsou kvintánovi běžné.

Aplikace limity, derivace, integrálu na typických úlohách, s kterými se takřka denně v životě setkáváme, odpovídají čtenáři na druhou část položené otázky.

A mnohá cvičení s řešením doplňují živé věty autorovy, které se vám budou zdát, jako by byly pronášeny s úplnou samozřejmostí.

JČMF

C E S T A K V Ě D Ě N Í

PROF. DR. EDUARD ČECH

CO JE A NAČ JE VYŠŠÍ MATEMATIKA?

S 26 obrazci

Vyšlo jako 20. svazek sbírky
CESTA K VĚDĚNÍ
vydávané Jednotou českých matematiků a fysiků v Praze za redakce
Dra R. BRDIČKY, Dra F. VYČICHLA a Dra L. ZACHOVALA

1 9 4 2

NÁKLADEM JEDNOTY ČESKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ V PRAZE
TISKEM KNIHTISKÁRNY „PROMETHEUS“ V PRAZE VIII

ÚVOD

1. Pojem funkce. Jeden z nejdůležitějších pojmů v matematice vůbec je pojem *funkce*. Říkáme, že jedna veličina je funkcí veličiny druhé, když je první veličina určitým způsobem *závislá* na veličině druhé; to znamená, že když známe hodnotu veličiny druhé, můžeme si vypočítat hodnotu veličiny prvé. Na př. obvod čtverce můžeme vypočítat, známe-li délku strany, tedy obvod čtverce je funkcí délky strany. Počet je velmi jednoduchý; znamená-li a délku strany a o obvod, jest

$$o = 4 . a;$$

při tom musíme ovšem délku strany i obvod vyjádřit ve stejné jednotce, na př. 1 cm. Také obsah čtverce je funkcí délky strany; znamená-li p obsah a a zase délku strany, jest $p = a . a$ neboli

$$p = a^2;$$

musíme ovšem jednotku délky a jednotku plošnou volit souhlasně, na př. 1 cm a 1 cm^2 To jsou příklady na *funkce jedné proměnné*, t. j. v každém příkladě se vyskytují jen dvě veličiny, z nichž jedna je funkcí druhé. Jsou také *funkce dvou proměnných*; příklad takové funkce nám poskytuje známá Pythagorova věta, podle níž lze počítati délku přepony pravoúhlého trojúhelníka, známe-li délky obou odvěsen. Délka přepony je funkcí délek obou odvěsen, tedy funkcí dvou proměnných, a Pythagorova věta říká, jak se tato funkce počítá. Znamenají-li písmena a, b délky obou odvěsen a c délku přepony, jest

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

V této knížce budeme studovati pouze funkce jedné proměnné. Ostatně se všech výsledků o funkcích jedné proměnné dá užít na funkce dvou proměnných. Všímáme-li si totiž na př. jen těch pravoúhlých trojúhelníků, u kterých má odvěsna b určitou numerickou hodnotu, třeba $b = 2$, je přepona c funkcí jedné proměnné, totiž odvěsny a; jest $c = \sqrt{a^2 + 4}$.

2. Přímá úměrnost. Jest mnoho typů funkcí a v této knížce budeme studovat ovšem jen ty nejjednodušší. Začneme jedním velmi elementárním, ale důležitým typem závislosti; je to známá přímá úměrnost. Abychom měli zcela určitý příklad na mysli, dejme tomu, že auto jede po rovné silnici rychlostí 45 km za hodinu. Dráha, kterou auto ujede za určitou dobu, závisí na této době neboli je funkcí této doby. Volíce minutu za jednotku času a 1 km za jednotku délky, můžeme si sestavit tabulku:

doba	10	20	30	40	50	60	70
dráha	$7\frac{1}{2}$	15	$22\frac{1}{2}$	30	$37\frac{1}{2}$	45	$52\frac{1}{2}$

Tabulku tuto mohli bychom libovolně rozšířit. Zákonitost takové závislosti se dá vyslovit různými způsoby. Zvolíme si ten, který je vhodný pro další naše úvahy; poměr obou veličin, tedy zlomek

$$\frac{\text{dráha}}{\text{doba}},$$

je ve všech případech stejný:

$$\frac{7\frac{1}{2}}{10} = \frac{15}{20} = \frac{22\frac{1}{2}}{30} = \frac{30}{40} = \frac{37\frac{1}{2}}{50} = \ldots = \frac{3}{4}.$$

Říkáme, že ten poměr je stálý neboli že je to konstanta. Při přímé úměrnosti poměr obou veličin je konstanta. Označíme-li si dobu písmenem t a dráhu písmenem s, je

$$\frac{s}{t} = \frac{3}{4}$$

neboli

$$s = \tfrac{3}{4} \cdot t.$$

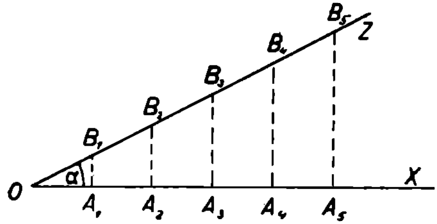
Jiný příklad přímé úměrnosti máme v závislosti obvodu kružnice na jejím poloměru. Kolikrát je větší poloměr, tolikrát je větší obvod. Proto poměr obvodu k poloměru je u všech kružnic stálý, je to konstanta. Polovina této konstanty je známé Ludolfovo číslo $\pi = 3{,}14159\ldots$; v této knížce se dovíte, jak snadno se může pomocí vyšší matematiky počítati číslo π na velký počet míst. Znamená-li r poloměr a o obvod kružnice, je

$$\frac{o}{r} = 2\pi$$

neboli

$$o = 2\pi r.$$

Uvedeme si ještě jeden velmi důležitý příklad přímé úměrnosti. Zvolme si nějaký ostrý úhel $\sphericalangle XOZ = \alpha$.



Obr. 1.

Zvolíme-li si na rameni OX úhlu α bod A a vztyčíme-li v něm kolmici k OX, protne tato kolmice druhé rameno OZ úhlu α v bodě B. Tím vznikne pravoúhlý trojúhelník OAB s pravým úhlem při vrcholu A. Jelikož poloha bodu A na rameni OX úhlu α je libovolná, můžeme si takových pravoúhlých trojúhelníků OAB myslit nekonečně mnoho. V obr. 1 je vyznačeno pět možných poloh, které jsou rozlišeny indexy. Všecky ty pravoúhlé trojúhelníky jsou si podobné; proto poměr

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OA}}$$

je konstanta, jejíž velikost je určena úhlem α. Jak většina z vás ví, říkáme této konstantě tangens úhlu α a značíme ji tg α. Je tedy

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \operatorname{tg} \alpha,$$

neboli

$$\overline{AB} = \overline{OA} \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Délka úsečky AB je přímo úměrná délce úsečky OA.

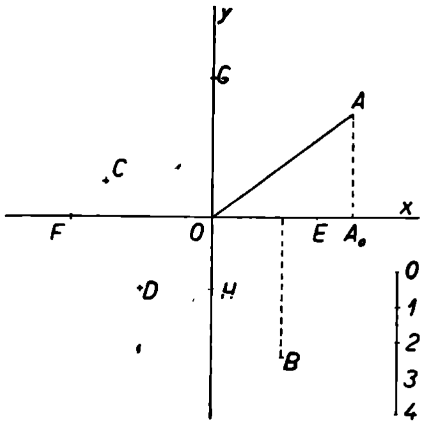
3. Pravoúhlé souřadnice. Ke konci minulého odstavce jsme si připomněli z trigonometrie pojem tangenty. Mimo tento pojem nebudeme v této knížce potřebovat z trigonometrie už nic. Zato se častěji zde setkáme se základy analytické geometrie; ale také tu si zopakujeme všecko znovu, tím spíše, že nebudeme potřebovat nic složitého, nýbrž pouze ty nejjednodušší věci. Je to především pojem pravoúhlých souřadnic bodu v rovině, který si zopakujeme v tomto odstavci. Musíme si zvolit určitý bod O, který se jmenuje počátek. Počátkem si vedeme „vodorovnou" přímku, které se říká osa x. Je zvykem narýsovat si také „svislou"*). přímku procházející počátkem, které se říká osa y. [Ale osa y už není tak důležitá jako osa x a mohli bychom se bez ní obejít.] Kromě toho si potřebujeme ještě zvolit určitou jednotku délky, abychom mohli vyjadřovat délky nepojmenovanými čísly.

Všimněme si nyní v obr. 2 třeba bodu A. Abychom dostali jeho souřadnice, spustíme s něho kolmici na osu x; pata této kolmice je v obr. 2 označena A_0. Bod A má dvě souřadnice x a y, při čemž jest

*) V následujícím slovy vodorovná přímka rozumíme přímku, která má směr řádku; přímku k ní kolmou jmenujeme svislá přímka.

$$x = \overline{OA_0},\ y = \overline{A_0A},$$

tedy podle měřítka k obrazci připojeného $x = 4$, $y = 3$. Píšeme stručně $A = (4; 3)$; to tedy znamená, že první souřadnice bodu A má hodnotu 4 a druhá hodnotu 3. Je však velmi důležité, že se při určování souřadnic bodu užívá určitých znaménkových pravidel, která zní takto: Sou-



Obr. 2.

řadnice x se bere kladně jen tehdy, když bod A_0 padne napravo od počátku neboli když bod A leží napravo od osy y; když bod A_0 padne nalevo od počátku neboli když bod A leží nalevo od osy y, bereme souřadnici x záporně; zbývá případ, kdy bod A_0 je v počátku, t. j. kdy bod A leží na ose y; tu je ovšem $x = 0$. Souřadnice y se bere kladně jen tehdy, když bod A je nahoře nad osou x; je-li bod A dole pod osou x, bereme souřadnici y záporně; leží-li konečně bod A na ose x, je ovšem $y = 0$.

Všecky možné znaménkové případy jsou zachyceny v obr. 2, každý jedním příkladem; jest

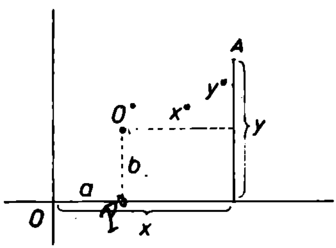
$A = (4; 3)$, $B = (2; -4)$, $C = (-3; 1)$, $D = (-2; -2)$,
$E = (3; 0)$, $F = (-4; 0)$, $G = (0; 4)$, $H = (0; -2)$,
$O = (0; 0)$.

Vraťme se k bodu $A = (4; 3)$. V obr. 2 je narýsován pravoúhlý trojúhelník OA_0A; délky odvěsen tohoto trojúhelníka jsou souřadnice bodu A a délka přepony je vzdálenost bodu A od počátku. Tedy je podle Pythagorovy věty

$$\overline{OA} = +\sqrt{x^2 + y^2}. \tag{3·1}$$

(3·1) je vzorec pro vzdálenost bodu od počátku. Měli jsme sice při jeho odvození na mysli bod, jehož obě souřadnice x a y jsou čísla kladná; ale vzorec ovšem platí, i když některá souřadnice je záporná nebo když jsou obě záporné, neboť druhá mocnina x^2 je nezávislá na znamení čísla x [na př. $(-4)^2 = 4^2 = 16$] a stejně y^2. Vzorec (3·1) platí také, když x nebo y je rovné nule. Na př. u bodů E a F je $y = 0$, a vzdálenost od počátku je zřejmě rovna absolutní hodnotě čísla x.*)

4. Změna počátku. V obr. 3 máme vyznačeny tři body O, O^*, A. Považujeme-li O za počátek souřadnic, má bod O^* dvě souřadnice, které si označíme a, b; při stejném počátku má také bod A dvě souřadnice, které si označíme x, y. Můžeme si však zavésti ještě druhou soustavu souřadnou, v které je počátkem bod O^*; ve druhé soustavě bude míti bod A zase dvě souřadnice, ale jiné než dříve;



Obr. 3.

*) Když x není záporné, pak absolutní hodnota čísla x je číslo samo; když x je záporné, pak absolutní hodnota čísla x se liší od čísla x pouze znamením. Absolutní hodnotu čísla x značíme $|x|$; na př. $|3| = 3$, $|-4| = 4$, $|0| = 0$.

označíme si je x^*, y^*. V obr. 3 jsou vyznačeny všecky souřadnice a, b, x, y, x^*, y^*. Z obrazce je patrné, že

$$\begin{aligned} x^* &= x - a, \\ y^* &= y - b. \end{aligned} \tag{4·1}$$

Obr. 3 představuje ovšem pouze jednu znaménkovou možnost, ale vzorce (4·1) jsou ve všech případech správné. Nejnázorněji se o tom přesvědčíme, když si představíme proměnnou soustavu souřadnic, jejíž počátek putuje z polohy O do polohy O^* po lomené čáře OPO^* (viz obr. 3). Tato změna souřadnicové soustavy se děje ve dvou krocích; při prvém kroku putuje počátek vodorovně z polohy O do polohy P, při druhém kroku putuje počátek svisle z polohy P do polohy O^*. Při prvém kroku zůstává druhá souřadnice libovolného bodu nezměněna a mění se pouze první souřadnice; při kladném a tato souřadnice zřejmě stále klesá, a to od hodnoty x do hodnoty $x^* = x - a$; při záporném a naopak tato souřadnice stále stoupá, a to zase od hodnoty x do hodnoty $x^* = x - a$ (která právě při záporném a je větší než x). Při druhém kroku zůstává naopak první souřadnice nezměněna a mění se pouze druhá souřadnice; při kladném b tato souřadnice zřejmě stále klesá, a to od hodnoty y do hodnoty $y^* = y - b$; při záporném b naopak tato souřadnice stále stoupá, a to zase od hodnoty y do hodnoty $y^* = y - b$ (která je při záporném b větší než y). Proto jsou vzorce (2) správné, ať již jsou čísla a, b kladná či záporná. Samozřejmě jsou správné také, když a nebo b je rovné nule; je-li $a = 0$, odpadne prvý krok, je-li $b = 0$, odpadne druhý krok.

Když kombinujeme vzorec (4·1) se vzorcem (3·1), dospějeme k výrazu

$$+\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \tag{4·2}$$

pro vzdálenost bodu $(a; b)$ od bodu $(x; y)$. Neboť v nové soustavě souřadnic, v které bod $(a; b)$ je počátkem, bude podle vzorce (4·1) míti bod $(x; y)$ nové souřadnice $x - a$, $y - b$, které dosadíme do vzorce (3·1).

5. Některé geometrické příbuznosti. Geometrickou příbuzností rozumíme pravidlo, které každému bodu A přiřadí určitý nový bod A', zvaný obraz bodu A. V tomto odstavci si krátce promluvíme o třech velmi jednoduchých geometrických příbuznostech. Budeme si tyto příbuznosti definovati analyticky, t. j. tak, že udáme pravidlo, podle něhož se ze souřadnic x, y libovolného bodu A vypočtou souřadnice x', y' jeho obrazu A'.

První příklad. Analytické pravidlo zní

$$x' = x, \quad y' = -y.$$

To je patrně překlopení kolem osy x nebo, jak se také říká, osová souměrnost, u které osa x je osou souměrnosti. Každý bod na ose x splyne se svým obrazem; body nad osou x mají obrazy pod osou x; body pod osou x mají obrazy nad osou x.

Druhý příklad. Analytické pravidlo zní

$$x' = -x, \quad y' = y.$$

To je patrně překlopení kolem osy y neboli osová souměrnost, u které osa y je osou souměrnosti. Každý bod na ose y splyne se svým obrazem; body napravo od osy y mají obrazy nalevo od osy y; body nalevo od osy y mají obrazy napravo od osy y.

Třetí příklad. Analytické pravidlo zní

$$x' = -x, \quad y' = -y.$$

To je středová souměrnost, při které je počátek středem souměrnosti. Počátek O splyne se svým obrazem; je-li A libovolný jiný bod, leží jeho obraz A' na přímce OA tak, že bod O je právě uprostřed mezi body A, A'. Abychom z bodu $A = (x; y)$ dostali jeho obraz $A' = (-x; -y)$, musíme změnit znamení obou souřadnic; to můžeme provésti tak, že nejdříve změníme znamení při x a potom při y; to znamená geometricky, že bod A' dostaneme tím, že napřed překlopíme bod A kolem osy y a potom bod, který takto dostaneme, překlopíme kolem osy x. Můžeme také provésti změny znamení v obráceném pořádku, tedy napřed překlopit kolem osy x a potom kolem osy y.

6. Přímky procházející počátkem. Vraťme se k obr. 1. Přímka OX je v něm vodorovná a proto ji budeme považovat za osu x; počátkem bude ovšem v obrazci vyznačený bod O. Je-li $B = (x; y)$ libovolný bod na rameni OZ úhlu $\alpha = \sphericalangle XOZ$, jest $x = \overline{OA}$, $y = \overline{AB}$. Víme, že poměr $y : x = \overline{AB} : \overline{OA}$ je konstanta; tato konstanta je $\operatorname{tg} \alpha$, ale pro stručnost ji označme k, pišme tedy

$$k = \operatorname{tg} \alpha. \qquad (6{\cdot}1)$$

Tedy pro všecky naše body $B = (x; y)$ je splněna rovnice

$$y = kx. \qquad (6{\cdot}2)$$

Ty body B, kterých jsme si dosud všímali, leží na přímce OZ, ale nevyplní celou přímku OZ. Chceme-li dostati celou přímku OZ, musíme ji prodloužit za bod O, t. j. k bodům $B = (x; y)$ musíme ještě připojit body C, které dostaneme z bodů B pomocí středové souměrnosti o středu O. Z odst. 5 víme, že $C = (-x; -y)$. Protože

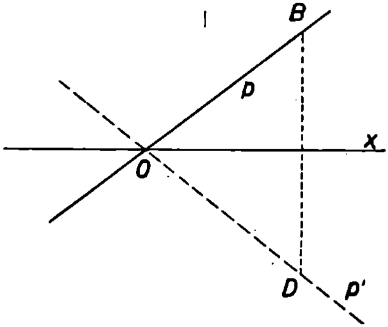
$$\frac{-y}{-x} = \frac{y}{x}$$

a protože souřadnice x, y bodu B vyhovují rovnici (6·2), vyhovují téže rovnici také souřadnice bodu C. Protože samozřejmě i souřadnice bodu O rovnici (2) vyhovují, máme výsledek, že pro každý bod $(x; y)$ přímky OZ je splněna rovnice (6·2). Jiné body už rovnici (6·2) vyhovovat nemohou. Neboť je-li dán bod $(x; y)$, který rovnici (6·2) vyhovuje, uvažme, že jistě je na přímce OZ bod, jehož první souřadnice se rovná danému číslu x; druhá souřadnice toho bodu se však podle toho, co už víme, dá počítat pomocí rovnice (6·2) a musí se tedy rovnat danému číslu y, t. j. obě daná čísla x, y jsou souřadnicemi jistého bodu přímky OZ, neboli daný bod $(x; y)$ leží na přímce OZ. Protože tedy souřadnice každého bodu přímky OZ vyhovují rovnici (6·2) a protože také každý bod, jehož souřadnice rovnici (6·2) vyhovují, leží na přímce OZ, říkáme, že (6·2) je rovnice přímky OZ. Abychom mohli v určitém případě rovnici (6·2) napsat, potřebujeme pouze znát číslo k, které se jmenuje směrnice přímky OZ. Víme, že se směrnice k počítá ze vzorce (6·1), v kterém α znamená úhel přímky OZ s osou x.

Ale jedné věci si musíme všimnout! Je-li dán počátek O a ovšem i vodorovná osa x a je-li dán ostrý úhel α, existují v rovině **dvě** přímky, které procházejí počátkem a svírají s osou x úhel α. V obr. 4 je ta z nich, kterou jsme se dosud zabývali, vytažena plně a označena p, a druhá je vyčárkována a označena p'. Z přímky p vznikne přímka p' překlopením kolem osy x. Je-li D bod souměrně sdružený s bodem $B = (x; y)$ vzhledem k ose x, víme z odst. 5, že $D = (x; -y)$. Protože rovnice přímky p je $y = kx$, je patrně

$$y = -kx$$

rovnice přímky p'. Směrnicí přímky p' rozumíme záporné číslo $-k$. Tedy směrnice je kladná, když probíhajíce přímku zleva doprava, probíháme ji zdola nahoru neboli když většímu x odpovídá větší y, a směrnice je záporná, když probíhajíce přímku zleva doprava, probíháme ji shora dolů neboli když většímu x odpovídá menší y.

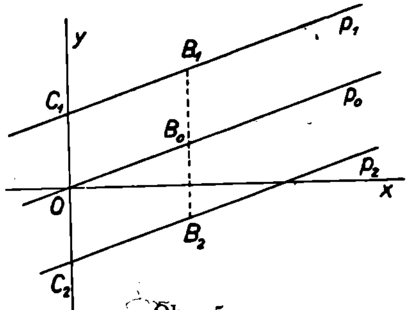


Obr. 4.

Můžeme tedy říci, že při každé volbě čísla k, nevyjímajíc čísla záporná, znamená (6·2) rovnici určité přímky jdoucí počátkem. To platí i pro $k = 0$, neboť $y = 0$ je zřejmě rovnice osy x. Má každá přímka jdoucí počátkem rovnici tvaru (6·2)? Kladná odpověď by byla ukvapená; ke svislé přímce jdoucí počátkem, t. j. k ose y, nedospějeme z rovnice (6·2) při žádné volbě čísla k. To je ovšem samozřejmé: vedeme-li počátkem přímku p ve směru jiném než svislém, je na přímce p ke každému x určitý bod, jehož prvá souřadnice je rovna x, a rovnice (6·2) udává právě předpis, podle něhož se ze souřadnice x počítá souřadnice y; naproti tomu je u všech bodů na ose y souřadnice x rovna nule, takže neexistuje předpis, podle něhož by se souřadnice y počítala ze souřadnice x.

Aby rovnice (6·1) měla všeobecnou platnost, činíme následující znaménkové dohody. Mějme libovolnou přímku p a označme α úhel této přímky s osou x. Je-li přímka p svislá, je α úhel pravý; říkáme, že přímka p nemá směrnici a symbolu $\operatorname{tg}\alpha$ nedáváme žádný numerický význam. Je-li přímka p vodorovná, je $\alpha = 0$ a $\operatorname{tg}\alpha = 0$. Je-li konečně přímka p kosá k ose x, tedy α úhel ostrý, dáme úhlu α znamení plus nebo minus podle toho, zda probíhajíce p zleva doprava, probíháme ji zdola nahoru, či shora dolů. Stejné znamení jako α má také $\operatorname{tg}\alpha$. Potom platí vzorec (1) pro směrnici přímky p, není-li ovšem p svislá. Při tom nemusí přímka p procházeti počátkem. Přímky mezi sebou rovnoběžné mají stejné směrnice (nejsou-li svislé). Směrnice přímky zůstane beze změny, změníme-li počátek souřadnic.

7. Rovnice přímky. Dosud jsme mluvili pouze o přímkách jdoucích počátkem. Nechť nyní p je libovolná přímka. Je-li p svislá, mají všecky její body stejnou souřadnici x; je-li a numerická hodnota souřadnice x, leží také obráceně každý bod (a, y) na přímce p; proto je $x = a$ rovnice přímky p. Není-li přímka p svislá, má určitou směrnici k (viz konec odst. 6).



Obr. 5.

Přímka p protne pak osu y v určitém bodě C. Souřadnice x bodu C je rovna nule; souřadnici y bodu C si označme l, takže $C = (0; l)$. Může býti $l = 0$ nebo $l > 0$ nebo $l < 0$; je-li $l = 0$, prochází p počátkem O; je-li $l > 0$, leží bod C nad bodem O, a je-li $l < 0$, leží bod C pod bodem O. Vzdálenost $\overline{OC}$ je ve všech případech rovna číslu $|l|$. (V obr. 5 je $l > 0$ u přímky p_1, $l < 0$ u přímky p_2.)

Rovnici přímky p si můžeme odvoditi takto. Veďme počátkem O rovnoběžku p_0 s přímkou p. Přímky p a p_0 mají stejnou směrnici k. Ke každému číslu x máme na přímce p bod B a na přímce p_0 bod B_0 s první souřadnicí rovnou x. Druhou souřadnici označme y u bodu B, y_0 u bodu B_0, takže $B = (x; y)$, $B_0 = (x; y_0)$. V případě $l > 0$ leží (viz obr. 5) bod B ve vzdálenosti l nad bodem B_0, v případě $l < 0$ leží bod B ve vzdálenosti $|l|$ pod bodem B_0;

proto je v obou případech $y = y_0 + l$ (a to platí ovšem i v případě $l = 0$, neboť potom B splyne s B_0). My však známe rovnici přímky p_0, t. j. víme, že $y_0 = kx$. Protože $y = y_0 + l$, jest

$$y = kx + l. \tag{7·1}$$

Tedy pro každý bod $(x; y)$ přímky p platí rovnice (7·1). Protože je na přímce p ke každému číslu x určitý bod $(x; y)$, a protože (7·1) je předpis, jímž z čísla x počítáme číslo y, vidíme, že rovnice (7·1) je splněna jen tehdy, když bod $(x; y)$ leží na přímce p. Proto je (7·1) rovnice přímky p. Ostatně můžeme ještě říci určitěji: Když bod $(x; y)$ neleží na přímce p, leží buďto nad přímkou p nebo pod ní. Zřejmě je v prvém případě

$$y > kx + l$$

a ve druhém

$$y < kx + l.$$

Obráceně buďtež dána dvě libovolná čísla k a l. Pak můžeme napsati rovnici (7·1). Na ose y si sestrojme bod $C = (0; l)$. Dále určeme úhel α z rovnice

$$\operatorname{tg} \alpha = k, \tag{7·2}$$

při čemž se řídíme znaménkovým pravidlem vysvětleným v odst. 6. Vedeme-li si bodem C přímku p, která tvoří s osou x úhel α (pozor na znamení úhlu α!), je patrně (7·1) rovnicí přímky p.

Rovnice (7·1), v které k a l jsou určitá daná čísla, dává předpis, jímž ke každému číslu x můžeme počítati určité číslo y, t. j. rovnice (7·1) definuje funkci y proměnné x. Funkce takového tvaru se jmenuje lineární funkce.*)

Promluvme si ještě o této geometrické úloze. Daným bodem $A = (a; b)$ je vedena přímka p daného směru; jak zní rovnice

---

*) Určitěji se říkává lineární celistvá funkce; lineární lomená funkce má tvar $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$, kde a, b, c, d jsou daná čísla $(c \neq 0)$.

přímky p? Je-li přímka p svislá, je žádaná rovnice $x = a$. Vyloučíme-li tento případ, má přímka p určitou směrnici k, kterou počítáme ze vzorce (7·2). Prochází-li přímka p počátkem, je její rovnice $y = kx$. Neprochází-li přímka p počátkem, můžeme si počátek posunouti do bodu A. Označíme-li si hvězdičkou souřadnice v posunuté soustavě, jest $y^* = kx^*$ rovnice přímky p v posunuté soustavě. Tedy podle (4·1) rovnice přímky p v původní soustavě je

$$y - b = k(x - a). \tag{7·3}$$

Rovnici (7·3) bychom mohli uvésti na tvar (7·1), kde $l = b - ka$. Můžeme však také psáti rovnici (7·3) ve tvaru

$$\frac{y - b}{x - a} = k, \tag{7·4}$$

při čemž ovšem vlastně vylučujeme jeden bod přímky p, totiž bod $A = (a; b)$, neboť levá strana rovnice (7·4) je bezvýznamná pro $x = a$.

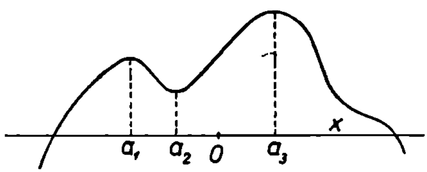
Jak zní rovnice přímky p, která spojuje bod $A = (a; b)$ s bodem $P = (x_0; y_0)$? (Dané body A a P buďtež mezi sebou různé.) Je-li $x_0 = a$, je přímka p svislá a její rovnice je $x = a$. Vyloučíme-li tento případ, má přímka p rovnici tvaru (7·3), kde si ovšem směrnici k musíme vypočítati. To je lehké, neboť v každém bodě $(x; y)$ přímky p, mimo bod A, musí platiti vztah (7·4), zejména v bodě P. Tedy přímka p má rovnici (7·3), do které je nutno dosaditi

$$k = \frac{y_0 - b}{x_0 - a}. \tag{7·5}$$

8. Grafické znázornění funkce. Se slovem funkce jsme se seznámili už v odst. 1. Je-li dána nějaká funkce jedné proměnné, označme si písmenem x hodnoty, kterých nabývá ta proměnná (podrobněji se říkává, že x je nezávisle proměnná), a písmenem y hodnoty, kterých nabývá funkce. Naše funkce tedy je pravidlo, podle něhož se k hodnotě zvolené pro x dá počítati příslušná hodnota pro y, což si vyjádříme symbolicky takto:

$$y = f(x). \tag{8·1}$$

Nyní si můžeme zavésti v rovině soustavu pravoúhlých souřadnic a znázorniti si každý pár sobě příslušných hodnot x a $y = f(x)$ bodem $(x; y)$. Tím dostaneme čáru (viz obr. 6), které se říká *graf* naší funkce. Různým funkcím patří ovšem různé grafy. Všeobecně lze o grafu funkce, která přiřazuje každé hodnotě x jedinou hodnotu y, říci pouze



Obr. 6.

tolik, že žádná rovnoběžka s osou y jej nemůže protnout ve více než jednom bodě. Jsou funkce tak složité, že jejich graf se nedá narýsovat, ba že je skoro nemožné si jej představit. Ale v jednoduchých případech se dá graf funkce snadno narýsovat a je pro svou názornost velmi dobrou pomůckou při studiu funkce.

Uveďme si několik vlastností funkcí, které se dají na grafu dobře pozorovat. Říkáme, že funkce $f(x)$ *stále roste*, když většímu x odpovídá vždy větší y, a že funkce $f(x)$ *stále klesá*, když většímu x odpovídá vždy menší y.

Když graf rostoucí funkce probíháme od levé strany k pravé, jdeme stále zdola nahoru; probíháme-li graf klesající funkce od levé strany k pravé, jdeme stále shora dolů. Funkce graficky znázorněná v obr. 6 sice není ani rostoucí ani klesající funkce, ale existují tři čísla a_1, a_2, a_3 (při čemž je $a_1 < < a_2 < a_3$), která mají tuto vlastnost: Omezíme-li se na ty hodnoty nezávisle proměnné x, pro něž

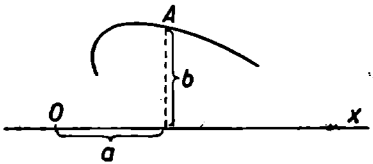
[1] jest $x \leqq a_1$,
[2] jest $a_1 \leqq x$ a současně $x \leqq a_2$,
[3] jest $a_2 \leqq x$ a současně $x \leqq a_3$,
[4] jest $a_3 \leqq x$,

pak funkce

$$\left.\begin{matrix}\text{roste}\\ \text{klesá}\end{matrix}\right\} \text{ v případě } \left\{\begin{matrix}[1] \text{ nebo } [3],\\ [2] \text{ nebo } [4].\end{matrix}\right.$$

Takové soustavy hodnot proměnné x, které jsou definovány některou z podmínek [1], [2], [3] a [4], se jmenují intervaly. Hodnoty stanovené podmínkou [2] tvoří interval $[a_1, a_2]$, do něhož čítáme hodnoty a_1, a_2 samy; o ostatních hodnotách z intervalu $[a_1, a_2]$ říkáme, že jsou uvnitř intervalu; čísla a_1, a_2 tvoří meze intervalu (a_1 je dolní mez, a_2 je horní mez). Podobně znamená $[a_2, a_3]$ interval určený podmínkou [3]. Hodnoty stanovené podmínkou [4] tvoří interval $[a_3, \infty]$, který má dolní mez a_3; všecky ostatní hodnoty intervalu $[a_3, \infty]$ jsou uvnitř intervalu a horní mez neexistuje; to má býti právě naznačeno symbolem ∞, který je zvykem čísti slovem „nekonečno". Hodnoty stanovené podmínkou [1] tvoří interval $[-\infty, a_1]$, který má horní mez a_1; všecky ostatní hodnoty intervalu $[-\infty, a_1]$ jsou uvnitř intervalu a dolní mez neexistuje; to má býti právě naznačeno symbolem $-\infty$, který je zvykem čísti slovy „minus nekonečno". Po zavedení této terminologie můžeme tedy říci, že funkce znázorněná naším grafem roste v intervalech $[-\infty, a_1]$, $[a_2, a_3]$ a klesá v intervalech $[a_1, a_2]$, $[a_3, \infty]$. Takové rozdělení na několik intervalů, v nichž funkce střídavě roste a klesá, je možné u většiny jednoduchých funkcí. Určení takových intervalů je prvý důležitý krok ke studiu funkce a v této knížce poznáte na řadě příkladů, jak se takové určování pomocí vyšší matematiky provádí.

9. Spojitost. Jiná velmi důležitá vlastnost funkce je spojitost. Zvolme si určitou hodnotu proměnné x a označme ji a; dále označme b hodnotu $f(a)$, které nabývá funkce pro $x = a$. Na grafu odpovídá učiněné volbě bod $A = (a; b)$ (viz obr. 7a). Říkáme, že naše funkce je pro $x = a$ spojitá, když v takových číslech x, které se málo liší od čísla a, je hodnota funkce $f(x)$ nejvýš jen málo různá od b, tedy když ty body grafu, které odpovídají hodnotám x blízkým k a, leží blízko bodu A. Říkáme, že



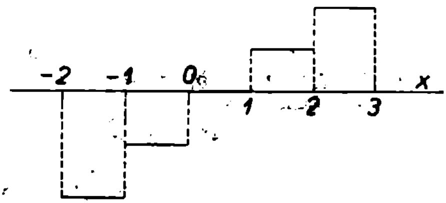
Obr. 7a.

$f(x)$ je spojitá funkce, když je spojitá pro každé x, pro které je vůbec definována. Můžeme také říci, že funkce $f(x)$ je spojitá, když k přibližnému výpočtu hodnoty funkce stačí znáti přibližnou hodnotu proměnné x. Z tohoto výkladu spojitosti je zřejmé, proč jsou právě spojité funkce pro aplikace nesmírně důležité. Neboť veškeré měření je možné pouze přibližně, a proto je málo možností praktického užití takových funkcí, u kterých ani k přibližnému výpočtu hodnoty $f(x)$ nepostačí, známe-li x pouze přibližně.

Proto se budeme v této knížce obírati pouze spojitými funkcemi, ale napřed si přece jen udáme velmi jednoduchý příklad funkce, která není všude spojitá. Hodnota této funkce v čísle x je dána takto: Je-li x číslo celé, pak je číslo $f(x)$ rovné x; není-li číslo x celé, pak $f(x)$ znamená největší z celých čísel menších než x. Na př.

$$f(3) = 3,\ f(-2) = -2,\ f(3{,}4) = 3,\ f(-2{,}8) = -3.$$

Část grafu funkce $f(x)$ vidíme v obr. 8. Celý graf se skládá z nekonečně mnoha vodorovných úseček, ale z každé úsečky patří do grafu pouze její levý krajní bod, kdežto pravé krajní body si musíme odmyslit. Když číslo a není celé, pak



Obr. 8.

funkce $f(x)$ je pro $x = a$ spojitá, neboť pro x blízké k a je $f(x)$ netoliko blízké číslu $f(a)$, nýbrž dokonce přesně rovné číslu $f(a)$. Ale když číslo a je celé, pak funkce $f(x)$ není pro $x = a$ spojitá. Budiž na př. $a = 3$. Čísla

$$2{,}9;\ 2{,}99;\ 2{,}999;\ 2{,}9999;\ \ldots$$

se blíží více a více hodnotě 3, ale funkce $f(x)$ má ve všech těch číslech společnou hodnotu 2, ačkoli $f(3) = 3$.

10. Pojem derivace. Můžeme také říci, že funkce $f(x)$, která pro $x = a$ nabývá hodnoty b, je pro $x = a$ spojitá, dá-li se v blízkosti hodnoty $x = a$ nahraditi konstantou b, t. j. tou jednoduchou funkcí, která pro všecka x nabývá téže hodnoty b. [Graf té konstanty je vodorovná přímka vedená bodem $A = (a; b)$.] Idea, aproximovati nějakou funkci v blízkosti určité hodnoty $x = a$ nějakou jednodušší funkcí, je jednou ze základních idejí vyšší matematiky. Zejména důležitá je aproximace pomocí lineární funkce

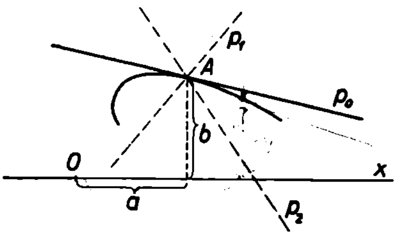
$$y = kx + l. \qquad (10{\cdot}1)$$

Z odst. 7 víme, že lineární funkce jsou totožné s těmi funkcemi, jejichž grafy jsou přímky. [Svislá přímka není ovšem grafem žádné funkce.]

V obr. 7b vidíme především znovu graf funkce $f(x)$, který byl v obr. 7a, jakož i bod $A = (a, b)$ kde $b = f(a)$. Vedle toho jsou v obr. 7b narýsovány tři přímky p_0, p_1, p_2 jdoucí bodem A. Obecně si mysleme vedenu bodem A přímku p, jejíž směrnice se rovná libovolně zvolenému číslu k. Víme, že rovnice přímky p jest

$$y = b + k(x - a). \tag{10·2}$$

Když x je blízké číslu a, je hodnota y, kterou vypočteme z rovnice (10·2), blízká hodnotě b, které y nabývá pro $x = a$. Stejně také hodnota $y = f(x)$, odpovídající funkci $f(x)$ znázorněné v obr. 7b, je pro x blízké číslu a blízká číslu b. Tedy i graf funkce $f(x)$ i přímka p jsou pro x blízké číslu a blízko bodu A, tedy také navzájem blízké. Jak blízké, to závisí na volbě směrnice k. V obr. 7b se v blízkosti bodu A přímka p_0 mnohem těsněji přimyká ke grafu funkce $f(x)$ nežli přímky p_1 a p_2.



Obr. 7b.

Když lze vésti bodem A grafu přímku p_0 tak, že se tato přímka v blízkosti bodu A ke grafu těsněji přimyká nežli kterákoli jiná přímka vedená bodem A, říká se této přímce **tečna** grafu v bodě A. Tečna může býti také svislá; vyloučíme-li tento výjimečný případ, má tečna určitou směrnici k_0 a tato směrnice se nazývá **derivace** funkce $f(x)$ v čísle $x = a$. Pojem derivace je jeden z nejdůležitějších pojmů vyšší matematiky.

Zvolíme-li si na grafu funkce $f(x)$ vedle bodu $A = (a; b)$, kde $b = f(a)$, ještě jeden bod $P = (x; y)$, kde $y = f(x)$, můžeme oba body spojiti přímkou. Víme, že směrnice této přímky je

$$\frac{y - b}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \tag{10·3}$$

Má-li graf v bodě A určitou tečnu p_0, je pro x blízké k a

spojnice AP blízká k p_0, a proto je také směrnice (10·3) přímky AP blízká směrnici přímky p_0, t. j. derivaci k_0 funkce $f(x)$ v čísle $x = a$. Tedy funkce $f(x)$ má pro $x = a$ derivaci rovnou číslu k_0, když pro x různé od a, ale blízké číslu a, je podíl (10·3) přibližně rovný číslu k_0. Je zvykem nazývati rozdíl $x - a$ přírůstkem nezávisle proměnné a rozdíl $f(x) - f(a)$ přírůstkem funkce; tyto „přírůstky" ovšem nemusí býti kladné. Často se přírůstek nezávisle proměnné značí písmenem h, tedy

$$h = x - a, \quad x = a + h; \tag{10·4}$$

přírůstek funkce je pak $f(a + h) - f(a)$ a podíl (10·3) je

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h}. \tag{10·5}$$

Když x probíhá čísla blízká číslu a, probíhá h čísla blízká nule a obráceně.

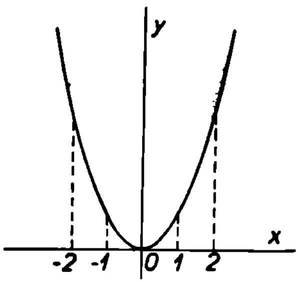
U lineární funkce (10·1) je

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = k,$$

t. j. přírůstek funkce je (nehledě na případ $k = 0$) přímo úměrný přírůstku nezávisle proměnné. Derivace lineární funkce je konstanta k, t. j. lineární funkce má v každém čísle a stejnou derivaci, rovnou číslu k, t. j. rovnou směrnici přímky, která je grafem funkce. U jiných funkcí je poměr (10·3) závislý na x, takže přírůstek funkce není přírůstku nezávisle proměnné přesně přímo úměrný, nýbrž pouze přibližně, ale tím přesněji, čím těsněji omezíme proměnnou x do blízkosti hodnoty a. Na tom se zakládá na př. interpolace při logaritmování, na kterou se většina z vás pamatuje ze střední školy. V pětimístných logaritmických tabulkách jsou přímo udány pouze logaritmy čtyrciferných čísel; logaritmy pěticiferných čísel se z nich počítají na základě předpokladu, že přírůstek logaritmu je přímo úměrný přírůstku čísla. Tento předpoklad není sice přesně správný, ale je splněn s dostatečnou přibližností. Na čem tu záleží, je **poměrná** velikost přírůstku nezávisle proměnné. Změníme-li pátou cifru čísla, je poměrná změna tím větší, čím menší je číslo, tedy čím menší je první cifra; největší poměrná změna nastane, když prvé dvě cifry jsou 10 a třetí cifra je malá. Proto jsou na př. ve Valouchových logaritmických tabulkách logaritmy pěticiferných čísel 10 000 až 11 009 přímo udány.

11. Funkce $y = x^2$. Abychom si pojem derivace dobře ujasnili, probereme si jej na dvou příkladech. Počneme funkcí $y = x^2$. Graf této funkce je naznačen v obr. 9; je to t. zv. **parabola**. Jest

$$(-x)^2 = x^2,$$



Obr. 9.

t. j. naše funkce nabývá stejné hodnoty v čísle $-x$ jako v čísle x. Taková funkce se jmenuje funkce sudá; graf sudé funkce je sám k sobě souměrný vzhledem k ose y.

Pro $x = a$ nabývá naše funkce hodnoty $b = a^2$. Hodnota funkce v čísle $a + h$ je

$$(a + h)^2 = a^2 + 2ah + h^2;$$

tedy přírůstku h nezávisle proměnné odpovídá přírůstek funkce

$$(a + h)^2 - a^2 = 2ah + h^2 = h \,.\, (2a + h).$$

Je-li h blízké nule, je také přírůstek funkce blízký nule; naše funkce je všude spojitá, což odpovídá tomu, že celý graf je jediná souvislá čára.

Poměr přírůstku funkce k přírůstku nezávisle proměnné je

$$\frac{(a + h)^2 - a^2}{h} = 2a + h;$$

když h se blíží nule, blíží se tento poměr číslu $2a$. Tedy derivace funkce $y = x^2$ v čísle $x = a$ se rovná číslu $2a$.

Bodem $A = (a, a^2)$ naší paraboly si veďme přímku o směrnici k. Na parabole jest

$$y = x^2;$$

na přímce jest

$$y = a^2 + k\,(x - a);$$

tedy rozdíl R mezi souřadnicí y bodu na parabole a souřadnicí y bodu na přímce při daném x je

$$R = x^2 - a^2 - k\,(x - a) = (x - a)\,(x + a - k).$$

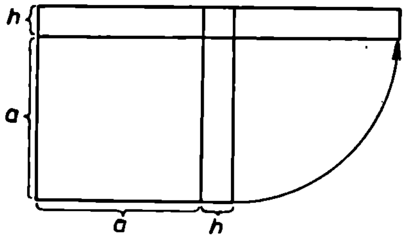
Když se x blíží hodnotě a, blíží se obě pořadnice y téže hodnotě a^2 a jejich rozdíl R se blíží nule. Ale jak rychle se R blíží nule, to závisí na volbě směrnice k. Abychom to zkoumali, všimneme si podílu

$$\frac{R}{x - a} = x + a - k = h + (2a - k); \qquad (11{\cdot}1)$$

při x blízkém číslu a je ten podíl přibližně roven $2a - k$. Je-li $k \neq 2a$, je rozdíl R přibližně úměrný přírůstku $h = x - a$. Je-li však směrnice k rovna derivaci $2a$, pak je podíl (11·1) při x blízkém číslu a přibližně rovný nule, t. j. nejen že je R blízké nule, nýbrž je mnohem bližší nule, než je $x - a$. To právě znamená, že přímka se směrnicí $k = 2a$ se v blízkosti bodu A mnohem těsněji přimyká k parabole než ostatní naše přímky. Tedy $2a$ je směrnice tečny paraboly v bodě A.

Můžeme si věc znázorniti jinak. Znamená-li x stranu čtverce, znamená x^2 obsah čtverce. Je-li x o málo větší než a, máme situaci znázorněnou v obr. 10. Přírůstek funkce je znázorněn pásem, který se skládá ze dvou obdélníků. Když jeden z nich přemístíme, jak je v obrazci naznačeno šipkou, bude přírůstek plochy čtverce (tedy přírůstek funkce) znázorněn obdélníkem se základnou $2a + h$ a výškou h, tedy obsahem $h\,(2a + h)$. Tedy poměr přírůstku funkce k přírůstku nezávisle proměnné je $2a + h$, což při menším a menším h je čím dále tím přesněji $2a$. Ke stejnému výsledku dojdeme, i když od hodnoty a strany čtverce přejdeme k hodnotě o málo menší, tedy při záporném h.

Ještě jiné důležité znázornění! Dejme tomu, že se bod pohybuje po ose y tak, že v čase $t = 0$ je v počátku a že v čase t



Obr. 10.

přijde do polohy $(0; t^2)$. [Kladná část osy y nechť raději tentokráte směřuje dolů.] V době od okamžiku $t = a$ k okamžiku $t = a + h$ přejde náš bod z polohy $(0; a^2)$ do polohy $(0; (a + h)^2)$ a urazí dráhu

$$(a + h)^2 - a^2 = h\,(2a + h).$$

Stejnou dráhu by urazil, kdyby se pohyboval rovnoměrnou rychlostí

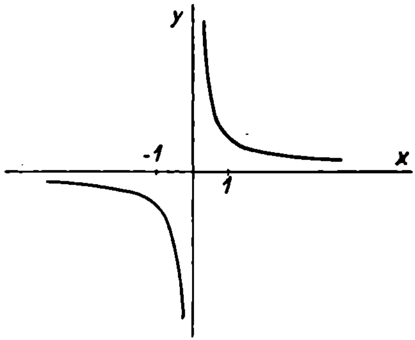
$$\frac{(a + h)^2 - a^2}{h} = 2a + h.$$

Proto říkáme číslu $2a + h$ průměrná rychlost pohybu v době od okamžiku $t = a$ do okamžiku $t = a + h$. Je-li h blízké nule, je tato průměrná rychlost přibližně rovna $2a$; proto říkáme, že $2a$ je okamžitá rychlost pohybu v čase $t = a$. V žádném sebe kratším časovém intervalu není náš pohyb přesně rovnoměrný, ale ve velmi malém časovém intervalu obsahujícím okamžik $t = a$ se dá velmi dobře aproximovat rovnoměrným pohybem s rychlostí $2a$.

12. Funkce $y = \dfrac{1}{x}$. Graf této funkce je naznačen v obr. 11; je to t. zv. hyperbola. Jest

$$\frac{1}{-x} = -\frac{1}{x},$$

t. j., změní-li se pouze znamení nezávisle proměnné x, změní také hodnota funkce pouze znamení. Taková funkce se jmenuje *funkce lichá*; graf liché funkce je středově souměrný (počátek O je středem souměrnosti). Pro $x = 0$ není naše funkce definována; když je x kladné a velmi malé, jsou hodnoty funkce kladné a velmi veliké; když je x záporné a velmi malé, jsou hodnoty funkce záporné a velmi veliké. Když je x kladné a velmi velké, jsou hodnoty funkce kladné a velmi malé; když je x záporné a velmi velké, jsou hodnoty funkce záporné a velmi malé. Celkem můžeme říci, že ve velké vzdálenosti od počátku se graf naší funkce těsně přimyká jednak k ose x, jednak k ose y; pravíme, že osa x a osa y jsou *asymptoty* naší hyperboly.



Obr. 11.

Pro $x = a$ (kde $a \neq 0$) nabývá naše funkce hodnoty $b = \dfrac{1}{a}$. Hodnota funkce pro $x = a + h$ je $\dfrac{1}{a + h}$; přírůstku h nezávisle proměnné odpovídá přírůstek funkce

$$\frac{1}{a + h} - \frac{1}{a} = - \frac{h}{a\,(a + h)}.$$

Je-li h blízké nule, je také přírůstek funkce blízký nule; naše funkce je všude spojitá, kde je definována (t. j. pro všecka x mimo nulu).

Poměr přírůstku funkce k přírůstku nezávisle proměnné je

$$- \frac{1}{a\,(a + h)};$$

když se h blíží nule, blíží se tento poměr číslu $-\frac{1}{a^2}$. Tedy derivace funkce $y = \frac{1}{x}$ v čísle $x = a$ se rovná číslu $-\frac{1}{a^2}$.

13. Pojem limity. V odst. 10 jsme se seznámili s pojmem derivace názorným způsobem na základě grafu. Bude užitečné, když si nyní vyslovíme definici derivace v přesném znění. Provedeme to tak, že si zavedeme obecnější pojem, který má v celé vyšší matematice centrální postavení a jehož jedním zvláštním případem je pojem derivace. Je to pojem limity.

Nechť je dán nějaký interval J a nějaké číslo a uvnitř intervalu J. Dále budiž dána nějaká funkce

$$y = F(x) \tag{13·1}$$

definovaná pro všecka x z intervalu J, až snad na hodnotu $x = a$, v které $F(x)$ definována býti nemusí. Konečně budiž dáno číslo c. Pak říkáme, že číslo c je limita funkce $F(x)$ pro x blížící se číslu a, a píšeme

$$\lim_{x \to a} F(x) = c \tag{13·2}$$

když platí toto: Chceme-li dosáhnouti toho, aby všecky hodnoty funkce $F(x)$ zůstávaly v **libovolně předepsané blízkosti** čísla c, stačí omeziti proměnnou x (různou od a) do **dostatečně malé blízkosti** čísla a. Touž věc vyjadřujeme nejčastěji tímto způsobem, který je zvláště pro složitější úlohy velmi vhodný, ale na který je dobře si zvyknout hned v začátcích studia vyšší matematiky: Je-li dáno libovolné kladné číslo ε, existuje kladné číslo δ takové, že

$$0 < | x - a | < \delta \Rightarrow | F(x) - c | < \varepsilon. \tag{13·3}$$

Při tom $\Rightarrow$ je logická značka, která znamená, že z toho, co je psáno před ní vlevo, následuje to, co je psáno za ní vpravo.

Pojem derivace je zvláštním případem pojmu limity. Zřejmě totiž lze říci toto: Že funkce $f(x)$ má pro $x = a$ derivaci rovnou číslu c, to znamená, že jest

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = c. \tag{13·4}$$

Také pojem spojitosti je zvláštním případem pojmu limity: Že funkce $f(x)$ je pro $x = a$ spojitá, to znamená

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a). \tag{13·5}$$

14. Nerovnosti. Při důkazech ve vyšší matematice se stále vyskytují nerovnosti. Proto si v tomto odstavci probereme nejjednodušší věty o nerovnostech. Vyjdeme od pojmu čísel kladných a záporných. Jak je vám známo, platí pro tento pojem následující čtyři věty:

I. Číslo 0 není ani kladné ani záporné.

II. Když a je číslo různé od nuly, pak buďto je a kladné a $-a$ záporné, nebo je $-a$ kladné a a záporné. Žádné číslo není současně kladné i záporné.

III. Jsou-li a, b kladná čísla, je také $a + b$ kladné číslo.

IV. Jsou-li a, b kladná čísla, je také ab kladné číslo.

Nyní můžeme definovati: Pravíme, že číslo a je větší než číslo b a píšeme $a > b$, když číslo $a - b$ je kladné. Pravíme, že číslo a je menší než číslo b a píšeme $a < b$, když číslo $a - b$ je záporné. Volíme-li v této definici $b = 0$, vidíme, že $a > 0$ znamená, že a je kladné, $a < 0$ znamená, že a je záporné.

Na základě vět I až IV a právě zavedené definice můžeme snadno dokázati řadu jednoduchých vět.

V. Jsou-li a, b libovolně daná čísla, platí přesně jeden z tří případů $a = b$, $a > b$, $a < b$.

Neboť $a = b$ znamená $a - b = 0$, $a > b$ znamená, že $a - b$ je kladné, $a < b$ znamená, že $a - b$ je záporné.

VI. Je-li $a > b$, je $b < a$ a obráceně.

Neboť $a > b$ znamená, že $a - b$ je kladné, $b < a$ znamená, že $b - a = -(a - b)$ je záporné.

VII. Když $a > b$, $b > c$, pak $a > c$. [Místo $a > b$, $b > c$ se obyčejně píše stručněji $a > b > c$.]

Neboť $a - b > 0$, $b - c > 0$; ježto $a - c = (a - b) + (b - c)$, jest $a - c > 0$ podle III.

VIII. Když $a > b$, pak $a + c > b + c$. [„V nerovnosti je dovoleno na obou stranách přičísti totéž číslo."]

Neboť $(a + c) - (b + c) = a - b > 0$.

IX. Když $a > b$, $c > d$, pak $a + c > b + d$. [„Nerovnosti je dovoleno sčítat".]

Ježto $a > b$, podle VIII je $a + c > b + c$. Ježto $c > d$, podle VIII je $c + b > d + b$ neboli $b + c > b + d$. Tedy je $a + c > b + c$, $b + c > b + d$, takže $a + c > b + d$ podle VII.

X. Když $a > b$, $c > 0$, pak $ac > bc$. [„V nerovnosti je dovoleno násobit obě strany týmž **kladným** číslem."]

Neboť $a - b > 0$, $c > 0$, takže podle IV je $(a - b)\,c > 0$, t. j. $ac - bc > 0$.

XI. Když $a > b \geqq 0$, $c > d \geqq 0$, pak $ac > bd$. [„Nerovnosti mezi nezápornými čísly je dovoleno násobit."]

Podle VII je $a > 0$, $c > 0$, tedy $ac > 0$ podle IV; je-li buďto $b = 0$ nebo $d = 0$, je $bd = 0$, takže $ac > bd$. Nechť tedy $b > 0$, $d > 0$. Ježto $a > b$, $c > 0$, je $ac > bc$ podle X; ježto $c > d$, $b > 0$, je $cb > db$ podle X, t. j. $bc > bd$; ježto $ac > bc$, $bc > bd$, je $ac > bd$ podle VII.

XII. Když $a > b$, pak $-b > -a$.

Neboť $a - b > 0$, takže $-b - (-a) = a - b > 0$.

XIII. $1 > 0$.

To ovšem víme; ale je zábavné si to formálně odvoditi z předcházejících vět. Ježto $1 \neq 0$, podle II je buďto $1 > 0$ nebo $-1 > 0$; ježto $1 . 1 = 1$, $(-1) . (-1) = 1$, podle IV je jistě $1 > 0$.

XIV. Když $a > 0$, pak $\frac{1}{a} > 0$.

Jistě je $\frac{1}{a} \neq 0$. Kdyby nebylo $\frac{1}{a} > 0$, bylo by $-\frac{1}{a} > 0$ podle II; podle IV by bylo $-1 = a . \left(-\frac{1}{a}\right) > 0$; ježto však také $1 > 0$ podle XIII, je $-1 > 0$ nemožné podle II.

XV. Když $a > b > 0$, pak $\frac{1}{b} > \frac{1}{a} > 0$.

Podle VII je $a > 0$, takže $\frac{1}{a} > 0$ podle XIV. Podle IV je $ab > 0$, takže $\frac{1}{ab} > 0$ podle XIV. Ježto $a > b$, je $a - b > 0$. Jest

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a - b}{ab} = (a - b) \cdot \frac{1}{ab}.$$

Ježto $a - b > 0$, $\frac{1}{ab} > 0$, je tedy $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} > 0$ podle IV, t. j. $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$.

Další důležité věty se týkají absolutní hodnoty (viz pozn. pod čarou na str. 8).

XVI. Jest $|ab| = |a| \, . \, |b|$.

To je zřejmé, když buďto $a = 0$ nebo $b = 0$, neboť obě strany jsou pak rovné nule. Nechť tedy $a \neq 0$, $b \neq 0$. Zřejmě je $|a| = \varepsilon_1 a$, určíme-li $\varepsilon_1 = \pm 1$ tak, aby bylo $\varepsilon_1 a > 0$. Podobně je $|b| = \varepsilon_2 b$, určíme-li $\varepsilon_2 = \pm 1$ tak, aby bylo $\varepsilon_2 b > 0$. Podle IV je $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \, . \, ab = \varepsilon_1 a \, . \, \varepsilon_2 b > 0$; mimo to je $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = \pm 1$. Tedy je $|ab| = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \, . \, ab = \varepsilon_1 a \, . \, \varepsilon_2 b = |a| \, . \, |b|$.

XVII. Jest $|a + b| \leqq |a| + |b|$.

Jest $a \leqq |a|$, $b \leqq |b|$, takže $a + b \leqq |a| + |b|$ (viz VIII a IX). Dále jest $-a \leqq |a|$, $-b \leqq |b|$, takže $-a - b \leqq \leqq |a| + |b|$. Tedy je $|a + b| \leqq |a| + |b|$, neboť číslo $|a + b|$ je buďto rovné číslu $a + b$ nebo rovné číslu $-a - b$.

XVIII. Jest $||a| - |b|| \leqq |a \pm b| \leqq |a| + |b|$.

Ježto $|b| = |-b|$, stačí si všímati horního znamení. Protože $|a + b| \leqq |a| + |b|$ podle XVII, stačí dokázati, že

$$||a| - |b|| \leqq |a + b|. \tag{14·1}$$

V XVII smíme místo a, b dosaditi $a + b$, $-b$. Tím vznikne

$$|a| \leqq |a + b| + |-b|$$

neboli

$$|a| \leqq |a + b| + |b|.$$

Z toho následuje podle VIII, že

$$|a| - |b| \leqq |a + b|. \tag{14·2}$$

Avšak ve (14·2) smíme zřejmě vyměniti písmena a, b. Tedy je také

$$|b| - |a| \leqq |a + b|. \tag{14·3}$$

Ježto číslo $||a| - |b||$ je rovné jednomu z obou čísel $|a| - |b|$, $|b| - |a|$, plyne (14·1) ze (14·2) a (14·3).

15. Jednoduché věty o limitách. V tomto odstavci si dokážeme několik skoro zřejmých vět o limitách funkcí.

I. Je-li $\lim_{x \to a} F(x) = c$ a je-li k konstanta, jest $\lim_{x \to a} k\,F(x) = k \, . \, c$.

Případ $k = 0$ je tak zřejmý, že jej necháme stranou. Nechť tedy $k \neq 0$. Zvolme číslo $\varepsilon > 0$. Máme dokázati, že existuje číslo $\delta > 0$ takové, že

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |k F(x) - kc| < \varepsilon. \qquad (15\cdot1)$$

Položme $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{|k|}$. Pak je ε_1 kladné číslo. Ježto $\lim_{x \to a} F(x) = c$, existuje číslo $\delta_1 > 0$ takové, že

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |F(x) - c| < \varepsilon_1. \qquad (15\cdot2)$$

Avšak $|k F(x) - kc| = |k| \,.\, |F(x) - c|$, $\varepsilon = |k| \,.\, \varepsilon_1$. Tedy z nerovnosti $|F(x) - c| < \varepsilon_1$ plyne (viz X v odst. 14), že $|k F(x) - kc| < \varepsilon$. Položíme-li tedy $\delta = \delta_1$, plyne (15·1) z (15·2).

II. Je-li $\lim_{x \to a} F_1(x) = c_1$, $\lim_{x \to a} F_2(x) = c_2$, jest $\lim_{x \to a} [F_1(x) + F_2(x)] = c_1 + c_2$.

Zvolme číslo $\varepsilon > 0$. Máme dokázati, že existuje číslo $\delta > 0$ takové, že

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |[F_1(x) + F_2(x)] - (c_1 + c_2)| < \varepsilon. \qquad (15\cdot3)$$

Zvolme si dvě kladná čísla ε_1 a ε_2 tak, aby bylo $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 < \varepsilon$. Protože $\lim_{x \to a} F_1(x) = c_1$, existuje číslo $\delta_1 > 0$ takové, že

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |F_1(x) - c_1| < \varepsilon_1. \qquad (15\cdot4)$$

Protože $\lim_{x \to a} F_2(x) = c_2$, existuje číslo $\delta_2 > 0$ takové, že

$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |F_2(x) - c_2| < \varepsilon_2. \qquad (15\cdot5)$$

Nyní zvolme číslo $\delta > 0$ tak, aby bylo i $\delta < \delta_1$ i $\delta < \delta_2$. Je-li $0 < |x - a| < \delta$, je předně $0 < |x - a| < \delta_1$ a za druhé $0 < |x - a| < \delta_2$. Tedy podle (15·4) a (15·5) je $|F_1(x) - c_1| < \varepsilon_1$, $|F_2(x) - c_2| < \varepsilon_2$, takže podle IX v odst. 14 je $|F_1(x) - c_1| + |F_2(x) - c_2| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Podle XVII v odst. 14 je však $|[F_1(x) + F_2(x)] - (c_1 + c_2)| \leqq |F_1(x) - c_1| + |F_2(x) - c_2|$. Mimo to je $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 < \varepsilon$. Tedy podle VII v odst. 14 je $|[F_1(x) + F_2(x)] - (c_1 + c_2)| < \varepsilon$. Tím je správnost vztahu (15·3) dokázána.

III. Je-li $\lim_{x \to a} F_1(x) = c_1$, $\lim_{x \to a} F_2(x) = c_2$, jest $\lim_{x \to a} [F_1(x) - F_2(x)] = c_1 - c_2$.

Podle I je totiž $\lim_{x \to a} [- F_2(x)] = - c_2$, takže stačí užíti II s funkcí $- F_2(x)$ místo funkce $F_2(x)$.

IV. Je-li $\lim\limits_{x\to a} F_1(x) = c_1$, $\lim\limits_{x\to a} F_2(x) = c_2$, jest $\lim\limits_{x\to a} [F_1(x) \,.\, F_2(x)] = c_1c_2$.

Zvolme číslo $\varepsilon > 0$. Máme dokázati, že existuje číslo $\delta > 0$ takové, že

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |F_1(x) F_2(x) - c_1c_2| < \varepsilon. \quad (15\cdot6)$$

Zvolme si dvě kladná čísla α_1 a α_2 tak, aby bylo $\alpha_1 + \alpha_2 < \varepsilon$. Dále si zvolme nejprve číslo $\varepsilon_1 > 0$ tak, aby bylo $|c_2|\,\varepsilon_1 < \alpha_1$ a potom číslo $\varepsilon_2 > 0$ tak, aby bylo $(|c_1| + \varepsilon_1)\,\varepsilon_2 < \alpha_2$. Protože $\lim\limits_{x\to a} F_1(x) = c_1$, existuje číslo $\delta_1 > 0$ takové, že platí (15·4). Protože $\lim\limits_{x\to a} F_2(x) = c_2$, existuje číslo $\delta_2 > 0$ takové, že platí (15·5). Nyní zvolme číslo $\delta > 0$ tak, aby bylo i $\delta < \delta_1$ i $\delta < \delta_2$. Nechť nyní platí $0 < |x - a| < \delta$. Pak je předně $0 < |x - a| < \delta_1$, takže podle (15·4) je $|F_1(x) - c_1| < \varepsilon_1$. Podle X a XVI v odst. 14 je $|c_2 F_1(x) - c_1c_2| \leqq |c_2|\,\varepsilon_1$. Protože $|c_2|\,\varepsilon_1 < \alpha_1$, je tedy

$$|c_2[F_1(x) - c_1]| < \alpha_1 \quad (15\cdot7)$$

podle VII v odst. 14. Dále je $F_1(x) = c_1 + [F_1(x) - c_1]$, takže

$$|F_1(x)| < |c_1| + \varepsilon_1 \quad (15\cdot8)$$

podle VII a XVII v odst. 14. Za druhé je však ještě $0 < |x - a| < \delta_2$, takže podle (15·5) je $|F_2(x) - c_2| < \varepsilon_2$. Tedy podle (15·8) a podle XI a XVI v odst. 14 je $|F_1(x) \,.\, [F_2(x) - c_2]| < (|c_1| + \varepsilon_1)\,\varepsilon_2$; ježto $(|c_1| + \varepsilon_1)\,\varepsilon_2 < \alpha_1$, je tedy

$$|F_1(x) \,.\, [F_2(x) - c_2]| < \alpha_2. \quad (15\cdot9)$$

Protože

$$F_1(x) F_2(x) - c_1c_2 = c_2[F_1(x) - c_1] + F_1(x)[F_2(x) - c_2],$$

následuje z (15·7) a (15·9) podle VII a XVII v odst. 14, že $|F_1(x) F_2(x) - c_1c_2| < \alpha_1 + \alpha_2$. Protože $\alpha_1 + \alpha_2 < \varepsilon$, je správnost vztahu (15·6) dokázána.

V. Je-li $\lim\limits_{x\to a} F(x) = c$ a je-li $c \neq 0$, jest $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{F(x)} = \dfrac{1}{c}$.

Zvolme číslo $\varepsilon > 0$. Máme dokázati, že existuje číslo $\delta > 0$ takové, že

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{F(x)} - \frac{1}{c} \right| < \varepsilon. \quad (15\cdot10)$$

Zvolme si kladné číslo ε_1 tak, aby bylo předně

$$\varepsilon_1 < \tfrac{1}{2}c^2\varepsilon \tag{15·11}$$

a za druhé

$$\varepsilon_1 < \tfrac{1}{2}\,|\,c\,|. \tag{15·12}$$

Z (15·12) následuje podle VIII v odst. 14, že $\varepsilon_1 - |\,c\,| < -\frac{1}{2}\,|\,c\,|$, takže podle XII v odst. 14 jest

$$|\,c\,| - \varepsilon_1 > \tfrac{1}{2}\,|\,c\,|. \tag{15·13}$$

Ježto $\lim\limits_{x \to a} F(x) = c$, existuje číslo $\delta_1 > 0$ takové, že

$$0 < |\,x - a\,| < \delta_1 \Rightarrow |\,F(x) - c\,| < \varepsilon_1. \tag{15·14}$$

Nechť nyní platí $0 < |\,x - a\,| < \delta_1$. Ježto $c = [F(x) - c] - - F(x)$, podle XVII v odst. 14 je $|\,c\,| \leqq |\,F(x) - c\,| + + |-F(x)\,| = |\,F(x) - c\,| + |\,F(x)\,|$. Podle (15·14) a podle VIII v odst. 14 je však $|\,F(x) - c\,| + |\,F(x)\,| < |\,F(x)\,| + \varepsilon_1$, takže $|\,c\,| < |\,F(x)\,| + \varepsilon_1$ podle VII v odst. 14. Tedy $|\,c\,| - - \varepsilon_1 < |\,F(x)\,|$ podle VIII v odst. 14. Podle (15·13) je však také $\frac{1}{2}\,|\,c\,| < |\,c\,| - \varepsilon_1$, takže $|\,F(x)\,| > \frac{1}{2}\,|\,c\,|$ podle VII v odst. 14. Ježto $c \neq 0$, je $|\,c\,| > 0$. Tedy $|\,c\,| \,.\, |\,F(x)\,| > > \frac{1}{2}\,|\,c\,|^2 = \frac{1}{2}c^2$, takže $|\,c\,F(x)\,| > \frac{1}{2}c^2$ podle XVI v odst. 14. Z XV v odst. 14 následuje nyní

$$\left|\frac{1}{c\,F(x)}\right| < \frac{1}{\frac{1}{2}c^2}. \tag{15·15}$$

Z (15·14) a (15·15) plyne podle XI a XVI v odst. 14

$$\left|\frac{F(x) - c}{c\,F(x)}\right| < \frac{\varepsilon_1}{\frac{1}{2}c^2}. \tag{15·16}$$

Avšak

$$\frac{1}{F(x)} - \frac{1}{c} = -\,\frac{F(x) - c}{c\,F(x)} \tag{15·17}$$

a mimo to plyne z (15·11) podle X v odst. 14, že

$$\frac{\varepsilon_1}{\frac{1}{2}c^2} < \varepsilon. \tag{15·18}$$

Z (15·16), (15·17) a (15·18) plyne podle VII v odst. 14, že

$$\left|\frac{1}{F(x)} - \frac{1}{c}\right| < \varepsilon.$$

Tím je dokázáno, že vztah (15·10) je správný, volíme-li $\delta = \delta_1$.

VI. Je-li $\lim_{x\to a} F_1(x) = c_1$, $\lim_{x\to a} F_2(x) = c_2$ a je-li $c_2 \neq 0$, jest $\lim_{x\to a} \frac{F_1(x)}{F_2(x)} = \frac{c_1}{c_2}$.

Neboť podle V je $\lim_{x\to a} \frac{1}{F_2(x)} = \frac{1}{c_2}$, takže stačí užíti věty IV, v které ovšem místo funkce $F_2(x)$ vezmeme funkci $\frac{1}{F_2(x)}$.

Víme, že když

$$\lim_{x\to a} F(x) = F(a), \qquad (15\cdot19)$$

je funkce $F(x)$ pro $x = a$ spojitá a že také obráceně platí (15·19), je-li funkce $F(x)$ pro $x = a$ spojitá. Proto z předcházejících vět o limitách plynou ihned následující věty o spojitosti:

VII. Je-li $f(x)$ spojitá funkce a je-li k konstanta, je také $k\,f(x)$ spojitá funkce.

VIII. Jsou-li $f_1(x)$ a $f_2(x)$ spojité funkce, jsou také

$$f_1(x) + f_2(x),\ f_1(x) - f_2(x),\ f_1(x)\,f_2(x),\ \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \qquad (15\cdot20)$$

spojité funkce.

První tři z funkcí (15·20) jsou definovány pro všecky ty hodnoty proměnné x, v kterých jsou definovány obě funkce $f_1(x)$ a $f_2(x)$. Poslední z funkcí (15·20) je však definována pouze ty z naznačených hodnot proměnné x, pro něž je mimo to $f_2(x) \neq 0$.

Souvislost mezi pojmem derivace a pojmem spojitosti je vyjádřena následující jednoduchou větou

IX. Má-li funkce $f(x)$ pro $x = a$ derivaci, je tato funkce pro $x = a$ spojitá.

Neboť podle předpokladu existuje limita

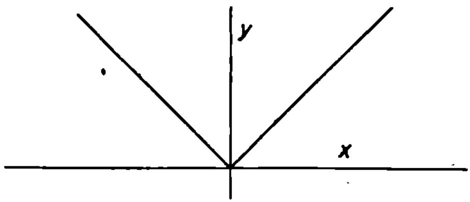
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = c;$$

mimo to je zřejmě $\lim\limits_{x \to a}(x - a) = 0$, takže podle IV jest $\lim\limits_{x \to a}[f(x) - f(a)] = 0$, a to znamená, že funkce $f(x)$ je pro $x = a$ spojitá.

Věta IX se nedá obrátit; ze spojitosti funkce nemůžeme soudit na existenci derivace. Jednoduchým příkladem je funkce $f(x) = |x|$. Tato funkce je všude spojitá, ale pro $x = 0$ nemá derivaci, neboť podíl

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} \tag{15·21}$$

je pro kladné x rovný 1, pro záporné x rovný -1, takže neexistuje určitá hodnota, které by se podíl (15·21) blížil, když se x blíží nule. To je také patrné z grafu funkce (obr. 12), který se skládá ze dvou polopřímek, jež tvoří pravý úhel s vrcholem v počátku, takže v počátku neexistuje ke grafu tečna.



Obr. 12.

16. Derivování součtu a součinu. Hodnotu derivace funkce $f(x)$ pro $x = a$ značíme často $f'(a)$. Při tom hodnota a je libovolná, a proto můžeme také psáti x místo a, t. j. z funkce $f(x)$ dostaneme derivováním novou funkci, kterou značíme $f'(x)$. V odst. 10 jsme poznali, jak se derivuje lineární funkce; můžeme si to zapsati ve tvaru

$$(kx + l)' = k. \tag{16·1}$$

Z odst. 11 si poznamenejme pravidlo

$$(x^2)' = 2x \tag{16·2}$$

a z odst. 12 pravidlo

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \tag{16·3}$$

platné pouze pro $x \neq 0$; tuto výhradu si nemusíme ani zaznamenávati, protože pro $x = 0$ jsou obě strany v (16·3) bezvýznamné.

Z vět o limitách, které byly odvozeny v odst. 15, plynou jednoduchá, ale důležitá pravidla pro derivování.

I. Má-li funkce $f(x)$ pro $x = a$ derivaci a je-li k konstanta, má také funkce $k\,f(x)$ pro $x = a$ derivaci, která se počítá podle pravidla

$$[k\,.\,f(x)]' = k\,.\,f'(x). \tag{16·4}$$

Neboť je-li

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a),$$

pak podle I v odst. 15 je

$$\lim_{x\to a} \frac{k\,f(x) - k\,f(a)}{x - a} = k\,.\,f'(a).$$

II. Mají-li funkce $f_1(x)$ a $f_2(x)$ obě pro $x = a$ derivaci, mají také funkce $f_1(x) + f_2(x)$, $f_1(x) - f_2(x)$ pro $x = a$ derivaci, která se počítá podle pravidla

$$[f_1(x) + f_2(x)]' = f'_1(x) + f'_2(x), \tag{16·5}$$

$$[f_1(x) - f_2(x)]' = f'_1(x) - f'_2(x). \tag{16·6}$$

Neboť je-li

$$\lim_{x\to a} \frac{f_1(x) - f_1(a)}{x - a} = f'_1(a), \quad \lim_{x\to a} \frac{f_2(x) - f_2(a)}{x - a} = f'_2(a),$$

pak podle II a III v odst. 15 je

$$\lim_{x\to a} \frac{[f_1(x) \pm f_2(x)] - [f_1(a) \pm f_2(a)]}{x - a} = f'_1(a) \pm f'_2(a).$$

Pravidlo (16·6) je ovšem důsledek pravidel (16·4) a (16·5), z nichž plyne také obecnější pravidlo

$$[k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)]' = k_1 f'_1(x) + k_2 f'_2(x).$$

Pravidlo (16·5) snadno zobecníme na větší počet sčítanců s tímto výsledkem: součet dvou nebo více funkcí derivujeme tak, že derivujeme každého sčítance zvlášť a jednotlivé výsledky sečteme.

III. Mají-li funkce $f_1(x)$ a $f_2(x)$ pro $x = a$ derivaci, má také funkce $f_1(x) \cdot f_2(x)$ pro $x = a$ derivaci, která se počítá podle pravidla

$$[f_1(x) \cdot f_2(x)]' = f'_1(x) \cdot f_2(x) + f_1(x) \cdot f'_2(x). \tag{16·7}$$

Podle předpokladu je

$$\lim_{x \to a} \frac{f_1(x) - f_1(a)}{x - a} = f'_1(a), \quad \lim_{x \to a} \frac{f_2(x) - f_2(a)}{x - a} = f'_2(a).$$

Podle IX v odst. 15 je $\lim_{x \to a} f_2(x) = f_2(a)$, takže podle IV v odst. 15 je

$$\lim_{x \to a} \left[f_2(x) \cdot \frac{f_1(x) - f_1(a)}{x - a} \right] = f'_1(a) \cdot f_2(a);$$

mimo to je podle I v odst. 15

$$\lim_{x \to a} \left[f_1(a) \cdot \frac{f_2(x) - f_2(a)}{x - a} \right] = f_1(a) \cdot f'_2(a).$$

Ježto

$$\frac{f_1(x) f_2(x) - f_1(a) f_2(a)}{x - a} = f_2(x) \frac{f_1(x) - f_1(a)}{x - a} + f_1(a) \frac{f_2(x) - f_2(a)}{x - a},$$

plyne ze II v odst. 15

$$\lim_{x \to a} \frac{f_1(x) f_2(x) - f_1(a) f_2(a)}{x - a} = f'_1(a) f_2(a) + f_1(a) f'_2(a),$$

čímž je důkaz pravidla (16·7) dokončen.

Když v (16·1) volíme $k = 0$, dostaneme jednoduché pravidlo: Derivace konstanty je rovna nule. Známe-li toto pravidlo, dostaneme z pravidla (16·7) jako zvláštní případ pravidlo (16·4), volíce za jeden z obou činitelů konstantu.

Pravidlo (16·7) je nejlépe si pamatovati ve slovním znění: Derivace součinu dvou funkcí je součet dvou částí; každá z obou částí je součin, který vznikne z původního součinu tím, že se jeden faktor derivuje a druhý opíše.

Když v (16·1) zvolíme $k = 1$, $l = 0$, dostaneme pravidlo

$$(x)' = 1. \tag{16·8}$$

Z (16·8) dostaneme podle pravidla (16·7)

$$(x^2)' = (x \,.\, x)' = 1 \,.\, x + x \,.\, 1 = 2x,$$

což není nic jiného než (16·2). Dalším užíváním pravidla (16·7) dostaneme postupně

$$\begin{aligned}(x^3)' &= (x^2 \,.\, x)' = 2x \,.\, x + x^2 \,.\, 1 = 3x^2,\\ (x^4)' &= (x^3 \,.\, x)' = 3x^2 \,.\, x + x^3 \,.\, 1 = 4x^3,\\ (x^5)' &= (x^4 \,.\, x)' = 4x^3 \,.\, x + x^4 \,.\, 1 = 5x^4 \text{ atd.,}\end{aligned}$$

obecně

$$(x^n)' = n \,.\, x^{n-1}. \tag{16·9}$$

Podobně dostaneme z (16·3) postupně

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x^2}\right)' &= \left(\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{2}{x^3},\\ \left(\frac{1}{x^3}\right)' &= \left(\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x}\right)' = -\frac{2}{x^3}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{3}{x^4},\\ \left(\frac{1}{x^4}\right)' &= \left(\frac{1}{x^3}\cdot\frac{1}{x}\right)' = -\frac{3}{x^4}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{4}{x^5} \text{ atd.,}\end{aligned}$$

obecně

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}. \tag{16·10}$$

Protože x^{-n} znamená totéž jako $\frac{1}{x^n}$, můžeme (16·10) také psáti ve tvaru

$$(x^{-n})' = (-n) \cdot x^{-n-1},$$

což znamená, že pravidlo (16·9), původně odvozené pro kladné celé n, zůstává v platnosti i pro záporné celé n. Samozřejmě musíme při záporném n vyloučiti hodnotu $x = 0$.

17. Derivace složené funkce. V předchozích odstavcích jsme značili nezávisle proměnnou písmenem x; můžeme však také užíti jakéhokoli jiného písmene. Tato samozřejmá poznámka je užitečná u t. zv. složených funkcí. Buďtež dány dvě funkce jedné proměnné: funkce $f(t)$ proměnné t a funkce $\varphi(x)$ proměnné x; můžeme z nich sestaviti novou funkci $F(x)$ proměnné x tím, že do funkce $f(t)$ dosadíme $t = \varphi(x)$, tedy

$$F(x) = f[\varphi(x)]; \tag{17·1}$$

takto vzniklá funkce $F(x)$ se jmenuje složená funkce.

Nejsou-li funkce $f(t)$ a $\varphi(x)$ definovány pro všecky hodnoty nezávisle proměnné, nemusí býti ani $F(x)$ definována pro všecka x. Zvolme určitou hodnotu a; aby byla funkce $F(x)$ definována pro $x = a$, musí býti především funkce $\varphi(x)$ definována pro $x = a$, ale to nestačí; je-li

$$b = \varphi(a), \tag{17·2}$$

musí býti ještě $f(t)$ definována pro $t = b$ a pak jest

$$F(a) = f(b). \tag{17·3}$$

Nechť platí (17·1) a (17·2); nechť funkce $\varphi(x)$ je definována pro všecka x blízká číslu a; nechť funkce $f(t)$ je definována pro všecka t blízká číslu b; mimo to nechť je funkce $\varphi(x)$ spojitá pro $x = a$. Pak je funkce $F(x)$ definována pro všecka x blízká číslu a. Platí-li ještě dále, že funkce $f(t)$ je spojitá pro $t = b$, je funkce $F(x)$ spojitá pro $x = a$.

Správnost učiněných tvrzení je skoro samozřejmá; podrobný důkaz probíhá takto: Existuje kladné číslo α takové, že $\varphi(x)$ je definována pro všecka x, pro něž platí $|x - a| < \alpha$; existuje kladné číslo β takové, že $f(t)$ je definována pro všecka t, pro něž platí $|t - b| < \beta$. Protože je funkce $\varphi(x)$ spojitá pro $x = a$, existuje kladné číslo γ takové, že

$$|x - a| < \gamma \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(a)| < \beta;$$

můžeme předpokládati $\gamma < \alpha$. Je-li nyní $|x - a| < \gamma$, je hodnota funkce $\varphi(x)$ v tomto x definována a jest $|\varphi(x) - b| < \beta$ [viz (17·2)], takže $f(t)$ je definována pro $t = \varphi(x)$; tudíž $F(x)$ je definována v našem x. Nyní připojíme předpoklad, že $f(t)$ je spojitá pro $t = b$ a zvolíme kladné číslo ε. Máme dokázati, že existuje kladné číslo δ takové, že funkce $F(x)$ je definována pro všecka x taková, že $|x - a| < \delta$ a že $|F(x) - F(a)| < \varepsilon$ pro všecka tato x. Protože je funkce $f(t)$ spojitá pro $t = b$, existuje kladné číslo ϱ takové, že $\varrho < \beta$ a že

$$|t - b| < \varrho \Rightarrow |f(t) - f(b)| < \varepsilon. \tag{17·4}$$

Protože je funkce $\varphi(x)$ spojitá pro $x = a$, existuje kladné číslo δ takové, že $\delta < \gamma$ a že

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(a)| < \varrho. \tag{17·5}$$

Protože $\delta < \gamma$, je funkce $F(x)$ definována pro všecka x, pro něž $|x - a| < \delta$. Je-li $|x - a| < \delta$, je $|\varphi(x) - b| < \varrho$ podle (17·2) a (17·5), takže $|F(x) - F(a)| < \varepsilon$ podle (17·1), (17·3) a (17·4).

Má-li funkce $\varphi(x)$ derivaci pro $x = a$ a má-li funkce $f(t)$ derivaci pro $t = b$ [viz (17·2)], má složená funkce $F(x)$ derivaci pro $x = a$ a tato derivace se počítá podle pravidla

$$F'(x) = f'[\varphi(x)] \,.\, \varphi'(x), \tag{17·6}$$

t. j. platí

$$F'(a) = f'(b) \,.\, \varphi'(a). \tag{17·7}$$

Abychom dokázali správnost vztahu (17·7), označme si jako obvykle přírůstek proměnné x písmenem h. Podle předpokladu se podíl

$$\frac{\varphi(a + h) - \varphi(a)}{h} \tag{17·8}$$

blíží číslu $\varphi'(a)$, blíží-li se h nule. Máme dokázati, že se podíl

$$\frac{F(a + h) - F(a)}{h} \tag{17·9}$$

blíží číslu $f'(b) \,.\, \varphi'(a)$, blíží-li se h nule. Položme

$$k = \varphi(a + h) - \varphi(a); \tag{17·10}$$

podle (17·2) je $\varphi(a + h) = b + k$, takže podle (17·1) je $F(a + h) = f(b + k)$ a tedy [viz (17·3)]

$$F(a + h) - F(a) = f(b + k) - f(b). \tag{17·11}$$

Podle (17·10) a (17·11) můžeme psáti podíl (17·9) ve tvaru

$$\frac{f(b + k) - f(b)}{k} \,.\, \frac{\varphi(a + h) - \varphi(a)}{h}. \tag{17·12}$$

Protože má funkce $\varphi(x)$ v čísle a derivaci, je pro $x = a$ spojitá (viz IX v odst.). Tedy ze (17·10) plyne, že když se h blíží nule, také k se blíží nule, a protože funkce $f(t)$ má pro $t = b$ derivaci, blíží se prvý faktor v (17·12) číslu $f'(b)$. Druhý faktor v (17·12) se však blíží číslu $\varphi'(a)$, takže se celý součin (17·12) blíží číslu $f'(b) \,.\, \varphi'(a)$. Protože se součin (17·12) rovná podílu (17·9), byli bychom s důkazem vztahu (17·7) hotovi.

Ve skutečnosti je však v postupu právě provedeném chybička, a bude poučné, když si ji nyní výslovně vytkneme a potom snadno napravíme. Že funkce $\varphi(x)$ má pro $x = a$ derivaci, to ovšem znamená, že se podíl (17·8) blíží číslu $\varphi'(a)$, blíží-li se h nule. Tak to bylo také výše řečeno. Ale nesmíme zapomínati, že se h musí blížit nule tak, aby nikdy nebylo nule přesně rovné, neboť pro $h = 0$ nemá podíl (17·8) vůbec smyslu. Dokázati máme, že se podíl (17·9) blíží číslu $f'(b) \,.\, \varphi'(a)$, blíží-li se h nule zase tak, aby nikdy nebylo nule přesně rovné. Jako prostředek k důkazu máme vedle toho, co bylo už řečeno o podílu (17·8), ještě ten fakt, že se podíl

$$\frac{f(b + k) - f(b)}{k} \tag{17·13}$$

blíží číslu $f'(b)$, blíží-li se k nule tak, aby nikdy nebylo nule přesně rovné. Podíl (17·13) se nám vyskytl jako prvý faktor součinu (17·12). Při tom jsme za k dosazovali podle (17·10) a přesvědčili jsme se, že se k počítané ze (17·10) blíží nule, blíží-li se h nule. Ale nač jsme zapomněli, jest, že k počítané ze (17·10) může býti rovné nule (je-li h blízké nule a různé od nuly). V tom je právě chyba našeho důkazu. Abychom tu chybu napravili, zavedeme si pomocnou veličinu z pomocí rovnice

$$\frac{f(b + k) - f(b)}{k} - f'(b) = z; \tag{17·14}$$

tato veličina z je tedy funkcí proměnné k, definovanou dosud pouze pro $k \neq 0$ [a při tom jen pro ta k, pro něž je číslo $f(b + k)$ definováno; ale na tom mnoho nezáleží, protože číslo $f(b + k)$ je jistě definováno pro všecka k dosti blízká nule a jen taková k budeme potřebovati]. Z rovnice (17·14) si vypočteme

$$f(b + k) - f(b) = [f'(b) + z] \,.\, k. \tag{17·15}$$

Rovnice (17·15) platí ovšem pro všecka ta k, pro něž platí rovnice (17·14); ale rovnice (17·15) je správná i pro $k = 0$, ať už dáme v tomto případě veličině z jakoukoli hodnotu. Dohodněme se, že pro $k = 0$ bude také $z = 0$. Protože funkce $f(t)$ má pro $t = b$ derivaci $f'(b)$, vychází ze (17·14), že se z blíží nule, blíží-li se k nule tak, aby nikdy nebylo nule přesně rovné. Protože však pro $k = 0$ je $z = 0$, blíží se veličina z nule dokonce i tehdy, když se blíží k nule jakýmkoli způsobem (t. j. i tak, že k může nabýti také hodnoty nula). Nyní už snadno důkaz dokončíme. Nechť se h blíží nule tak, aby nikdy nebylo nule přesně rovné. Za k si dosaďme výraz (17·10); pak se k jistě bude blížiti nule. Protože je z určitá funkce proměnné k a protože jsme za k dosadili výraz závislý na h, bude po dosazení z záviseti na h. Z toho, co bylo řečeno, plyne, že když se h blíží nule, nejsouc samo nule rovné, blíží se také z nule, při čemž může z nabýti i hodnoty nula. Podle (17·10), (17·11) a (17·15) je však

$$\frac{F(a + h) - F(a)}{h} = [f'(b) + z] \,.\, \frac{\varphi(a + h) - \varphi(a)}{h}. \tag{17·16}$$

Když se h blíží nule (při čemž $h \neq 0$), blíží se v (17·16) napravo prvý faktor číslu $f'(b)$ a druhý číslu $\varphi'(a)$, takže se podíl (17·9) blíží číslu $f'(b) \,.\, \varphi'(a)$ a s důkazem jsme hotovi, tentokrát doopravdy.

18. Derivace mocniny; derivace podílu. Když v právě odvozeném vzorci pro derivaci složené funkce $f[\varphi(x)]$ volíme $f(t) = t^n$ a když si připomeneme z odst. 16 vzorec $(t^n)' = n t^{n-1}$, dostaneme vzorec pro derivaci mocniny*)

$$([f(x)]^n)' = n[f(x)]^{n-1} \,.\, f'(x); \tag{18·1}$$

při kladném n platí tento vzorec pro všecka x, v nichž existuje derivace $f'(x)$; při záporném n musíme mimo to předpokládati $f(x) \neq 0$. Pro $n = -1$ zní vzorec (18·1)

*) Ve vzorci je psáno f místo φ; na tom ovšem nezáleží.

$$\left[\frac{1}{f(x)}\right]' = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}, \tag{18·2}$$

což je vzorec pro derivaci převrácené hodnoty funkce. Protože

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = f_1(x) \cdot \frac{1}{f_2(x)}$$

a protože umíme derivovati součin dvou funkcí, získáváme dále vzorec pro derivaci podílu

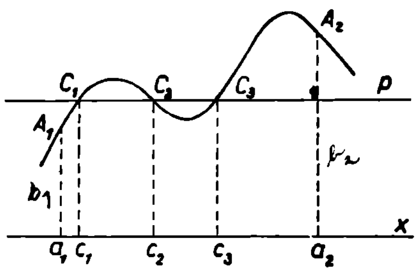
$$\left[\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right]' = \frac{f'_1(x)\, f_2(x) - f_1(x)\, f'_2(x)}{[f_2(x)]^2}, \tag{18·3}$$

platný pro ta x, v nichž existují obě derivace $f'_1(x)$, $f'_2(x)$ a jest $f_2(x) \neq 0$.

19. Inversní funkce. Budiž definována v nějakém intervalu J spojitá funkce

$$y = f(x). \tag{19·1}$$

Zvolme dvě čísla a_1, a_2 z intervalu J a položme $b_1 = f(a_1)$,



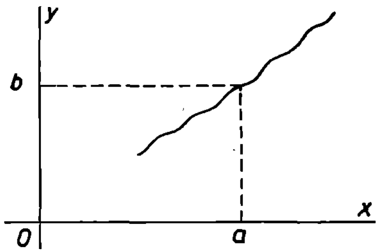
Obr. 13.

$b_2 = f(a_2)$. Předpokládejme, že je $b_1 < b_2$ a zvolme si nějaké číslo d tak, že

$$b_1 < d < b_2. \tag{19·2}$$

Ty body $(x; y)$, pro něž platí $y = d$, tvoří vodorovnou přímku p [viz obr. (13)]. Z (19·2) následuje, že bod $A_1 = (a_1; b_1)$ leží pod přímkou p a bod $A_2 = (a_2; b_2)$ nad přímkou p. Protože je funkce (19·1) spojitá, tvoří její graf jedinou souvislou čáru; tato čára spojuje bod A_1 pod přímkou p s bodem A_2 nad přímkou p. Názor ukazuje, že mezi body A_1 a A_2 musí býti na grafu aspoň jeden bod C, který leží také na přímce p. Tomuto bodu C odpovídá číslo c, které leží mezi čísly a_1, a_2 a v kterém funkce $f(x)$ nabývá hodnoty d. Takových bodů C může býti ovšem také více; na př. v obr. 13 máme tři takové body C, jimž odpovídají tři čísla c.

Tím jsme dospěli k tomuto výsledku: Nabude-li spojitá funkce v nějakém intervalu J hodnot b_1 a b_2, při čemž $b_1 < b_2$, a je-li $b_1 < d < b_2$, nabude tato funkce v intervalu J hodnoty d (jednou nebo vícekrát). Z toho následuje dále, že hodnoty, kterých spojitá funkce nabude v intervalu J, tvoří interval, není-li ta funkce konstanta. (Konstanta nabývá ovšem jen jediné hodnoty.) K tomuto výsledku jsme byli vedeni názorem; v Dodatku je udán přesný důkaz nezávislý na názoru.



Obr. 14.

Nyní předpokládejme o funkci (19·1) nejen, že je v intervalu J spojitá, nýbrž ještě také, že v intervalu J stále roste. Hodnoty, kterých funkce (19·1) v intervalu J nabude, tvoří interval K. Každému číslu a z intervalu J přiřazuje funkce (19·1) zcela určité číslo b z intervalu K tak, že

$$b = f(a). \tag{19·3}$$

Ale nyní můžeme tvrditi také obráceně, že každému číslu b

z intervalu K přiřazuje funkce (19·1) zcela určité číslo a z intervalu J tak, že platí (19·1) (viz obr. 14). Neboť jsou-li a_1, a_2 dvě různá čísla z intervalu J a je-li na př. $a_1 < a_2$, musí býti $f(a_1) < f(a_2)$, protože (19·1) je rostoucí funkce, takže nemůže býti současně $f(a_1) = b$, $f(a_2) = b$. K danému číslu a najdeme číslo b, protneme-li graf funkce (19·1) svislou přímkou o rovnici $x = a$; k danému číslu b najdeme číslo a, protneme-li graf funkce (19·1) vodorovnou přímkou o rovnici $y = b$.

Je-li tedy (19·1) spojitá rostoucí funkce v intervalu J, je netoliko proměnná y určitou funkcí proměnné x, nýbrž také x lze považovati za funkci proměnné y, t. j. můžeme psáti

$$x = \varphi(y), \tag{19·4}$$

při čemž vztah (19·4) je ekvivalentní se vztahem (19·1). Funkce (19·4) se nazývá inversní funkce k funkci (19·1).

Z názoru je patrné, že současně s funkcí (19·1) také inversní funkce (19·4) je spojitá rostoucí funkce. Můžeme si to ostatně také formálně dokázati. Jsou-li nejprve b_1, b_2 dvě čísla z intervalu K a je-li na př. $b_1 < b_2$, jest $\varphi(b_1) < \varphi(b_2)$; neboť nechť $\varphi(b_1) = a_1$, $\varphi(b_2) = a_2$; pak je $b_1 = f(a_1)$, $b_2 = f(a_2)$; kdyby bylo $a_1 = a_2$, bylo by $b_1 = b_2$; kdyby bylo $a_2 < a_1$, bylo by $b_2 < b_1$, neboť $f(x)$ je rostoucí funkce; protože oboje je nemožné, musí býti $a_1 < a_2$, t. j. $\varphi(b_1) < \varphi(b_2)$. Tím je dokázáno, že $\varphi(y)$ je rostoucí funkce v intervalu K. Dále si zvolme v intervalu K určité číslo b a dokažme, že je funkce (19·4) pro $y = b$ spojitá. Pro určitost si provedeme tento důkaz za předpokladu, že číslo b leží uvnitř intervalu K. Je-li $a = \varphi(b)$ [takže také platí (19·3)], uvědomíme si snadno, že číslo a leží uvnitř intervalu J. Je-li dáno kladné číslo ε, můžeme si zvoliti v intervalu J čísla a_1, a_2 tak, že jest

$$a - \varepsilon < a_1 < a < a_2 < a + \varepsilon. \tag{19·5}$$

Položme $b_1 = f(a_1)$, $b_2 = f(a_2)$. Zřejmě $b_1 < b < b_2$, takže existuje kladné číslo δ takové, že

$$b_1 < b - \delta < b < b + \delta < b_2. \tag{19·6}$$

Nyní platí

$$|y - b| < \delta \Rightarrow |\varphi(y) - \varphi(b)| < \varepsilon,$$

čímž je spojitost funkce $\varphi(y)$ pro $y = b$ dokázána. Neboť nechť $|y - b| < \delta$. Pak je $b - \delta < y < b + \delta$, takže podle (19·6) je $b_1 < y < b_2$. Protože $\varphi(y)$ je rostoucí funkce, je $\varphi(b_1) < \varphi(y) < \varphi(b_2)$ neboli $a_1 < \varphi(y) < a_2$, takže podle (19·5) je $a - \varepsilon < \varphi(y) < a + \varepsilon$ neboli $|\varphi(y) - \varphi(b)| < \varepsilon$, neboť $a = \varphi(b)$.

Předpokládejme nyní, že v čísle a, které leží uvnitř intervalu J, má naše funkce (19·1) derivaci, že tedy

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a). \tag{19·7}$$

Protože $f(x)$ je rostoucí funkce, mají ve zlomku, který je nalevo v (19·7), čitatel a jmenovatel stále stejné znamení, t. j. ten zlomek je stále kladný. Takový zlomek se zřejmě nemůže blížit zápornému číslu. Tedy je $f'(a) \geq 0$. Předpokládejme, že jest $f'(a) \neq 0$, tedy že jest $f'(a) > 0$. Podle V v odst. 15 je pak

$$\lim_{x \to a} \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{f'(a)}. \tag{19·8}$$

Ale když se číslo x blíží číslu a, blíží se bod (x, y) na grafu funkce (19·1) bodu (a, b) a proměnná $y = f(x)$ se blíží hodnotě b. Obráceně, když se y blíží číslu b, blíží se bod $(x; y)$ na grafu funkce (19·1) bodu $(a; b)$ a proměnná $x = \varphi(y)$ se blíží hodnotě b. Proto lze vztah (19·8) psáti také

$$\lim_{x \to b} \frac{\varphi(y) - \varphi(b)}{y - b} = \frac{1}{f'(a)} \tag{19·9}$$

a to znamená, že funkce (19·4) inversní k funkci (19·1) má pro $y = b$, kde $b = f(a)$, derivaci rovnou převrácené hodnotě derivace $f'(a)$ (za předpokladu, že derivace $f'(a)$ existuje a není rovna nule).

Formální důkaz vztahu (19·9) probíhá asi takto. Zvolme číslo $\varepsilon > 0$. Máme dokázati, že existuje číslo $\delta > 0$ takové, že

$$|y - b| < \delta \Rightarrow \left| \frac{\varphi(y) - \varphi(b)}{y - b} - \frac{1}{f'(a)} \right| < \varepsilon. \tag{19·10}$$

Podle (19·8) existuje číslo $\alpha > 0$ takové, že

$$|x-a| < \alpha \Rightarrow \left| \frac{x-a}{f(x)-f(a)} - \frac{1}{f'(a)} \right| < \varepsilon. \qquad (19 \cdot 11)$$

Protože funkce (19·4) je pro $y = b$ spojitá, existuje číslo $\delta > 0$ takové, že

$$|y-b| < \delta \Rightarrow |\varphi(y) - \varphi(b)| < \alpha. \qquad (19 \cdot 12)$$

Toto číslo δ má vlastnost (19·10). Neboť je-li $|y - b| < \delta$, podle (19·12) je $|\varphi(y) - a| < \alpha$, ježto $a = \varphi(b)$. Tedy podle (19·11) je

$$\left| \frac{\varphi(y) - a}{f[\varphi(y)] - f(a)} - \frac{1}{f'(a)} \right| < \varepsilon$$

a to se mělo právě dokázati, neboť $a = \varphi(b)$, $b = f(a)$, $y = f[\varphi(y)]$.

Pravidla o derivování inversní funkce, které jsme právě odvodili, užijeme v této knížce na jediném příkladě. Budiž

$$y = x^n, \qquad (19 \cdot 13)$$

kde n znamená určité celé kladné číslo a x probíhá interval J všech kladných čísel. (19·13) určuje spojitou rostoucí funkci a inversní funkce je

$$x = \sqrt[n]{y}. \qquad (19 \cdot 14)$$

Víme, že funkce (19·13) má derivaci nx^{n-1}; pro kladné x je tato derivace kladná, a proto má funkce (19·14) derivaci

$$\frac{1}{nx^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{x}{x^n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\sqrt[n]{y}}{y}.$$

Místo y můžeme na konec zase psáti x a zapsati si nový vzorec pro derivování odmocniny

$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n} \cdot \frac{\sqrt[n]{x}}{x}, \qquad (19 \cdot 15)$$

platný pro každé kladné x.

Je-li nyní dáno libovolné t. zv. racionální číslo r, t. j. zlomek

$$r = \frac{m}{n},$$

kde m a n jsou čísla celá, při čemž můžeme předpokládati $n > 0$, je vám známo, že při kladném x se definuje mocnina x^r s exponentem r takto:

$$x^r = (\sqrt[n]{x})^m. \tag{19·16}$$

Derivaci funkce x^r můžeme počítati, spojíme-li právě odvozený vzorec (19·14) se vzorcem (18·1). Dostaneme takto

$$(x^r)' = [(\sqrt[n]{x})^m]' = m \,.\, (\sqrt[n]{x})^{m-1} \,.\, (\sqrt[n]{x})' =$$

$$= m\,(\sqrt[n]{x})^{m-1} \,.\, \frac{1}{n}\,\frac{\sqrt[n]{x}}{x} = \frac{m}{n}\, x^{\frac{m-1}{n}} \,.\, x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}\, x^{\frac{m}{n}-1}$$

neboli

$$(x^r)' = r x^{r-1}. \tag{19·17}$$

Pro celý exponent r byl vzorec (19·17) odvozen již v odst. 16; nyní vidíme, že (při kladném x) platí tento vzorec i tehdy, když exponent je lomený (a má jakékoli znamení).

20. Výcvik v derivování. Podle pravidel, s nimiž jsme se seznámili v odst. 16 až 19, můžeme derivovati mnoho jednoduchých funkcí. Nyní je třeba, abyste se v tom cvičili. Zejména vzorce pro derivaci složené funkce budete bez námahy užívati teprve, až si provedete řadu příkladů.

Příklad 1. Derivujte funkci $f(x) = (2 - 3x)^2$.

Položíme $y = 2 - 3x$; pak je $f(x) = y^2$, tedy $f'(x) = 2yy'$; ježto $y' = -3$, jest $f'(x) = -6y = 6 \,.\, (3x - 2)$.

Příklad 2. Derivujte funkci $\sqrt{x^4 + 1}$.

Položíme $y = x^4 + 1$; pak je $f(x) = y^{\frac{1}{2}}$, tedy $f'(x) = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} \,.\, y'$; ježto $y' = 4x^3$, jest $f'(x) = 2x^3 \,.\, y^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{2x^3}{\sqrt{x^4 + 1}}$.

Někdy je třeba užíti vzorce pro derivaci složené funkce dvakrát.

Příklad 3. Derivujte funkci $f(x) = \sqrt{3 + \sqrt{x^2 + 1}}$.

Položíme $y = x^2 + 1$, $z = 3 + \sqrt{y}$; pak je $f(x) = \sqrt{z}$, tedy $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot z^{-\frac{1}{2}} \cdot z'$; dále je $z' = \frac{1}{2} \cdot y^{-\frac{1}{2}} \cdot y'$, tedy $f'(x) = $ $= \frac{1}{4} \frac{y'}{\sqrt{y} \cdot \sqrt{z}}$; ježto $y' = 2x$, je $f'(x) = \frac{1}{2} \frac{x}{\sqrt{y} \cdot \sqrt{z}} =$ $= \frac{1}{2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} \cdot \sqrt{3 + \sqrt{x^2 + 1}}}$.

Pravidlu pro derivování podílu [viz (18·3)] se můžeme někdy vyhnout.

Příklad 4. Derivujte funkci $f(x) = \frac{x^2}{(x + 1)^2}$.

Podle pravidla o derivování podílu je

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x + 1)^2 - x^2 \cdot 2(x + 1)}{(x + 1)^4} = \frac{(x + 1)\,[2x(x + 1) - 2x^2]}{(x + 1)^4} =$$
$$= \frac{2x}{(x + 1)^3}.$$

Můžeme však také psáti $f(x) = x^2 \cdot (x + 1)^{-2}$ a užíti pravidla pro derivování součinu

$$f'(x) = 2x \cdot (x + 1)^{-2} + x^2 \cdot [-2(x + 1)^{-3}] = (x + 1)^{-3} \cdot$$
$$\cdot [2x(x + 1) - 2x^2] = (x + 1)^{-3} \cdot 2x = \frac{2x}{(x + 1)^3}.$$

Cvičení.*) Ve cvičeních **20·1** až **20·45** máte pokaždé počítati derivaci dané funkce.

20·1. $x^3 - 7x + 6$. **20·2.** $2x^4 - 9x^2 + 6$. **20·3.** $3x^{10} - 6x^5 + x^3$.

20·4. $\sqrt[5]{x}$. **20·5.** $\sqrt[8]{x^2}$. **20·6.** $\sqrt{x^3}$.

20·7. x^{30}. **20·8.** x^{60}. **20·9.** x^{100}.

20·10. $\frac{1}{x^{30}}$. **20·11.** $\frac{1}{x^{60}}$. **20·12.** $\frac{1}{x^{100}}$.

20·13. $(1 - x)^2$. **20·14.** $(1 + x)^3$. **20·15.** $(1 - x)^3$.

20·16. $(1 - 2x)^3$. **20·17.** $(3x + 2)^4$. **20·18.** $(2 - 5x)^4$.

---

*) Řešení cvičení jsou uvedena na konci knížky.

20·19. $\dfrac{x^2+1}{x}$. **20·20.** $\dfrac{x}{x^2+1}$. **20·21.** $\dfrac{x}{x^2-1}$.

20·22. $\dfrac{8x}{x^2+4}$. **20·23.** $\dfrac{x^2+9}{x^2-9}$. **20·24.** $\dfrac{1-2x}{2-x}$.

20·25. $\dfrac{5x-3}{3x-4}$. **20·26.** $\dfrac{3x-4}{5x-3}$. **20·27.** $\dfrac{x}{(x-2)^2}$.

20·28. $\dfrac{(2-x)^3}{(2+x)^2}$. **20·29.** $\dfrac{x^2-2x+4}{x^2+2x+4}$. **20·30.** $\dfrac{(x+1)^2}{x^2+2x-5}$.

20·31. $(1-x^3)^2$. **20·32.** $(1-x^2)^3$. **20·33.** $(1-x^3)^3$.

20·34. $\sqrt{x}\,.\,(x^3+3x^2)$. **20·35.** $(x+2)(x-1)^2$. **20·36.** $(x+2)^2(x-1)$.

20·37. $\sqrt{4x+5}$. **20·38.** $\sqrt{5x-4}$. **20·39.** $\sqrt[3]{2x+1}$.

20·40. $\dfrac{1}{\sqrt{4x+5}}$. **20·41.** $\dfrac{1}{\sqrt{5x-4}}$. **20·42.** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{1-2x}}$.

20·43. $\left(\dfrac{x}{1-x}\right)^5$. **20·44.** $\sqrt{\dfrac{x}{1-x^2}}$. **20·45.** $\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$.

21. Vyšetření průběhu funkce. Nechť funkce $f(x)$ má v intervalu J všude derivaci; buďtež a, b dvě čísla z intervalu J $(a < b)$. Pak existuje (aspoň jedno) číslo ξ takové, že $a < \xi < b$ a že

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)\,.\,(b-a). \qquad (21{\cdot}1)$$

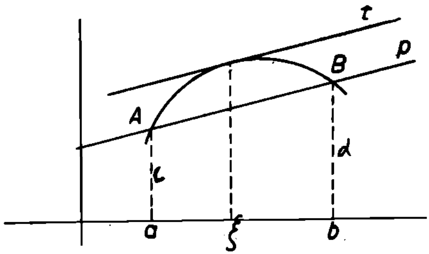
Přesný důkaz této věty bude podán v Dodatku. Nyní si pouze uvědomíme její názorný obsah a potom si uvedeme několik důsledků.

Je-li $c = f(a)$, $d = f(b)$, pak jsou $A = (a; c)$, $B = (b, d)$ dva body grafu funkce $f(x)$ (viz obr. 15). Směrnice přímky p, která spojuje body A, B, je podle (7·5) rovna podílu

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Platí-li (21·1), je tato směrnice rovna $f'(\xi)$, t. j. je rovna směrnici tečny t v tom bodě grafu, který přísluší hodnotě $x = \xi$. Tedy názorný obsah naší věty je prostě tento:

Jsou-li A, B dva různé body grafu funkce $f(x)$, pak leží mezi nimi na grafu aspoň jeden bod, v kterém je tečna grafu rovnoběžná se spojnicí AB.



Obr. 15.

Víme, že derivace konstanty je rovna nule identicky (t. j. pro každé x). Obráceně budiž dána v nějakém intervalu J funkce $f(x)$, jejíž derivace je identicky rovna nule. Pak je tato funkce konstanta. Neboť nechť a, b jsou dvě libovolná čísla z intervalu J a nechť na př. $a < b$; máme dokázati, že je $f(a) = f(b)$. To plyne z (21·1), neboť za našich předpokladů musí býti $f'(\xi) = 0$.

Má-li funkce $f(x)$ v nějakém intervalu J všude derivaci a je-li tato derivace uvnitř intervalu J stále kladná, pak funkce $f(x)$ roste v intervalu J. Jsou-li a, b dvě čísla z intervalu J a je-li $a < b$, pak plyne z (21·1), že $f(a) < f(b)$, neboť číslo $f'(\xi)$ je kladné.

Má-li funkce $f(x)$ v nějakém intervalu J všude derivaci a je-li tato derivace uvnitř intervalu J stále záporná, pak funkce $f(x)$ klesá v intervalu J. To plyne zase ihned z (21·1).

Poznatky, které jsme právě získali, umožňují v jednoduchých případech velmi pohodlně stanoviti průběh dané funkce $f(x)$. Vypočteme si derivaci $f'(x)$ a najdeme kořeny rovnice $f'(x) = 0$, t. j. určíme si ty hodnoty nezávisle proměnné, v nichž má funkce $f(x)$ derivaci rovnou nule. Těchto hodnot je v obyčejných případech konečný počet. Tyto hodnoty rozdělí obor nezávisle proměnné na intervaly, při čemž funkce $f(x)$ má uvnitř každého takového intervalu J všude derivaci, která tam není nikde rovna nule. V Dodatku bude přesně dokázáno, že derivace $f'(x)$ je nutně uvnitř takového intervalu J buďto stále kladná nebo stále záporná. Máme tedy obor nezávisle proměnné x rozdělen na konečný počet intervalů J, při čemž v každém intervalu J funkce $f(x)$ buďto stále roste nebo stále klesá. Protože hodnoty, kterých funkce $f(x)$ nabude v jednotlivém intervalu J, tvoří interval (viz odst. 19), získáváme takto přehled o všech hodnotách, kterých funkce $f(x)$ nabývá.

Zvláště často se zajímáme o t. zv. **maxima a minima** funkce $f(x)$. Říkáme, že funkce $f(x)$ má v čísle a maximum, je-li hodnota $f(a)$ větší než hodnoty, kterých nabývá $f(x)$ v číslech x blízkých číslu a, ale různých od a, tedy existuje-li číslo $\varepsilon > 0$ takové, že

$$0 < | x - a | < \varepsilon \Rightarrow f(x) < f(a).$$

Říkáme, že funkce $f(x)$ má v čísle a minimum, je-li hodnota $f(a)$ menší než hodnoty, kterých nabývá $f(x)$ v číslech x blízkých číslu a, ale různých od a, tedy existuje-li číslo $\varepsilon > 0$ takové, že

$$0 < | x - a | < \varepsilon \Rightarrow f(x) > f(a).$$

Je patrné, že při stanovení průběhu funkce $f(x)$, jak bylo výše vylíčeno, obdržíme také všecka maxima a minima. Neboť uvnitř intervalu J, v němž funkce $f(x)$ stále roste nebo v němž stále klesá, zřejmě nemůže býti ani žádné maximum ani žádné minimum funkce $f(x)$. Tedy jako maxima a minima přicházejí v úvahu pouze ta čísla, v nichž má funkce $f(x)$ derivaci rovnou nule. Takové číslo a ostatně nemusí býti ani maximem ani minimem funkce $f(x)$. To lze ukázati jednoduchým příkladem $f(x) = x^3$. Tato funkce je definována pro všecka x a má všude derivaci $f'(x) = 3x^2$. Tato derivace je rovna nule v čísle $x = 0$ a jinde je všude kladná. Proto funkce $f(x)$ roste i v intervalu $[-\infty, 0]$ i v intervalu $[0, \infty]$, takže roste všude a nemá ani maxima ani minima. Dále nesmíme zapomínat na možný případ, že v některém čísle neexistuje derivace $f'(x)$; takové číslo může docela dobře býti maximem nebo minimem funkce $f(x)$. To lze ukázati příkladem $f(x) = |x|$ (viz obr. 12 na str. 34); tato funkce má zřejmě minimum v čísle $x = 0$, v němž derivace $f'(x)$ neexistuje.

Příklad 1. Dokažte, že rovnice $x^5 - 15x^3 + 3 = 0$ má tři kořeny, po jednom v každém z tří intervalů $[-4, -3]$, $[0, 1]$, $[3, 4]$.

Budeme vyšetřovati průběh funkce $f(x) = x^5 - 15x^3 + 3$. Jest $f'(x) = 5x^4 - 45x^2 = 5x^2 \cdot (x - 3) \cdot (x + 3)$. Je tedy derivace součinem tří faktorů, z nichž prvý je stále kladný mimo $x = 0$, druhý je kladný pro $x > 3$, záporný pro $x < 3$ a rovný nule pro $x = 3$, třetí je kladný pro $x > -3$, záporný pro $x < < -3$ a rovný nule pro $x = -3$. Tedy je $f'(x) = 0$ pro $x = 0$, $x = 3$, $x = -3$, dále $f'(x) > 0$ pro $x < -3$ a pro $x > 3$, konečně $f'(x) < 0$ pro $-3 < x < 3$, $x \neq 0$. Proto funkce $f(x)$ roste v intervalech $[-\infty, -3]$, $[3, \infty]$ a klesá v intervalu $[-3, 3]$. Jest $f(-3) = 165$, $f(3) = -159$, takže když x probíhá interval $[-3, 3]$, probíhá $f(x)$ interval $[-159, 165]$. Abychom zjistili, jakých hodnot nabývá $f(x)$, probíhá-li x interval $[-\infty, -3]$ nebo interval $[3, \infty]$, uvažme, že pro $x \neq 0$ se dá $f(x)$ psáti ve tvaru

$$f(x) = x^5 \cdot \left(1 - \frac{15}{x^2} + \frac{3}{x^5}\right). \tag{21·2}$$

Je-li číslo $|x|$ velmi veliké, je závorka ve (21·2) přibližně rovna jedné, takže $f(x)$ je přibližně rovná x^5; tedy číslo $|f(x)|$ je velmi veliké. Jelikož funkce $f(x)$ v intervalu $[3, \infty]$ roste, vidíme, že její hodnoty vyplní celý interval $[f(3), \infty] = = [-159, \infty]$. Podobně, když x probíhá interval $[-\infty, -3]$, vyplní hodnoty $f(x)$ celý interval $[-\infty, 165]$. Celkový výsledek tedy je:

v intervalu $[-\infty, -3]$ funkce $f(x)$ roste a nabude všech hodnot z intervalu $[-\infty, 165]$;

v intervalu $[-3, 3]$ funkce $f(x)$ klesá a nabude všech hodnot z intervalu $[-159, 165]$;

v intervalu $[3, \infty]$ funkce $f(x)$ roste a nabude všech hodnot z intervalu $[-159, \infty]$.

Tím je dokázáno, že funkce $f(x)$ má maximum v čísle $x = = -3$ a minimum v čísle $x = 3$ a že nemá jiných maxim a minim. Dále je tím dokázáno, že rovnice $f(x) = 0$ má tři kořeny, po jednom v každém z tří intervalů $[-\infty, -3]$,

$[-3, 3]$, $[3, \infty]$. Abychom tyto kořeny blíže určili, stačí vedle již vypočtených hodnot

$$f(-3) = 165, \ f(3) = -159$$

ještě si vypočítati hodnoty

$$f(-4) = -61, \ f(0) = 3, \ f(1) = -11, \ f(4) = 67.$$

Interval $[-3, 3]$ se čísly $x = 0$ a $x = 1$ rozdělí na tři intervaly $[-3, 0]$, $[0, 1]$, $[1, 3]$; protože funkce $f(x)$ v intervalu $[-3, 3]$ klesá, klesá tím spíš v intervalu $[0, 1]$; protože $f(0) > 0$, $f(1) < 0$, nabude $f(x)$ hodnoty 0 v jednom čísle x z intervalu $[0, 1]$, t. j. ten kořen rovnice $f(x) = 0$, který je v intervalu $[-3, 3]$, musí býti v intervalu $[0, 1]$. Podobně vidíme, že ten kořen, který je v intervalu $[-\infty, -3]$, musí býti v intervalu $[-4, -3]$ a že ten kořen, který je v intervalu $[3, \infty]$, musí býti v intervalu $[3, 4]$.

Příklad 2. Určete průběh funkce

$$f(x) = \frac{4}{x} + \frac{1}{1-x}. \tag{21·3}$$

Pro $x = 0$ a pro $x = 1$ není naše funkce definována. Všude jinde má derivaci

$$f'(x) = -\frac{4}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{x^2 - 4(1-x)^2}{x^2(1-x)^2}.$$

Podle známého vzorce $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ jest

$$x^2 - 4(1-x)^2 = [x + 2(1-x)][x - 2(1-x)] = \\ = (2-x)(3x-2),$$

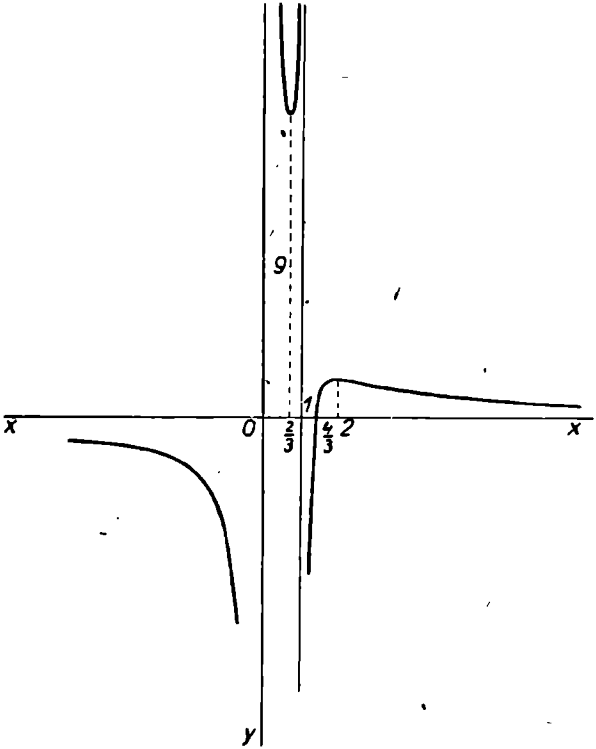
takže

$$f'(x) = 3\frac{(2-x)(x-\frac{2}{3})}{x^2(1-x)^2}. \tag{21·4}$$

Ze (21·3) plyne snadno, že se $f(x)$ blíží nule, roste-li $|x|$ nade všecky meze. Dále je ze (21·3) patrné, že $|f(x)|$ roste nade všecky meze, blíží-li se x některé z obou hodnot $x = 0$ nebo $x = 1$. Nyní už si snadno získáme přehled o hodnotách, kterých nabývá funkce $f(x)$. Musíme postupně zkoumat průběh funkce $f(x)$ v intervalech.

$$[-\infty, 0], \ [0, \tfrac{2}{3}], \ [\tfrac{2}{3}, 1], \ [1, 2], \ [2, \infty].$$

Uvnitř intervalu $[-\infty, 0]$ je $f'(x) < 0$ podle (21·4), takže $f(x)$ klesá; z toho, co víme o chování funkce $f(x)$, blíží-li se x nule nebo roste-li $|x|$ nade všecky meze, vychází, že hodnoty funkce



Obr. 16.

vyplní vnitřek intervalu [— ∞, 0]. Uvnitř intervalu [0, $\frac{2}{3}$] je $f'(x) < 0$ podle (21·4), takže $f(x)$ klesá; blíží-li se x nule, roste $|f(x)|$ nade všecky meze; mimo to je $f(\frac{2}{3}) = 9$; proto hodnoty funkce vyplní interval [9, ∞]. Uvnitř intervalu [$\frac{2}{3}$, 1] je $f'(x) > 0$ podle (21·4), takže $f(x)$ roste; blíží-li se x číslu 1, roste $|f(x)|$ nade všecky meze; ježto $f(\frac{2}{3}) = 9$, hodnoty funkce vyplní interval [9, ∞]. Uvnitř intervalu [1, 2] je $f'(x) > 0$ podle (21·4), takže $f(x)$ roste; blíží-li se x číslu 1, roste $|f(x)|$ nade všecky meze; mimo to je $f(2) = 1$; proto hodnoty funkce vyplní interval [— ∞, 1]. Uvnitř intervalu [2, ∞] je $f'(x) < 0$ podle

(21·4), takže $f(x)$ klesá; roste-li x nade všecky meze, blíží se $f(x)$ nule; protože $f(2) = 1$, vyplní hodnoty funkce vnitřek intervalu $[0, 1]$.

Celkový průběh funkce $f(x)$ je nejlépe patrný z jejího grafu (v. obr. 16). V čísle $x = \frac{2}{3}$ má $f(x)$ minimum; v čísle $x=2$ má $f(x)$ maximum; jiných maxim a minim funkce $f(x)$ nemá. Graf má tři asymptoty; osu x, osu y a svislou přímku s rovnicí $x = 1$. Pomocí grafu snadno přehlédneme, jakých hodnot funkce $f(x)$ nabývá. Každé hodnoty větší než 9 nabude $f(x)$ dvakrát, jednou uvnitř intervalu $[0, \frac{2}{3}]$, po druhé uvnitř intervalu $[\frac{2}{3}, 1]$; hodnoty 9 nabude $f(x)$ pouze jednou, a to v čísle $x = \frac{2}{3}$; hodnot uvnitř intervalu $[1, 9]$ funkce $f(x)$ vůbec nenabývá; hodnoty 1 nabude funkce $f(x)$ pouze jednou, a to v čísle $x = 2$. Také hodnoty 0 nabude $f(x)$ pouze jednou; ze (21·3) se snadno vypočte, že $f(\frac{4}{3}) = 0$. Každé hodnoty uvnitř intervalu $[0, 1]$ nabude $f(x)$ dvakrát, jednou uvnitř intervalu $[\frac{4}{3}, 2]$, po druhé uvnitř intervalu $[2, \infty]$; každé hodnoty uvnitř intervalu $[-\infty, 0]$ nabude $f(x)$ dvakrát, jednou uvnitř intervalu $[-\infty, 0]$, po druhé uvnitř intervalu $[1, \frac{4}{3}]$.

Cvičení. **21·1.** Dokažte, že funkce $f(x) = (x - 1)^2 (x + 2)$ nabude každé hodnoty uvnitř intervalu $[0, 4]$ v třech různých číslech x, a každé hodnoty uvnitř intervalu $[-\infty, 0]$ nebo uvnitř intervalu $[4, \infty]$ jen jednou; hodnot 0 a 4 nabude $f(x)$ každé dvakrát.

21·2. Dokažte, že rovnice $2x^3 - 3x^2 - 36x + 10 = 0$ má jeden záporný kořen a dva kladné; u každého kořenu určete, mezi kterými dvěma celými čísly leží.

21·3. Dokažte, že funkce $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1$ nabude každé kladné hodnoty ve dvou různých číslech x.

21·4. Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \dfrac{x\,(x - 1)}{x^2 + 3x + 3}$.

21·5. Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \dfrac{x^4}{(x - 1)\,(x - 3)^3}$.

21·6. Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \dfrac{x - 3}{\sqrt{1 + x^2}}$.

21·7. Dokažte, že funkce $f(x) = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \ldots$ $\ldots + (x - a_n)^2$ nabude své nejmenší hodnoty v čísle $x =$ $= \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$.

21·8. Dokažte, že funkce $f(x) = \dfrac{x(x-1)}{x-c}$ nabývá všech možných hodnot, je-li c uvnitř intervalu $[0, 1]$, kdežto pro c mimo interval $[0, 1]$ existuje interval J délky $4\sqrt{c(c-1)}$ takový, že $f(x)$ nabývá právě těch hodnot, které nejsou uvnitř J.

22. Úlohy vedoucí na maxima a minima funkce. Existuje řada zajímavých úloh, u kterých si musíme napřed sestavit funkci $f(x)$, načež je úloha řešena určením průběhu této funkce.

Příklad 1. Dokažte, že ze všech pravoúhlých trojúhelníků, u nichž je součet délky přepony a délky jedné odvěsny roven dané délce, má největší plošný obsah takový trojúhelník, u něhož jmenované dvě strany svírají úhel 60°.

Daný součet můžeme zvolit za jednotku délky. Pak bude

$$x + y = 1, \tag{22·1}$$

znamená-li x délku přepony a y délku jedné odvěsny. Délka druhé odvěsny je podle Pythagorovy věty $\sqrt{x^2 - y^2}$. Dvojnásobný obsah trojúhelníka je tedy $y \,.\, \sqrt{x^2 - y^2}$, což je podle (22·1) rovné

$$f(x) = (1-x) \,.\, \sqrt{x^2 - (1-x)^2} = (1-x)\sqrt{2x-1}. \tag{22·2}$$

Vzhledem ke svému geometrickému významu musí býti číslo x jednak menší než 1, jednak větší než $y = 1 - x$, t. j. x musí býti uvnitř intervalu $[\frac{1}{2}, 1]$. Podle (22·2) je

$$f'(x) = -\sqrt{2x-1} + \frac{1-x}{\sqrt{2x-1}} = \frac{2-3x}{\sqrt{2x-1}}.$$

Pro $\frac{1}{2} < x < \frac{2}{3}$ je $f'(x) > 0$, pro $\frac{2}{3} < x < 1$ je $f'(x) < 0$. Proto $f(x)$ roste v intervalu $[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$ a klesá v intervalu $[\frac{2}{3}, 1]$, takže $f(x)$ nabude své největší hodnoty pro $x = \frac{2}{3}$. Podle (22·1) však je $x = \frac{2}{3}$ tehdy a jenom tehdy, když $x = 2y$ a z elementární geometrie je známo, že je $x = 2y$ tehdy a jen tehdy, když přepona a odvěsna délky y svírají úhel 60°. Maximální obsah je roven

$$\frac{1}{2} f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6\sqrt{3}}.$$

Příklad 2. Budiž $a > 0$, $b > 0$, $C = (a; b)$. Bodem C si mysleme vedeny přímky p tak, aby protly osu x napravo od počátku a osu y nad počátkem; jinak je poloha přímky p libovolná. Pro každou přípustnou polohu přímky p označme P její průsečík s osou x a Q její průsečík s osou y. Dokažte, že nejmenší hodnota výrazu $\overline{OP} + \overline{OQ}$ je $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ a že nejmenší hodnota výrazu $\overline{OP} . \overline{OQ}$ je $4ab$.

Přímka p není svislá a má tedy určitou směrnici. Z názoru je patrné, že tato směrnice musí býti **záporná**; označme si ji $-t$. Rovnice přímky p zní (viz odst. 7)

$$y = b - t(x - a). \tag{22·3}$$

Bod P dostaneme, položíme-li $y = 0$ ve (22·3), takže

$$P = \left(a + \frac{b}{t}; 0\right). \tag{22·4}$$

Bod Q dostaneme, položíme-li $x = 0$ ve (22·3), takže

$$Q = (0; b + at). \tag{22·5}$$

Ježto pro $t > 0$ je

$$a + \frac{b}{t} > 0, \quad b + at > 0,$$

vidíme, že proměnná t není podrobena jiné podmínce než $t > 0$, což je ostatně z názoru patrné. Podle (22·4) a (22·5) je

$$\overline{OP} = \frac{b + at}{t}, \quad \overline{OQ} = b + at,$$

takže

$$\overline{OP} + \overline{OQ} = f_1(t) = \frac{b}{t} + a + b + at,$$

$$\overline{OP} . \overline{OQ} = f_2(t) = \frac{(b + at)^2}{t} = \frac{b^2}{t} + 2ab + a^2t.$$

Jest předně

$$f'_1(t) = -\frac{b}{t^2} + a,$$

takže $f'_1(t) < 0$ pro $0 < t < \sqrt{\frac{b}{a}}$ a $f'_1(t) > 0$ pro $t > \sqrt{\frac{b}{a}}$. Z toho následuje, že nejmenší hodnota funkce $f_1(t)$ je

$$f_1\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right) = \frac{b}{\sqrt{\frac{b}{a}}} + a + b + a\sqrt{\frac{b}{a}} = a + 2\sqrt{ab} + b = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2.$$

Jest za druhé
$$f'_2(t) = -\frac{b^2}{t^2} + a^2,$$
takže $f'_2(t) < 0$ pro $0 < t < \frac{b}{a}$ a $f'_2(t) > 0$ pro $t > \frac{b}{a}$. Z toho následuje, že nejmenší hodnota funkce $f_2(t)$ je
$$f_2\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{\left(b + a\,.\,\frac{b}{a}\right)^2}{\frac{b}{a}} = 4ab.$$
Z provedené diskuse vychází, že $\overline{OP} + \overline{OQ}$ nabude své nejmenší hodnoty $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ pro jedinou polohu přímky p a že nabude každé hodnoty větší než $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$, a to při dvojí poloze přímky p. Docela stejně nabude $\overline{OP}\,.\,\overline{OQ}$ své nejmenší hodnoty $4ab$ pro jedinou polohu přímky p, a každé hodnoty větší než $4ab$ nabude při dvojí poloze přímky p.

Příklad 3. Tečna elipsy protíná osy v bodech P a Q. Dokažte, že nejmenší hodnota výrazu $\overline{PQ}$ se rovná součtu obou poloos elipsy.

Při této úloze potřebujeme trochu více znalostí z analytické geometrie, než jsme si v prvých odstavcích této knížky zopakovali. Jsou-li osy elipsy totožné s osami x a y (což ovšem můžeme předpokládati) a jsou-li a, b délky obou poloos, pak musíme předně věděti, že rovnice elipsy zní
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1. \qquad (22\cdot6)$$
Je-li $(x_0; y_0)$ libovolný bod na elipse, musíme dále věděti, že rovnice tečny elipsy v bodě $(x_0; y_0)$ zní
$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1. \qquad (22\cdot7)$$
Zřejmě se můžeme omeziti na ty body $(x_0; y_0)$ naší elipsy, pro něž platí $x_0 > 0$, $y_0 > 0$. Bod P dostaneme, položíme-li $y = 0$ ve (22·7), takže
$$P = \left(\frac{a^2}{x_0}; 0\right).$$
Bod Q dostaneme, položíme-li $x = 0$ ve (22·7), takže
$$Q = \left(0; \frac{b^2}{y_0}\right).$$

Podle vzorce (4·2) je

$$\overline{PQ}^2 = \frac{a^4}{x_0^2} + \frac{b^4}{y_0^2}.$$

Protože bod $(x_0; y_0)$ leží na elipse, je vyhověno rovnici (22·6), dosadíme-li $x = x_0$, $y = y_0$; proto je

$$\overline{PQ}^2 = f(x_0) = \frac{a^4}{x_0^2} + \frac{b^2}{\left(\frac{y_0}{b}\right)^2} =$$

$$= \frac{a^4}{x_0^2} + \frac{b^2}{1 - \frac{x_0^2}{a^2}} = \frac{a^4}{x_0^2} + \frac{a^2b^2}{a^2 - x_0^2}.$$

Proměnná x_0 je omezena na vnitřek intervalu $[0, a]$. Derivováním dostaneme

$$f'(x_0) = -\frac{2a^4}{x_0^3} + \frac{2a^2b^2x_0}{(a^2 - x_0^2)^2} =$$

$$= \frac{2a^2}{x_0^3(a^2 - x_0^2)^2}[b^2x_0^4 - a^2(a^2 - x_0^2)^2] =$$

$$= \frac{2a^2}{x_0^3(a^2 - x_0^2)^2}[bx_0^2 + a(a^2 - x_0^2)][bx_0^2 - a(a^2 - x_0^2)],$$

takže derivace má stejné znamení jako

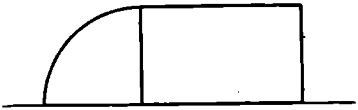
$$bx_0^2 - a(a^2 - x_0^2) = (a + b)x_0^2 - a^3.$$

Je tudíž $f'(x_0) < 0$ uvnitř intervalu $\left[0, a\sqrt{\frac{a}{a+b}}\right]$ a $f'(x_0) > 0$ uvnitř intervalu $\left[a\sqrt{\frac{a}{a+b}}, a\right]$, takže $f(x_0)$ nabude své nejmenší hodnoty pro $x_0 = a\sqrt{\frac{a}{a+b}}$. Tato nejmenší hodnota je

$$f\left(a\sqrt{\frac{a}{a+b}}\right) = \frac{a^4}{a^2 \cdot \frac{a}{a+b}} + \frac{a^2b^2}{a^2 - a^2 \cdot \frac{a}{a+b}} = (a + b)^2.$$

Ježto $\overline{PQ}^2 = f(x_0)$, je $a + b$ nejmenší možná hodnota výrazu $\overline{PQ}$. Mimo to plyne z provedené diskuse, že [za předpokladu $x_0 > 0$, $y_0 > 0$] $\overline{PQ}$ nabude své nejmenší hodnoty $a + b$ pro jedinou polohu tečny, a že $\overline{PQ}$ nabude každé hodnoty větší než $a + b$, a to při dvojí poloze tečny.

Cvičení. **22·1.** Ze všech obdélníků daného obsahu určete ten, který má nejkratší úhlopříčku.



Obr. 17.

22·2. Mezi všemi plochami složenými ze čtvrtkruhu a obdélníka, jak je naznačeno v obr. 17, a majícími obvod dané velikosti, určete takovou, jejíž obsah je největší.

22·3. Dvě cesty se křižují kolmo; auto jedoucí po jedné z nich rychlostí 60 km za hodinu projíždí křižovatkou v době, kdy druhé auto, jedoucí po druhé cestě směrem ke křižovatce rychlostí 45 km za hodinu, je od křižovatky 30 km vzdáleno. Najděte posici obou aut v tom okamžiku, kdy si jsou nejblíže.

22·4. Zvolte dvě kladná čísla se součtem 40 tak, aby součet jejich čtverců byl co nejmenší.

22·5. Najděte dvě kladná čísla tak, aby jejich rozdíl byl 100 a aby rozdíl mezi čtvercem většího a pětinásobkem čtverce menšího byl co největší.

22·6. Dokažte, že ze všech rovnoramenných trojúhelníků daného obvodu má rovnostranný trojúhelník největší obsah.

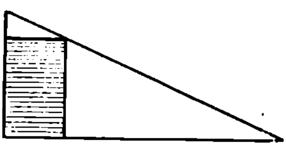
22·7. Do kružnice poloměru r je vepsán obdélník. Jakou hodnotu může míti obvod obdélníka?

22·8. Je dán obdélník M. Jaká je největší možná hodnota obsahu obdélníka, jehož strany procházejí vrcholy obdélníka M?

22·9. Do dané koule jsou vepsány rotační válce. Dokažte, že největší možný objem válce je asi 0,5773krát objem koule.

22·10. Mezi rotačními válci, jejichž celkový povrch je předepsán, najděte takový, jehož objem je největší.

22·11. Do dané koule jsou vepsány rotační válce. Jaká je největší možná velikost pláště válce?

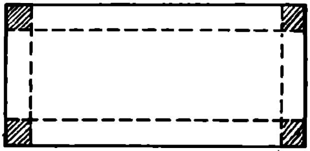


Obr. 18.

22·12. Do daného pravoúhlého trojúhelníka jsou vepsány obdélníky tak, jak je naznačeno v obr. 18. Najděte největší možný obsah obdélníka; vyšetřete také, jakých hodnot může nabýti obvod obdélníka.

22·13. Nechť C, p, P, Q mají týž význam jako v příkladě 2 (str. 56). Najděte nejmenší možnou hodnotu délky $\overline{PQ}$.

22·14. Ze všech pravoúhlých trojúhelníků daného plošného obsahu určete ten, který má nejmenší obvod.



Obr. 19.

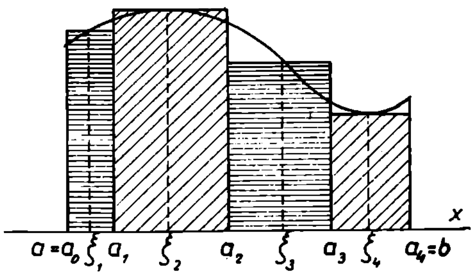
22·15. Obdélníkový kus plechu má rozměry 60 cm, 28 cm; v rozích se odříznou čtverce (viz obr. 19) a zbýtek se ohne tak, že vznikne otevřená krabice; jak velká musí býti strana odříznutých čtverců, aby objem krabice byl co největší?

22·16. Které místo mezi dvěma světelnými zdroji je nejslaběji osvětleno, je-li intensita jednoho osmkrát větší než intensita druhého?

22·17. Kus drátu délky a se má rozříznouti na dvě části, z nichž se ohne prvá do tvaru čtverce a druhá do tvaru kruhu; na kterém místě se má rozříznutí provésti, aby součet obsahu čtverce a obsahu kruhu byl co nejmenší?

23. Pojem integrálu. Poznali jsme na řadě příkladů užitečnost pojmu derivace. Nyní se obrátíme ke studiu jiného neméně důležitého pojmu z nauky o funkcích, totiž pojmu integrálu.

Budiž dána v nějakém intervalu $[a, b]$ spojitá funkce $f(x)$; předpokládejme prozatím, že všecky hodnoty funkce $f(x)$ jsou kladné. Integrálem funkce $f(x)$ od a do b rozumíme obsah plochy, omezené grafem funkce



Obr. 20.

$f(x)$, svislými přímkami $x = a$, $x = b$ a osou x; příklad takové plochy je vyznačen v obr. 20. Abychom obsah té plochy přibližně vypočetli, nahradíme si ji jinou plochou, která se od ní jen nepatrně liší, ale jejíž obsah se dá pohodlně počítati. Za tím účelem si rozdělíme interval $[a, b]$ na velký počet n malých intervalů

$$[a_0, a_1], [a_1, a_2], \ldots, [a_{n-1}, a_n], \qquad (23{\cdot}1)$$

kde

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b. \qquad (23{\cdot}2)$$

[V obr. 20 je voleno $n = 4$, tedy poměrně malá hodnota, aby byl obrazec zřetelný.] V každém z intervalů (23·1) si zvolíme určité číslo: číslo ξ_1 v intervalu $[a_0, a_1]$, číslo ξ_2

v intervalu $[a_1, a_2], \ldots,$ číslo ξ_n v intervalu $[a_{n-1}, a_n]$. [V obr. 20 je každé z těchto čísel uvnitř příslušného intervalu, ale to není nutné.] Přímkami

$$x = a_1,\ x = a_2,\ \ldots,\ x = a_{n-1}$$

se rozdělí plocha, o jejíž obsah nám běží, na úzké pruhy, a z názoru je patrné, že můžeme přibližně nahraditi každý ten pruh obdélníkem, při čemž výška prvého obdélníka je $f(\xi_1)$, výška druhého je $f(\xi_2)$ atd. Všecky tyto obdélníky dohromady tvoří plochu (vyšrafovanou v obr. 20), jejíž obsah je přibližně takový jako obsah původní plochy. Protože obsah obdélníka je součin výšky a základny, je obsah šrafované plochy roven číslu

$$\begin{aligned} S = f(\xi_1) \cdot (a_1 - a_0) + f(\xi_2) \cdot (a_2 - a_1) + \cdots + \\ + f(\xi_n) \cdot (a_n - a_{n-1}). \end{aligned} \tag{23·3}$$

Tedy je náš integrál přibližně rovný součtu (23·3), ovšem za předpokladu, že všecky diference

$$a_1 - a_0,\ a_2 - a_1,\ \ldots,\ a_n - a_{n-1} \tag{23·4}$$

jsou dosti malé. Integrál funkce $f(x)$ od a do b značíme symbolem

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x; \tag{23·5}$$

čísla a, b se jmenují **meze integrálu**; a je **dolní mez**, b je **horní mez**.

Znak (23·5) připomíná svým tvarem součet (23·3). Značka $\int$ vznikla z písmene S, tedy ze začátečního písmene slova summa (součet). Symbol $f(x)\,\mathrm{d}x$ připomíná svým tvarem jednotlivé sčítance v součtu (23·3): d je začáteční písmeno slova diference a každý sčítanec ve (23·3) je součin, jehož prvý faktor je hodnota funkce $f(x)$ v určitém čísle x, a druhý je diference mezi dvěma hodnotami nezávisle proměnné x.

Geometrická úvaha, kterou jsme právě provedli, vede k aritmetické definici integrálu, kterou si nyní hodláme vysloviti. O funkci $f(x)$ budeme předpokládati pouze, že je spojitá; předpoklad, že všecky hodnoty funkce $f(x)$ jsou kladné, byl výše učiněn pouze proto, aby měl integrál jednoduchý geometrický význam; pro aritmetickou definici je tento předpoklad zbytečný a proto jej opustíme.

Nechtějíce vyslovovati definici integrálu jediným nepřehledně dlouhým souvětím, počneme tím, že nazveme vytvořujícím součtem každý součet tvaru (23·3). Je-li dána funkce $f(x)$ a interval $[a, b]$, je těch vytvořujících součtů ještě nekonečně mnoho. Abychom dostali určitý vytvořující součet, musíme si předně zvoliti čísla $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_{n-1}$ (v libovolném konečném počtu) tak, aby platily nerovnosti (23·2), a za druhé si musíme zvolit ještě čísla $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, po jednom v každém z intervalů (23·1); je-li tato dvojí volba provedena, máme určitý vytvořující součet (23·3). Vytvořující součty jsou, jak je již z výše řečeného patrné, aproximacemi integrálu; ale ovšem není každá aproximace stejně dobrá. Na čem záleží, jest, jak dlouhé jsou intervaly (23·1), t. j. jak velké jsou diference (23·4); dobrá aproximace se dá očekávat pouze, jsou-li všecky diference (23·4) malé. Proto si nazveme normou vytvořujícího součtu (23·3) největší ze všech diferencí (23·4); je-li tedy δ kladné číslo, pak výrok, že vytvořující součet (23·3) má normu menší než δ, znamená, že všecky diference (23·4) jsou menší než δ. Po této přípravě můžeme aritmetickou definici integrálu vysloviti už velmi stručně. Integrál spojité funkce $f(x)$ od a do b, značený symbolem (23·5), je číslo, které má následující vlastnost. Je-li dáno libovolné kladné číslo ε, existuje kladné číslo δ takové, že platí nerovnost

$$\left| S - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon \tag{23·6}$$

pro všecky vytvořující součty S, jejichž norma je menší než δ.

Integrál je tedy limita, rozumíme-li obecně limitou číslo, pro které není přímo dán přesný způsob jeho výpočtu, nýbrž místo toho způsob, jak je počítati přibližně, při čemž je tento způsob tak pružný, že lze podle něho provésti počet tak, aby byla chyba menší než libovolně předepsané kladné číslo. Pod tuto obecnou definici limity spadají ovšem také limity tvaru $\lim\limits_{x \to a} F(x)$ definované v odst. 13. Mezi oněmi limitami na jedné straně a integrálem na druhé straně je velmi podstatný rozdíl; hodnota limity $\lim\limits_{x \to a} F(x)$ závisí pouze na hodnotách, kterých funkce $F(x)$ nabývá v libovolně malé předepsané blízkosti čísla $x = a$, kdežto hodnota integrálu závisí podstatně na průběhu funkce v celém intervalu $[a, b]$.

V našem dosavadním výkladu o integrálu je velmi podstatná mezera; je totiž nutné, aby se přesně dokázalo, že při libovolně dané spojité funkci $f(x)$ v intervalu $[a, b]$ opravdu existuje číslo (23·5) vyhovující podmínce naznačené nerovností (23·6). Tento důkaz bude proveden v Dodatku.

24. Jednoduché věty o integrálu. Je-li především $f(x) = c$ konstanta, jsou zřejmě všecky vytvořující součty rovné číslu $c\,(b - a)$, takže

$$\int_a^b c \,\mathrm{d}x = c\,(b - a). \tag{24·1}$$

I. Je-li $f(x)$ spojitá funkce v intervalu $[a, b]$ a je-li c konstanta, jest

$$\int_a^b c\, f(x)\,\mathrm{d}x = c \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Neboť když při určité volbě čísel

$$a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \tag{24·2}$$

jsou S a S^* vytvořující součty patřící po řadě funkci $f(x)$ a funkci $c\, f(x)$, je zřejmě $S^* = cS$.

II. Jsou-li $f_1(x)$ a $f_2(x)$ spojité funkce v intervalu $[a, b]$, jest

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Neboť když při určité volbě čísel (24·2) jsou S_1, S_2, S a S^* vytvořující součty patřící po řadě funkcím $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_1(x) + f_2(x)$, $f_1(x) - f_2(x)$, je zřejmě $S = S_1 + S_2$, $S^* = S_1 - S_2$.

Právě vyslovené věty I a II o integrálu jsou zcela obdobné větám I a II o derivaci (viz odst. 16). T. zv. integrální počet by byl mnohem jednodušší, kdyby existovala také věta o integrálu obdobná větě III o derivaci z odst. 16; ale není žádného vzorce, podle něhož by se dal počítati integrál

$$\int_a^b f_1(x)\, f_2(x)\,\mathrm{d}x,$$

známe-li hodnoty integrálů

$$\int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x,\ \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x.$$

III. Budiž $a < b < c$. Je-li $f(x)$ spojitá funkce v intervalu $[a, c]$, jest

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{24·3}$$

Protože funkce $f(x)$ je spojitá v intervalu $[a, c]$, je zřejmě také spojitá v intervalu $[a, b]$ i v intervalu $[b, c]$. Důkaz vztahu (24·3) provedeme nepřímo, t. j. učiníme předpoklad, že tento vztah je nesprávný, a ukážeme, že tento předpoklad vede k nemožnému důsledku. Neplatí-li vztah (24·3), existuje číslo $\varepsilon > 0$ takové, že

$$\left| \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x \right| > 3\varepsilon.$$

Podle definice integrálu existují kladná čísla δ_1, δ_2, δ_3 taková, že

$$\left| S_1 - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \varepsilon, \quad \left| S_2 - \int_b^c f(x)\,dx \right| < \varepsilon, \quad \left| S_3 - \int_a^c f(x)dx \right| < \varepsilon,$$

jsou-li S_1, S_2, S_3 vytvořující součty patřící po řadě intervalům $[a, b]$, $[b, c]$, $[a, c]$ s normou menší než δ_1 u prvého, menší než δ_2 u druhého a menší než δ_3 u třetího. Zvolme číslo $\delta > 0$ tak, aby bylo menší než každé z čísel $\delta_1, \delta_2, \delta_3$. Je-li S_1 vytvořující součet patřící intervalu $[a, b]$, je-li S_2 vytvořující součet patřící intervalu $[b, c]$ a jsou-li normy obou menší než δ, je zřejmě $S_1 + S_2$ vytvořující součet patřící intervalu $[a, c]$ a také jeho norma je menší než δ. Proto je

$$\left| S_1 - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \varepsilon, \quad \left| S_2 - \int_b^c f(x)\,dx \right| < \varepsilon,$$

$$\left| \int_a^c f(x)\,dx - (S_1 + S_2) \right| < \varepsilon.$$

Protože pak absolutní hodnota součtu je nejvýš rovna součtu absolutních hodnot sčítanců (viz odst. 14, XVII), jest

$$\left| \left[S_1 - \int_a^b f(x)\,dx\right] + \left[S_2 - \int_b^c f(x)\,dx\right] + \left[\int_a^c f(x)\,dx - (S_1 + S_2)\right] \right| < 3\varepsilon,$$

neboli

$$\left| \int_a^c f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx \right| < 3\varepsilon$$

a to je právě nemožné.

IV. Je-li $f(x)$ spojitá funkce v intervalu $[a, b]$ a je-li $f(x) \geqq 0$ pro každé číslo x z intervalu $[a, b]$, jest

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqq 0.$$

Neboť pro každý vytvořující součet S zřejmě platí nerovnost $S \geqq 0$.

V. Jsou-li $f_1(x), f_2(x)$ spojité funkce v intervalu $[a, b]$ a je-li $f_1(x) \leqq f_2(x)$ pro každé číslo x z intervalu $[a, b]$, jest

$$\int_a^b f_1(x)\,dx \leqq \int_a^b f_2(x)\,dx.$$

Podle IV je totiž

$$\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,\mathrm{d}x \geqq 0$$

a podle II je

$$\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,\mathrm{d}x \geqq \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x.$$

VI. Je-li $f(x)$ spojitá funkce v intervalu $[a, b]$ a jsou-li c_1, c_2 čísla taková, že

$$c_1 \leqq f(x) \leqq c_2$$

pro každé číslo x z intervalu $[a, b]$, jest

$$c_1\,(b - a) \leqq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqq c_2\,(b - a).$$

Podle V je totiž

$$\int_a^b c_1\,\mathrm{d}x \leqq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqq \int_a^b c_2\,\mathrm{d}x$$

a podle (24·1) je

$$\int_a^b c\mathrm{d}x = c\,(b - a), \quad \int_a^b d\,.\,\mathrm{d}x = d\,(b - a).$$

VII. Je-li $f(x)$ spojitá funkce v intervalu $[a, b]$ a je-li $f(x) \geqq 0$ pro každé číslo x z intervalu $[a, b]$, není-li však identicky $f(x) = 0$ v celém intervalu $[a, b]$ pak jest

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0. \tag{24·4}$$

Kdyby bylo $f(x) = 0$ všude uvnitř intervalu $[a, b]$, pak by ze spojitosti funkce $f(x)$ plynulo $f(a) = 0$, $f(b) = 0$. Proto si můžeme zvoliti číslo c tak, že $a < c < b$, $f(x) > 0$. Dále si zvolme číslo $\varepsilon > 0$ tak, že $f(c) > 2\varepsilon$. Protože funkce $f(x)$ je spojitá pro $x = c$, existuje číslo $\delta > 0$ takové, že

$$|\,x - c\,| < \delta \Rightarrow |\,f(x) - f(c)\,| < \varepsilon. \tag{24·5}$$

Interval $[a, b]$ si můžeme rozděliti na tři intervaly

$$[a, c_1],\ [c_1, c_2],\ [c_2, b]$$

tak, že číslo c je uvnitř intervalu $[c_1, c_2]$ a že je tento interval tak malý, že $|x - c| < \delta$ pro každé x z intervalu $[c_1, c_2]$. Podle III je

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^b f(x)\,dx,$$

$$\int_{c_1}^b f(x)\,dx = \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \int_{c_2}^b f(x)\,dx.$$

Podle IV je však

$$\int_a^{c_1} f(x)\,dx \geqq 0, \quad \int_{c_2}^b f(x)\,dx \geqq 0,$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqq \int_{c_1}^b f(x)\,dx \geqq \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx. \tag{24·6}$$

Je-li x v intervalu $[c_1, c_2]$, je $|x - c| < \delta$, takže podle (24·5) je $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$, tedy $f(c) - f(x) < \varepsilon$, takže $f(c) < f(x) + \varepsilon$; avšak číslo ε bylo voleno tak, že $2\varepsilon < f(c)$; proto je $2\varepsilon < f(x) + \varepsilon$, tedy $\varepsilon < f(x)$ pro každé x z intervalu $[c_1, c_2]$. Proto soudíme ze VI, že

$$\int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx \geqq \varepsilon\,(c_2 - c_1) > 0. \tag{24·7}$$

Ze (24·6) a (24·7) následuje (24·4).

Věta VII je zlepšení věty IV; podobně bychom mohli nyní zlepšiti také věty V a VI.

V integrálu

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{24·8}$$

jsme dosud stále předpokládali $a < b$. Je účelné dáti symbolu (24·8) také význam, když $a > b$ nebo $a = b$. To učiníme předpisem

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx \tag{24·9}$$

neboli slovy: vyměníme-li meze, změní integrál znamení. Když do (24·9) dosadíme $a = b$, vidíme, že musí býti

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \tag{24·10}$$

neboli slovy: integrál od a do a je roven nule.

VIII. Budiž $f(x)$ spojitá funkce v intervalu J. Jsou-li a, b, c tři libovolná čísla z intervalu J, jest

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx = 0, \tag{24·11}$$

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx. \tag{24·12}$$

Podle (24·9) plyne ze vzorců (24·11) a (24·12) jeden z druhého, takže stačí, dokážeme-li jeden z nich. Podle (24·9) a (24·10) je vzorec (24·11) jistě správný, je-li $a = b$ nebo $a = c$ nebo $b = c$. Předpokládejme tedy, že a, b, c jsou tři různá čísla z intervalu J. Čísla a, b, c můžeme psáti v šesti různých pořádcích

$$abc,\ acb,\ bac,\ bca,\ cab,\ cba.$$

Snadno se přesvědčíme, že změna pořádku nemá na vzorec (24·11) jiného vlivu, než že se buďto pouze sčítanci mezi sebou zamění nebo že se vedle této záměny ještě u každého sčítance změní znamení. Proto stačí provésti důkaz za předpokladu $a < b < c$. Ale za tohoto předpokladu je vzorec (24·12) správný podle III.

Poznámka. Ze (24·9) a (24·10) plyne, že vzorec (24·1) zůstane v platnosti, i když $a > b$ nebo $a = b$. Totéž platí o vzorcích z vět I a II.

25. Souvislost mezi derivací a integrálem. Nyní si dokážeme, že integrování není nic jiného než obrácený výkon k derivování. Budiž $f(x)$ spojitá funkce uvnitř intervalu J. Zvolme si určité číslo a z intervalu J. Proměnná t nechť nabývá všech hodnot z vnitřku intervalu J. Pak si můžeme zavésti novou funkci $F(t)$ vzorcem

$$F(t) = \int_a^t f(x)\,dx. \tag{25·1}$$

O této funkci si nyní dokážeme, že má uvnitř intervalu J všude derivaci, která se počítá podle vzorce

$$F'(t) = f(t). \tag{25·2}$$

Za tím účelem si zvolme uvnitř intervalu J libovolné číslo b. Máme dokázati, že

$$\lim_{t \to b} \frac{F(t) - F(b)}{t - b} = f(b).$$

Zvolme číslo $\varepsilon > 0$. Máme dokázati, že existuje číslo $\delta > 0$ takové, že

$$0 < |t - b| < \delta \Rightarrow \left| \frac{F(t) - F(b)}{t - b} - f(b) \right| < \varepsilon. \tag{25·3}$$

Zvolme kladné číslo $\varepsilon_1 < \varepsilon$. Ježto funkce $f(x)$ je spojitá pro $x = b$, existuje číslo $\delta > 0$ takové, že

$$|x - b| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(b)| < \varepsilon_1. \tag{25·4}$$

Toto číslo δ má už vlastnost (25·3). Neboť nechť $0 < |t - b| < < \delta$. Ježto

$$F(t) = \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x, \quad F(b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

podle VIII v odst. 24 je

$$F(t) - F(b) = \int_b^t f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Podle (24·1) (viz též poznámku na konci odst. 24) je však

$$f(b)\,(t - b) = \int_b^t f(b)\,\mathrm{d}x$$

Podle II v odst. 24 (viz zase touž poznámku) je tedy

$$\frac{F(t) - F(b)}{t - b} - f(b) = \frac{1}{t - b} \int_b^t [f(x) - f(b)]\,\mathrm{d}x. \tag{25·5}$$

Je-li nyní předně $t > b$, pak je $b \leqq x \leqq t < b + \delta$ pro všecka x z intervalu $[b, t]$, takže podle (25·4) je

$$-\varepsilon_1 < f(x) - f(b) < \varepsilon_1 \tag{25·6}$$

pro všecka tato x. Tedy podle VI z odst. 24 je

$$-\varepsilon_1 \leqq \int_b^t [f(x) - f(b)]\,\mathrm{d}x \leqq \varepsilon_1. \tag{25·7}$$

Je-li za druhé $t < b$, je $b \geqq x \geqq t > b - \delta$ pro všecka x z intervalu $[t, b]$, takže podle (25·4) platí (25·6) pro všecka tato x. Tedy podle VI z odst. 24 je

$$-\varepsilon_1 \leqq \int_t^b [f(x) - f(b)]\,\mathrm{d}x \leqq \varepsilon_1.$$

Protože však

$$\int_t^b [f(x) - f(b)]\,\mathrm{d}x = -\int_b^t [f(x) - f(b)]\,\mathrm{d}x,$$

dostáváme zase (25·7). Z (25·5) a (25·7) však plyne (25·3), neboť $\varepsilon_1 < \varepsilon$.

Výsledek, k němuž jsme došli, si vyslovíme v takovém tvaru, v jakém se ho často užívá k výpočtu integrálů. Nechť zase $f(x)$ je spojitá funkce uvnitř intervalu J. Podaří-li se nám jakýmkoli způsobem najíti funkci $\varphi(x)$ takovou, že

$$\varphi'(x) = f(x) \tag{25·8}$$

pro všecka x z intervalu J, pak jest

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(b) - \varphi(a). \tag{25·9}$$

Neboť podle předcházejícího

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b).$$

Obě funkce $\varphi(x)$ a $F(x)$ mají uvnitř intervalu J všude stejnou derivaci, takže jejich diference $\varphi(x) - F(x)$ má uvnitř intervalu J derivaci identicky rovnou nule. Z odst. 21 víme, že funkce $\varphi(x) - F(x)$ musí býti uvnitř intervalu J konstantou, takže

$$\varphi(b) - F(b) = \varphi(a) - F(a).$$

Avšak

$$F(a) = \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

takže $\varphi(b) - F(b) = \varphi(a)$, tedy

$$\varphi(b) - \varphi(a) = F(b) = \int_a^b f(x)\,dx,$$

což jsme měli dokázati.

Abychom mohli počítati integrál podle pravidla (25·9), potřebovali bychom znáti cesty, jimiž se k dané funkci $f(x)$ dá najíti funkce $\varphi(x)$ vyhovující podmínce (25·8). Existují rozmanité takové cesty, ale rozsah této knížky nedovoluje, abychom se s nimi seznámili. Mimo to všecky tyto cesty v mnoha případech nevedou k cíli, protože i když funkce $f(x)$ je jedna z těch jednoduchých funkcí, které známe, může funkce $\varphi(x)$ býti složitějšího typu. Proto se omezíme na jediný příklad. Budiž s dané racionální číslo a mějme počítati integrál

$$\int_a^b x^s\,dx,$$

kde a, b jsou kladná čísla. Tu si vzpomeneme na vzorec (19·17)

$$(x^r)' = rx^{r-1}$$

platný pro kladná x (při racionálním r), který lze pro $r \neq 0$ psáti ve tvaru

$$\left(\frac{1}{r}\, x^r\right)' = x^{r-1}.$$

Je-li $s \neq -1$, můžeme položiti $r = s + 1 \neq 0$ a dostaneme

$$\left(\frac{1}{s+1}\, x^{s+1}\right)' = x^s,$$

takže

$$\int_a^b x^s\,dx = \frac{b^{s+1} - a^{s+1}}{s+1}. \tag{25·10}$$

Pro $s \neq -1$ je tím žádaný výpočet integrálu proveden. Pro $s = -1$ tato metoda selže. [Nehledě na to, že při odvození vzorce (25·10) jsme musili předpokládati $s \neq -1$, nemá pravá strana pro $s = -1$ vůbec významu.] Uvidíme v odst. 28, proč naše metoda musila selhat pro $s = -1$; neboť pro $s = -1$ máme integrál

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x},$$

který vede na funkci, kterou jsme se v této knížce dosud nezabývali, ač je vám ze střední školy známa, totiž na funkci logaritmickou. Rovněž na funkci logaritmickou dá se převésti na př. integrál

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}},$$

kdežto na př. integrály

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+1}}, \quad \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^4+1}}$$

(t. zv. eliptické integrály) se už nedají převésti na funkce, které jsou v souvislosti se středoškolskou matematikou. Proto je důležité, že můžeme numerickou hodnotu každého integrálu počítati přibližně. Takové přibližné vyjádření integrálu máme už ve vytvořujících součtech, pomocí kterých jsme integrál definovali. Jsou však pohodlnější přibližná vyjádření integrálu, a o jednom z nich si krátce promluvíme v následujícím odstavci.

26. Simpsonovo pravidlo. Budiž $f(x)$ spojitá funkce v intervalu $[a, b]$. Rozdělme si $[a, b]$ na intervaly

$$[a_0, a_1], [a_1, a_2], \ldots, [a_{n-1}, a_n]. \tag{26·1}$$

Z odst. 24 víme, že

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a_0}^{a_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a_1}^{a_2} f(x)\,\mathrm{d}x + \ldots + \int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{26·2}$$

Jako v odst. 23 si zvolme čísla $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, po jednom v každém z intervalů (26·1). Jsou-li ty intervaly dosti malé, jsou hodnoty funkce $f(x)$ v prvém z nich přibližně rovné číslu $f(\xi_1)$, ve druhém přibližně rovné číslu $f(\xi_2)$ atd. Proto je náš integrál přibližně rovný součtu

$$\int_{a_0}^{a_1} f(\xi_1)\,\mathrm{d}x + \int_{a_1}^{a_2} f(\xi_2)\,\mathrm{d}x + \dots + \int_{a_{n-1}}^{a_n} f(\xi_n)\,\mathrm{d}x.$$

Ale tento součet je podle (24·1) rovný součtu

$$f(\xi_1)(a_1 - a_0) + f(\xi_2)(a_2 - a_1) + \dots + f(\xi_n)(a_n - a_{n-1}),$$

t. j. jednomu z našich vytvořujících součtů. Můžeme tedy říci, že vytvořující součet dostaneme z integrálu (26·2), když v každém z intervalů (26·1) aproximujeme funkci $f(x)$ konstantou. Lepšího přiblížení dosáhneme, aproximujeme-li funkci $f(x)$ jinak. Nechť $[\alpha, \beta]$ znamená jeden z intervalů (26·1) a nechť

$$\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

leží právě uprostřed tohoto intervalu. Budeme aproximovati funkci $f(x)$ v intervalu mnohočlenem druhého stupně

$$\varphi(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2,$$

jehož koeficienty budeme voliti tak, aby obě funkce nabývaly téže hodnoty pro $x = \alpha, \beta, \gamma$. Abychom mnohočlen $\varphi(x)$ pohodlně určili, pišme jej ve tvaru

$$\varphi(x) = A_0 + A_1(x - \alpha) + A_2(x - \alpha)(x - \gamma). \tag{26·3}$$

Máme určiti čísla A_0, A_1, A_2 podle podmínek

$$\varphi(\alpha) = f(\alpha),\ \varphi(\gamma) = f(\gamma),\ \varphi(\beta) = f(\beta).$$

Dosadíme-li do (26·3) $x = \alpha, \gamma, \beta$, vyjde

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= A_0, \\ f(\gamma) &= A_0 + A_1(\gamma - \alpha) = A_0 + \tfrac{1}{2}A_1(\beta - \alpha), \\ f(\beta) &= A_0 + A_1(\beta - \alpha) + A_2(\beta - \alpha)(\beta - \gamma) = \\ &= A_0 + A_1(\beta - \alpha) + \tfrac{1}{2}A_2(\beta - \alpha)^2, \end{aligned}$$

takže

$$A_0 = f(\alpha), \quad A_1 = 2\,\frac{f(\gamma) - f(\alpha)}{\beta - \alpha},$$
$$A_2 = 2\,\frac{f(\alpha) - 2f(\gamma) + f(\beta)}{(\beta - \alpha)^2}. \tag{26·4}$$

Protože

$$(x - \alpha)(x - \gamma) = (x - \alpha)\left(x - \alpha - \frac{\beta - \alpha}{2}\right) =$$
$$= (x - \alpha)^2 - \tfrac{1}{2}(\beta - \alpha)(x - \alpha),$$

jest

$$[\tfrac{1}{3}(x - \alpha)^3 - \tfrac{1}{4}(\beta - \alpha)(x - \alpha)^2]' = (x - \alpha)(x - \gamma),$$

takže podle odst. 25 je

$$\int_\alpha^\beta (x - \alpha)(x - \gamma)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}(\beta - \alpha)^3 - \tfrac{1}{4}(\beta - \alpha)^3 = \tfrac{1}{12}(\beta - \alpha)^3. \tag{26·5}$$

Dále je

$$[\tfrac{1}{2}(x - \alpha)^2]' = (x - \alpha),$$

takže podle odst. 25 je

$$\int_\alpha^\beta (x - \alpha)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}(\beta - \alpha)^2. \tag{26·6}$$

Ze (26·3), (26·5) a (26·6) plyne podle (24·1) a I, II v odst. 24

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,\mathrm{d}x = A_0(\beta - \alpha) + \tfrac{1}{2}A_1(\beta - \alpha)^2 + \tfrac{1}{12}A_2(\beta - \alpha)^3,$$

takže podle (26·4)

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\beta - \alpha}{6}\,[f(\alpha) + 4f(\beta) + f(\gamma)]. \tag{26·7}$$

Vraťme se ke vzorci (26·2)! Hledanou přibližnou hodnotu integrálu nalevo dostaneme, když v každém integrálu napravo nahradíme $f(x)$ vhodným mnohočlenem druhého stupně, t. j. když každý integrál napravo nahradíme integrálem (26·7), v němž ovšem místo intervalu $[\alpha, \beta]$ bereme postupně intervaly (26·1). Omezme se na ten případ, kdy intervaly (26·1) mají vesměs stejnou délku $\frac{b-a}{n}$. Pak vyjde po snadné úpravě pro náš integrál přibližná hodnota

$$S_n = \frac{b-a}{6n}\left[f(a) + 4f\left(a + \frac{b-a}{2n}\right) + 2f\left(a + \frac{b-a}{n}\right) + \right.$$
$$\left. + \ldots + 4f\left(a + \frac{(2n-1)(b-a)}{2n}\right) + f(b)\right].$$

Při tom se v lomené závorce vyskytují postupně hodnoty funkce $f(x)$ v číslech

$$a, a + \frac{b-a}{2n}, a + \frac{b-a}{n}, \ldots,$$
$$a + \frac{(2n-1)(b-a)}{2n} = b - \frac{b-a}{2n}, b,$$

jež tvoří aritmetickou řadu s prvním členem a, posledním členem b a konstantní diferencí $\frac{b-a}{2n}$. Koeficienty hodnot funkce $f(x)$ v lomené závorce jsou tyto: první a poslední koeficient je rovný jedné, ostatní jsou střídavě rovny číslům 4 a 2. Na př. pro $a = 0$, $b = 1$ jest

$$S_{10} = \tfrac{1}{60}\,[f(0) + 4f(\tfrac{1}{20}) + 2f(\tfrac{1}{10}) + 4f(\tfrac{3}{20}) + 2f(\tfrac{2}{10}) +$$
$$+ 4f(\tfrac{5}{20}) + 2f(\tfrac{3}{10}) + 4f(\tfrac{7}{20}) + 2f(\tfrac{4}{10}) + 4f(\tfrac{9}{20}) + 2f(\tfrac{5}{10}) +$$
$$+ 4f(\tfrac{11}{20}) + 2f(\tfrac{6}{10}) + 4f(\tfrac{13}{20}) + 2f(\tfrac{7}{10}) + 4f(\tfrac{15}{20}) + 2f(\tfrac{8}{10}) +$$
$$+ 4f(\tfrac{17}{20}) + 2f(\tfrac{9}{10}) + 4f(\tfrac{19}{20}) + f(1)].$$

Pravidlo pro přibližný výpočet integrálu, s kterým jsme se právě seznámili, jmenuje se Simpsonovo pravidlo. V této knížce se nebudeme zabývat odhadem chyby, které se dopustíme, nahradíme-li integrál jeho přibližnou hodnotou vypočtenou podle Simpsonova pravidla. Ale abychom si prokázali užitečnost Simpsonova pravidla aspoň na jednom příkladě, vypočteme si podle něho integrál

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}. \tag{26·8}$$

Uvidíme později [viz (32·4)], že čtyrnásobek integrálu (26·8) je roven číslu π. Volíme-li v Simpsonovu pravidlu $n = 5$ a zaokrouhlíme-li každou hodnotu funkce na osm desetinných míst, dostaneme pro číslo π přibližnou hodnotu 3,14159260, v které teprve poslední cifra je nesprávná. Bude velmi užitečné, když si čtenář tento výpočet sám podrobně provede.

27. Integrál v geometrii. Pojem integrálu je velmi důležitý v geometrii i ve fysice. Kdykoli je dána veličina, která se dá přibližně nahradit součtem velikého počtu malých sčítanců, dá se přesná hodnota té veličiny psáti ve tvaru integrálu, ale mnohdy při tom nevystačíme s pojmem integrálu funkce jedné proměnné, na který jsme se v této knížce musili omezit. V tomto odstavci si probereme čtyři příklady na užití integrálu v geometrii. Fysikálními aplikacemi se v této knížce zabývat nebudeme.

I. Mějme v intervalu $[a, b]$ dvě spojité funkce $f_1(x)$, $f_2(x)$ a předpokládejme, že je v celém intervalu splněna nerovnost

$$f_1(x) < f_2(x). \tag{27·1}$$

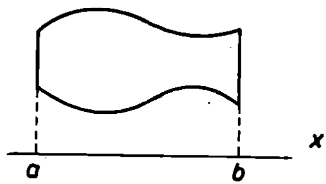
Grafy našich dvou funkcí spolu s přímkami $x = a$, $x = b$ omezí plochu P. [Viz obr. 21.] Plošný obsah plochy P je dán integrálem

$$\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,\mathrm{d}x. \tag{27·2}$$

Jsou-li všecky hodnoty funkce $f_1(x)$ [a tím spíš funkce $f_2(x)$] čísla kladná, je to zřejmé. Neboť z obrazce je patrné, že plocha P je rozdíl dvou ploch, jejichž obsahy jsou podle odst. 23

$$\int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x \tag{27·3}$$

a z odst. 24 víme, že integrál (27·2) je roven rozdílu obou integrálů (27·3). Nejsou-li všecky hodnoty funkce $f_1(x)$ kladné, zvolíme si tak velké kladné číslo c, aby bylo $f_1(x) + c > 0$ pro všecka x z intervalu $[a, b]$. Potom pošineme počátek i osu x svisle dolů o délku rovnou c. Jsou-li x^*, y^* souřadnice v nové soustavě, je podle odst. 4



Obr. 21.

$$x^* = x, \quad y^* = y + c.$$

Užijeme-li při výpočtu obsahu plochy P nové soustavy souřadnic, což je ovšem dovoleno, musíme funkce $f_1(x)$, $f_2(x)$ nahraditi funkcemi $f_1(x) + c$, $f_2(x) + c$. Tyto funkce nabývají jen kladných hodnot, takže obsah plochy P se rovná integrálu (27·2), neboť

$$[f_2(x) + c] - [f_1(x) + c] = f_2(x) - f_1(x).$$

Je-li nerovnost (27·1) splněna pouze uvnitř intervalu $[a, b]$, kdežto $f_1(a) = f_2(a)$, $f_1(b) = f_2(b)$, pak z hranice plochy P odpadnou obě svislé úsečky, ale jinak se nic nezmění a vzorec (27·2) zůstane správný. Týž vzorec platí také, je-li nerovnost (27·1) porušena v jediném z obou čísel a, b.

II. Mějme v intervalu $[a, b]$ spojitou funkci $f(x)$, která nabývá jen kladných hodnot. Graf funkce $f(x)$, svislé přímky $x = a$, $x = b$ a osa x omezí plochu P. [Viz obr. 20 na str. 62.] Tuto plochu otáčejme kolem osy x. Souhrn všech poloh otáčené plochy je rotační těleso T. Ukážeme si, že objem tělesa T se dá vyjádřiti integrálem (27·5).

Jako v odst. 23 si rozdělme interval $[a, b]$ na velký počet malých intervalů

$$[a_0, a_1], [a_1, a_2], \ldots, [a_{n-1}, a_n]$$

a zvolme si čísla $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, po jednom v každém z těch intervalů. Této volbě odpovídá, jak víme z odst. 23, plocha P_0 složená z n obdélníků a vyčárkovaná v obr. 20. Otáčíme-li plochu P_0 kolem osy x, vznikne rotační těleso T_0 a z názoru je patrné, že tělesa T_0 a T mají přibližně stejný objem. Těleso T_0 se skládá z n rotačních válců, vzniklých otočením jednotlivých obdélníků. Jak známo, je objem rotačního válce roven číslu $\pi r^2 v$, kde r znamená poloměr podstavy a v výšku. Proto objem tělesa T_0 je roven číslu

$$\pi \,.\, \{[f(\xi_1)]^2 (a_1 - a_0) + [f(\xi_2)]^2 (a_2 - a_1) + \\ + \ldots + [f(\xi_n)]^2 (a_n - a_{n-1})\}. \tag{27·4}$$

Tedy výraz (27·4) udává přibližnou hodnotu objemu tělesa T. Z toho plyne, že přesná hodnota objemu našeho rotačního tělesa T je rovna

$$\pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx. \tag{27·5}$$

III. Budiž $f(x)$ spojitá funkce v intervalu $[a, b]$. Tentokrát nám na tom nezáleží, zda jsou všecky hodnoty funkce $f(x)$ čísla kladná. Zato předpokládejme, že $f(x)$ má derivaci v každém čísle z intervalu $[a, b]$ a že také $f'(x)$ je spojitá funkce v intervalu $[a, b]$. Označme C část grafu funkce $f(x)$ ležící mezi body

$$A = (a; f(a)), \quad B = (b; f(b)).$$

Ukážeme, že délka čáry C se dá vyjádřiti integrálem (27·10).

Jako obvykle rozdělíme si interval $[a, b]$ na velký počet malých intervalů

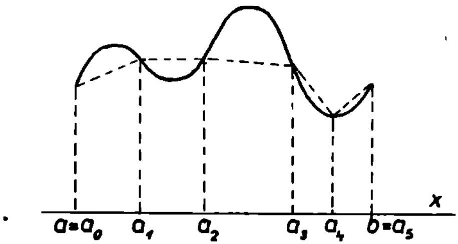
$$[a_0, a_1], [a_1, a_2], \ldots, [a_{n-1}, a_n], \tag{27·6}$$

vytkneme si na grafu body odpovídající hodnotám $a_0, a_1, \ldots, a_n$ a spojíme tyto body úsečkami. Tak vznikne lomená čára C_0, vyčárkovaná v obr. 22. Z názoru je patrné, že délka čáry C je přibližně rovna délce lomené čáry C_0. Délka čáry C_0 je však rovna součtu délek jednotlivých úseček, z kterých se skládá, a délka úsečky je vzdálenost jejích krajních bodů, která se počítá podle vzorce (4·2). Proto je délka lomené čáry C_0 rovna výrazu

$$\sqrt{(a_1 - a_0)^2 + [f(a_1) - f(a_0)]^2} + \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + [f(a_2) - f(a_1)]^2} + \\ + \dots + \sqrt{(a_n - a_{n-1})^2 + [f(a_n) - f(a_{n-1})]^2}. \quad (27\cdot7)$$

Výraz (27·7) si musíme ještě upraviti; užijeme k tomu věty vyslovené na začátku odst. 21. Podle této věty lze udati čísla $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, po jednom v každém z intervalů (27·6), taková, že

$$f(a_1) - f(a_0) = f'(\xi_1)(a_1 - a_0),\ f(a_2) - f(a_1) = f'(\xi_2)(a_2 - a_1) \text{ atd.} \quad (27\cdot8)$$



Obr. 22.

Podle toho je výraz (27·7) roven výrazu

$$\sqrt{1 + [f'(\xi_1)]^2}\,(a_1 - a_0) + \sqrt{1 + [f'(\xi_2)]^2}\,(a_2 - a_1) + \\ + \dots + \sqrt{1 + [f'(\xi_n)]^2}\,(a_n - a_{n-1}). \quad (27\cdot9)$$

Tedy (27·9) je přibližná hodnota délky čáry C, z čehož plyne, že přesná hodnota délky čáry C je rovna

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx. \quad (27\cdot10)$$

IV. Učiňme o funkci $f(x)$ stejné předpoklady jako ve III a mimo to předpokládejme, že $f(x)$ nabývá jen kladných hodnot. Otáčejme čáru C kolem osy x. Tím vznikne rotační plocha R. Ukážeme, že povrch plochy R je roven integrálu (27·12).

Rozdělme si zase $[a, b]$ na malé intervaly (27·6) a opět si všimněme lomené čáry C_0, vyčárkované v obr. 22. Otáčením kolem osy x vznikne z čáry C_0 rotační plocha R_0. Z názoru je patrné, že povrch plochy R je přibližně rovný povrchu plochy R_0.

Plocha R_0 se skládá z n jednoduchých ploch, z nichž každá vznikne rotací jedné úsečky; ty jednoduché plochy tedy jsou pláště komolých rotačních kuželů. Pro povrch pláště komolého rotačního kužele se však na střední škole odvozuje vzorec $\pi(r_1 + r_2)s$, kde r_1 a r_2 jsou poloměry podstav a s je společná délka úseček, které lze vésti na plášti od jedné podstavy k druhé. Proto je povrch plochy R_0 roven výrazu

$$\pi\{[f(a_0) + f(a_1)]\sqrt{(a_1 - a_0)^2 + [f(a_1) - f(a_0)]^2} + \dots$$
$$\dots + [f(a_{n-1}) + f(a_n)]\sqrt{(a_n - a_{n-1})^2 + [f(a_n) - f(a_{n-1})]^2}\}.$$

Zvolíme-li si zase vhodně čísla $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, po jednom uvnitř každého z intervalů (27·6), budou platiti vztahy (27·8), takže povrch plochy R_0 lze psáti ve tvaru

$$\pi\{[f(a_0) + f(a_1)]\sqrt{1 + [f'(\xi_1)]^2}\,(a_1 - a_0) + \dots$$
$$\dots + [f(a_{n-1}) + f(a_n)]\sqrt{1 + [f'(\xi_n)]^2}\,(a_n - a_{n-1})\}.$$

Protože jsou intervaly (27·6) malé a protože funkce $f(x)$ je spojitá, liší se jen nepatrně

$$f(a_0) + f(a_1) \text{ od } 2f(\xi_1), \dots, f(a_{n-1}) + f(a_n) \text{ od } 2f(\xi_n),$$

takže se povrch plochy R_0 liší jen nepatrně od čísla

$$2\pi\{f(\xi_1)\sqrt{1 + [f'(\xi_1)]^2}\,(a_1 - a_0) + \dots$$
$$\dots + f(\xi_n)\sqrt{1 + [f'(\xi_n)]^2}\,(a_n - a_{n-1})\}. \qquad (27\cdot 11)$$

Tedy (27·11) je přibližná hodnota povrchu plochy R, takže přesná hodnota povrchu plochy R je rovna

$$2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x. \qquad (27\cdot 12)$$

Náš postup v tomto odstavci nebyl právě přesný. Promyslíme-li si jej znovu, nahlédneme snadno, že hlavní potíž tkví v tom, že jsme počítali geometrické veličiny, pro které jsme sice měli názorné představy, nikoli však přesné aritmetické definice. Takové přesné definice lze skutečně udat, a potom je už lehké dáti hořejším důkazům přesný tvar. Tím se zde zabývati nebudeme. Budiž pouze podotčeno, že přesná definice povrchu křivé plochy je mnohem složitější než přesné definice ostatních geometrických veličin, s kterými jsme se zde setkali.

Cvičení.*) Ve cvičeních **27·1** až **27·7** máte určiti napřed obsah plochy omezené čarami, jejichž rovnice jsou udány, a potom počítati objem tělesa, které vznikne rotací té plochy kolem osy x. Tvar plochy si pokaždé napřed naznačte obrazcem.

27·1. $y = x^3$, $y = 0$, $x = 3$.
27·2. $y^2 = 12x$, $x = 12$.
27·3. $4y = (x + 1)^3$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$.
27·4. $4y^2 = 3x^3$, $x = 1$.
27·5. $y = 9x - x^2 - 14$, $y = 0$.
27·6. $9y = x^2 (x + 3)$, $y = 0$.
27·7. $x^2 y = 36$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 6$.

Ve cvičeních **27·8** až **27·10** máte určiti obsah plochy omezené čarami, jejichž rovnice jsou udány.

27·8. $y = x^2$, $y = 4x$.
27·9. $y = x^2$, $x = y^2$.
27·10. $y^2 = x$, $y^2 = x^3$.

Ve cvičeních **27·11** až **27·13** máte počítati napřed délku dané čáry, potom povrch plochy, která vznikne rotací té čáry kolem osy x.

27·11. $x^4 + 3 = 6xy$ od bodu $x = 1$ do bodu $x = 4$.
27·12. $8x^2 y = 2 + x^6$ od bodu $x = 1$ do bodu $x = 2$.
27·13. $9y^2 = x(x - 3)^2$, $y \geqq 0$ od bodu $x = 0$ do bodu $x = 3$.

28. Logaritmická funkce. K tomuto odstavci není třeba žádných znalostí o logaritmech ze střední školy, neboť vše, co budeme potřebovat, si odvodíme. Protože funkce $\frac{1}{x}$ je spojitá pro všecka kladná x, můžeme si pro všecka kladná t definovati pomocí integrálu

$$\int_1^t \frac{dx}{x}$$

funkci, kterou nazveme funkcí logaritmickou a označíme $\log t$. Je tedy

*) Cvičení jsou volena tak, že při výpočtu integrálů se vystačí se vzorcem (25·10).

$$\log t = \int_1^t \frac{dx}{x} \tag{28·1}$$

pro každé kladné t. Podle odst. 25 má tato funkce derivaci

$$(\log t)' = \frac{1}{t}. \tag{28·2}$$

pro všecka $t > 0$. Ježto tato derivace je stále kladná, je logaritmus rostoucí funkce všude, kde je definována. Podle (28·1) jest

$$\log 1 = 0, \tag{28·3}$$

takže*)

$$t > 1 \Rightarrow \log t > 0,\ 0 < t < 1 \Rightarrow \log t < 0. \tag{28·4}$$

Základní vlastnost logaritmické funkce jest

$$a > 0,\ b > 0 \Rightarrow \log(ab) = \log a + \log b \tag{28·5}$$

neboli slovy: Logaritmus součinu (dvou kladných čísel) se rovná součtu logaritmů obou činitelů. Odvodíme si ji takto. Ze (28·2) plyne podle pravidla o derivování složené funkce (viz odst. 17)

$$[\log(at)]' = \frac{1}{t},$$

takže funkce

$$\log(at) - \log t$$

má derivaci identicky rovnou nule a je to tedy konstanta (viz odst. 21). Hodnotu této konstanty dostaneme dosazením $t = 1$; podle (28·3) vyjde $\log a$, takže

$$\log(at) - \log t = \log a$$

pro všecka $t > 0$. Dosazením $t = b$ vyjde (28·5).

Když ve (28·5) volíme $b = \frac{1}{a}$, vyjde podle (28·3)

*) Význam značky $\Rightarrow$ byl vysvětlen u vzorce (13·3).

$$\log \frac{1}{a} = -\log a \tag{28·6}$$

pro všecka $a > 0$.

Podle (28·5) dostaneme postupně

$$\log (a^2) = \log (a \,.\, a) = 2 \log a,$$
$$\log (a^3) = \log (a^2 \,.\, a) = 3 \log a \text{ atd.},$$

obecně

$$\log (a^n) = n \log a \tag{28·7}$$

pro každé celé kladné n. Protože

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n},$$

plyne ze (28·6), že (28·7) platí i pro celá záporná n. Podle (28·3) platí (28·7) také pro $n = 0$. Tedy (28·7) platí pro každé celé n, libovolného znamení.

Protože logaritmická funkce má všude derivaci, je spojitá. Proto hodnoty, kterých nabude, tvoří interval (viz odst. 19). Protože ve (28·7) můžeme dáti celému číslu n libovolně velké kladné i záporné hodnoty, nabývá logaritmická funkce libovolně velkých kladných i záporných hodnot. Jelikož pak ty hodnoty tvoří interval, může to být pouze interval $[-\infty, \infty]$, t. j. logaritmická funkce nabude každé možné hodnoty. Protože je to funkce rostoucí, nabude každé hodnoty pouze jednou. Zejména existuje jediné kladné číslo, v kterém nabude logaritmická funkce hodnoty 1. Toto číslo se značí písmenem e. Je tedy

$$\log e = 1. \tag{28·8}$$

Dá se vypočísti, že

$$e \doteq 2{,}718281828459\ldots;$$

ale tímto výpočtem se zde zabývati nebudeme.

Logaritmy zde definované se nazývají **logaritmy přirozené**. Naproti tomu logaritmy, o kterých jste se učili na střední škole, se jmenují **logaritmy dekadické**. Souvislost mezi oběma druhy logaritmů je velmi jednoduchá; označíme-li dekadické logaritmy na rozdíl od přirozených symbolem Log, platí identita

$$\operatorname{Log} t = \frac{\log t}{\log 10}, \qquad (28{\cdot}9)$$

$la = \frac{\log a}{\log e}$

takže, jak známo,

$$\operatorname{Log} 10 = 1.$$

29. Geometrické řady. Jelikož logaritmy jsou integrály, můžeme je počítati numericky podle Simpsonova pravidla. Pohodlnější metodu poznáme v následujícím odstavci. Napřed si však zopakujeme něco z toho, čemu jste se na střední škole učili o t. zv. geometrických řadách.

Budiž q číslo různé od 1, ale jinak libovolné. Pro každé celé kladné n označme S_n součet

$$S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}. \qquad (29{\cdot}1)$$

Pak platí známý vzorec

$$S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q}. \qquad (29{\cdot}2)$$

Můžeme si jej ostatně zde znovu odvoditi, protože je to velmi krátké. Z (29·1) plyne

$$qS_n = q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + q^n. \qquad (29{\cdot}3)$$

Odečteme-li (29·3) od (29·1), pak se na pravé straně většina členů zruší a vyjde $(1 - q)\, S_n = 1 - q^n$, z čehož plyne (29·2).

Nyní předpokládejme o čísle q, že jeho absolutní hodnota je menší než 1. Potom se s rostoucím n blíží číslo q^n nule, což píšeme

$$\lim_{n \to \infty} q^n = 0. \qquad (29{\cdot}4)$$

Vztah (29·4) lze přesně popsati takto: Je-li dáno číslo $\varepsilon > 0$, existuje celé kladné číslo p takové, že

$$n > p \Rightarrow |\, q^n \,| < \varepsilon. \qquad (29{\cdot}5)$$

Správnost vztahu (29·4) si dokážeme pomocí logaritmů (ač by to šlo i bez nich). Jest $0 < |q| < 1$, tedy $\log|q| < 0$ [viz (28·4)]. Čísla

$$1 \,.\, \log|q|,\ 2 \,.\, \log|q|,\ 3 \,.\, \log|q|, \ldots$$

jsou tedy záporná a jejich absolutní hodnoty zřejmě vzrůstají nade všecky meze. Proto lze k danému číslu $\varepsilon > 0$ určiti celé kladné číslo p tak, že

$$n > p \Rightarrow n \,.\, \log|q| < \log \varepsilon.$$

Avšak $n \,.\, \log|q| = \log|q|^n$ podle (28·7), takže pro všecka $n > p$ je $\log|q|^n < \log\varepsilon$. Ježto však logaritmus je rostoucí funkce, je

$$\log|q|^n < \log\varepsilon \Rightarrow |q|^n < \varepsilon,$$

takže platí (29·5), neboť $|q^n| = |q|^n$. Tím je správnost vztahu (29·4) dokázána.

Podle (29·2) je

$$\left|S_n - \frac{1}{1-q}\right| = \left|\frac{1}{1-q}q^n\right| \tag{29·6}$$

a když [za předpokladu $|q| < 1$] n roste nade všecky meze vychází z (29·4), že se ve (29·6) pravá strana blíží nule tedy se blíží nule i strana levá, t. j. S_n se blíží číslu $\left|\frac{1}{1-q}\right|$.

Píšeme krátce (stále pro $|q| < 1$)

$$1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \ldots = \frac{1}{1-q} \tag{29·7}$$

a říkáme, že nalevo ve (29·7) je **konvergentní nekonečná řada** se součtem $\frac{1}{1-q}$. Ta nekonečná řada má nekonečně mnoho členů, a proto vlastně nelze mluvit o jejím „součtu". Říkáme-li, že má součet $\frac{1}{1-q}$, míníme tím, že součet velkého počtu prvních členů řady je **přibližně** roven $\frac{1}{1-q}$, což je přesněji vyjádřeno vztahem

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q},$$

kde S_n znamená součet prvních n členů řady (29·7), t. j. S_n má týž význam jako ve (29·1). Obecně říkáme, že nekonečná řada

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots \qquad (29{\cdot}8)$$

je konvergentní a že má součet s, když

$$\lim_{n\to\infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = s, \qquad (29{\cdot}9)$$

t. j. když ke každému číslu $\varepsilon > 0$ lze určiti celé kladné číslo p tak, že

$$n > p \Rightarrow |(a_1 + a_2 + \dots + a_n) - s| < \varepsilon.$$

Když k nekonečné řadě (29·8) nelze udati číslo s s vlastností (29·9), říkáme, že řada je divergentní; divergentní řada nemá žádný součet. Řada (29·7) je divergentní na př. pro $q = 1$ nebo pro $q = -1$; ostatně je divergentní pro všecka q, pro něž není $|q| < 1$.

Pojem součtu konvergentní nekonečné řady je tedy (po derivaci a po integrálu) třetím důležitým příkladem obecného pojmu limity. Geometrická řada [t. j. řada tvaru (29·7)] se dobře hodí jako první příklad na pojem součtu nekonečné řady, protože se součet prvních n členů dá velmi pohodlně vyjádřit [viz (29·2)], takže diskuse je v tomto příkladě velmi jednoduchá. Na druhé straně součet konvergentní geometrické řady [tedy pravá strana ve (29·7)] je příliš jednoduchý, takže na tomto příkladě není ještě patrný pravý účel zavedení pojmu konvergentní řady; ten je v tom, že řada je pohodlným prostředkem k přibližnému výpočtu součtu. Tento účel bude tím lépe patrný u nekonečných řad, které poznáme v odst. 30 a 32.

30. Výpočet logaritmů. V tomto odstavci poznáme konvergentní nekonečnou řadu, pomocí které lze velmi pohodlně počítati logaritmy. Napřed si dokážeme, že pro $|q| < 1$ je

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^q \frac{x^n}{1-x}\, dx = 0. \qquad (30{\cdot}1)$$

Pro $q = 0$ je vztah (30·1) zřejmý [viz 24·10]. Budiž nyní $0 < q < 1$. Když x probíhá interval $[0, q]$, pak funkce $1 - x$ klesá od hodnoty 1 do hodnoty $1 - q > 0$, a proto funkce $\frac{1}{1 - x}$ roste od hodnoty 1 do hodnoty $\frac{1}{1 - q}$. Je tedy v celém intervalu $[0, q]$

$$0 \leqq \frac{x^n}{1 - x} \leqq \frac{1}{1 - q} \cdot x^n,$$

takže podle IV a V v odst. 24 je

$$0 \leqq \int_0^q \frac{x^n}{1 - x} \, dx \leqq \int_0^q \frac{1}{1 - q} \cdot x^n \, dx.$$

Podle I v odst. 24 a podle (25·10) je však

$$\int_0^q \frac{1}{1 - q} \cdot x^n \, dx = \frac{1}{1 - q} \cdot \frac{q^{n+1}}{n + 1} < \frac{1}{1 - q} \cdot \frac{1}{n + 1}$$

neboť $0 < q < 1 \Rightarrow q^{n+1} < 1$. Tedy

$$0 \leqq \int_0^q \frac{x^n}{1 - x} \, dx < \frac{1}{1 - q} \cdot \frac{1}{n + 1}$$

a z toho ihned plyne (30·1). Tím je (30·1) dokázáno pro $0 \leqq \leqq q < 1$. Budiž konečně $0 > q > -1$. Když x probíhá interval $[q, 0]$, pak funkce $1 - x$ klesá od hodnoty $1 - q > 1$ do hodnoty 1, a proto funkce $\frac{1}{1 - x}$ roste od hodnoty $\frac{1}{1 - q} > 0$ do hodnoty 1. Je tedy v celém intervalu $[q, 0]$

$$0 \leqq \frac{(-x)^n}{1 - x} \leqq (-x)^n,$$

takže podle IV a V v odst. 24 je

$$0 \leqq \int_q^0 \frac{(-x)^n}{1 - x} \, dx \leqq \int_q^0 (-x)^n \, dx.$$

Podle I v odst. 24 a podle (25·10) je však

$$\int_q^0 (-x)^n \mathrm{d}x = (-1)^n \int_q^0 x^n \mathrm{d}x = (-1)^n \frac{q^{n+1}}{n+1} =$$
$$= \frac{|q|^{n+1}}{n+1} < \frac{1}{n+1},$$

neboť $|q| < 1 \Rightarrow |q|^{n+1} < 1$. Tedy

$$0 \leqq \int_q^0 \frac{(-x)^n}{1-x} \mathrm{d}x < \frac{1}{n+1}. \tag{30·2}$$

Avšak podle I v odst. 24 a podle (24·9) je

$$\int_0^q \frac{x^n}{1-x} \mathrm{d}x = (-1)^n \int_0^q \frac{(-x)^n}{1-x} \mathrm{d}x = (-1)^{n+1} \int_q^0 \frac{(-x)^n}{1-x} \mathrm{d}x,$$

takže podle (30·2)

$$\left| \int_0^q \frac{x^n}{1-x} \mathrm{d}x \right| < \frac{1}{n+1},$$

z čehož zase plyne (30·1).

Nyní si dokážeme, že pro $|q| < 1$ nekonečná řada

$$q + \frac{q^2}{2} + \frac{q^3}{3} + \frac{q^4}{4} + \dots \tag{30·3}$$

je konvergentní a má součet $-\log(1-q)$. Za tím účelem zaveďme funkci

$$f_n(x) = -\log(1-x) - \left[x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n}\right],$$

kde proměnná x probíhá vnitřek intervalu $[-1, 1]$. (Číslo $1 - x$ je tedy stále kladné, takže symbol $\log(1-x)$ má všude význam.) Derivováním najdeme

$$f'_n(x) = \frac{1}{1-x} - [1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}].$$

Avšak podle (29·1) a (29·2) je

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x},$$

takže

$$f'_n(x) = \frac{x^n}{1 - x}.$$

Jsou-li tedy a, b dvě libovolná čísla z vnitřku intervalu $[-1, 1]$, je podle odst. 25

$$\int_a^b \frac{x^n}{1 - x}\, \mathrm{d}x = f_n(b) - f_n(a).$$

Protože $f_n(0) = 0$, je tedy pro $|q| < 1$

$$\int_0^q \frac{x^n}{1 - x}\, \mathrm{d}x = f_n(q),$$

takže $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(q) = 0$ podle (30·1). Avšak $f_n(q)$ je rozdíl mezi číslem $-\log(1 - q)$ a součtem prvních n členů řady (30·3). Tím je dokázáno, že pro $|q| < 1$ je řada (30·3) konvergentní a že

$$q + \frac{q^2}{2} + \frac{q^3}{3} + \frac{q^4}{4} + \ldots = -\log(1 - q). \qquad (30·4)$$

Protože $|-q| = |q|$, můžeme pro $|q| < 1$ ve (30·4) místo q psáti $-q$, čímž dostaneme (změníme-li všude znamení)

$$q - \frac{q^2}{2} + \frac{q^3}{3} - \frac{q^4}{4} + \ldots = \log(1 + q).$$

Protože

$$\log \frac{1 + q}{1 - q} = \log(1 + q) - \log(1 - q),$$

je pro $|q| < 1$

$$\log \frac{1+q}{1-q} = 2 \cdot \left[q + \frac{q^3}{3} + \frac{q^5}{5} + \ldots \right].$$

Volíme-li

$$q = \frac{1}{2n+1},$$

dostaneme vzorec

$$\log(n+1) - \log n = 2 \left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \ldots \right].$$

Volíme-li po řadě $n = 1, 2, 3, \ldots$ můžeme postupně počítati přirozené logaritmy všech celých čísel, při čemž i při velké přesnosti je třeba jen několika málo prvých členů řady. Proveďte si tento výpočet pro několik prvých n. Pro kontrolu buďtež zde uvedeny na šest desetinných míst přirozené logaritmy

$$\begin{array}{ll}
\log 2 \doteq 0{,}693147, & \log 3 \doteq 1{,}098612, \\
\log 4 \doteq 1{,}386294, & \log 5 \doteq 1{,}609438, \\
\log 6 \doteq 1{,}791759, & \log 7 \doteq 1{,}945910, \\
\log 8 \doteq 2{,}079442, & \log 9 \doteq 2{,}197225, \\
\log 10 \doteq 2{,}302585, & \log 11 \doteq 2{,}397895.
\end{array}$$

Z přirozených logaritmů dostaneme dekadické logaritmy podle (28·9), násobíce číslem

$$\frac{1}{\log 10} \doteq 0{,}434294481903252. = \log_{\text{dekad.}} e.$$

31. Funkce arcus tangens. V obr. 23 je naznačena kružnice K se středem v počátku O a s poloměrem rovným jednotce délky. Kružnice K obsahuje právě ty body $(x; y)$, jejichž vzdálenost od počátku je rovna 1, takže podle (3·1) rovnice kružnice K je

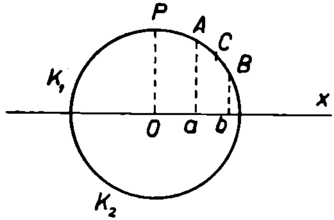
$$x^2 + y^2 = 1. \tag{31·1}$$

Osa x rozdělí K na dvě polokružnice K_1, K_2. My si budeme všímat pouze polokružnice K_1, která leží nad osou x. Ke každému x z intervalu $[-1, 1]$ existuje na K_1 právě jeden bod $(x; y)$ a pro tento bod podle (31·1) platí vzorec

$$y = \sqrt{1 - x^2}. \qquad (31 \cdot 2)$$

Tedy (31·2) představuje funkci, jejíž graf je polokružnice K_1. Uvnitř intervalu $[-1, 1]$ má funkce (31·2) derivaci

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}. \qquad (31 \cdot 3)$$



Obr. 23.

Tato derivace je zřejmě spojitá funkce uvnitř intervalu $[-1, 1]$. Zvolíme-li si čísla a, b tak, že

$$-1 < a < b < 1,$$

pak je interval $[a, b]$ částí intervalu $[-1, 1]$. Číslům a, b odpovídají body A, B na polokružnici K_1; tyto body jsou krajními body oblouku C kružnice K (viz obr. 23). Délka oblouku C je podle III v odst. 27 rovna integrálu

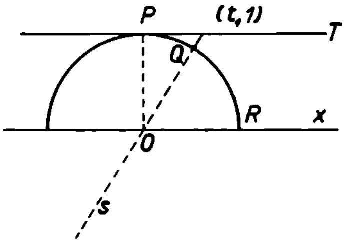
$$\int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, \mathrm{d}x,$$

do kterého musíme za y' dosaditi hodnotu (31·3). Provedeme-li dosazení, dostaneme po úpravě integrál

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}}. \qquad (31 \cdot 4)$$

Po této přípravě hodláme nyní definovati určitou funkci $F(t)$ proměnné t. Za tím účelem položme $P = (0;1)$, takže P je nejvyšší bod kružnice K. Tečna T kružnice K v bodě P je patrně vodorovná (viz obr. 24), tedy má rovnici $y = 1$.

Pro každou volbu čísla t je $(t; 1)$ určitý bod na přímce T. Spojnice s bodu $(t; 1)$ s počátkem má patrně rovnici $x = ty$. Přímka s protne polokružnici K_1 v bodě Q. Abychom si vypočetli souřadnice x, y bodu Q, dosadíme $x=ty$ do rovnice (31·1), což dá $(1+t^2)\, y^2 = 1$; protože $y>0$, je tedy



Obr. 24.

$$y = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},$$

takže

$$Q = \left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}};\ \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right).$$

Definice funkce $F(t)$ zní takto: Je-li předně $t > 0$, takže bod Q leží napravo od bodu P, je $F(t)$ délka oblouku $\widehat{PQ}$ kružnice K, tedy

$$F(t) = \int_0^{\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

podle (31·4). Je-li za druhé $t < 0$, takže bod Q leží nalevo od bodu P, je číslo $F(t)$ záporné a jeho absolutní hodnota je rovna délce oblouku $\widehat{PQ}$, tedy

$$F(t) = -\int_{\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Je-li konečně $t = 0$, takže body P a Q splynou, položíme $F(t) = 0$. Z definice je patrné, že

$$F(-t) = -F(t) \qquad (31\cdot5)$$

pro každé t, že tedy naše funkce je funkce lichá. Když t

roste nade všecky meze, blíží se zřejmě bod Q poloze $R = (1;0)$ [viz obr. 24], takže se číslo $F(t)$ blíží délce oblouku $\widehat{PR}$, t. j. čtvrtině délky celé kružnice K. Protože poloměr kružnice K je roven 1, je její délka 2π, takže

$$\lim_{t \to \infty} F(t) = \frac{\pi}{2}. \tag{31·6}$$

Ze (31·5) a (31·6) plyne

$$\lim_{t \to -\infty} F(t) = -\frac{\pi}{2}. \tag{31·7}$$

Funkce $F(t)$ má jméno arcus tangens. Důvod tohoto jména je jasný z definice funkce $F(t)$ pro $t > 0$. Pak je patrně t tangens úhlu $\sphericalangle\, POQ$ a číslo $F(t)$ je délka oblouku (latinsky arcus), který tento úhel vytíná z kružnice K.

Podle (24·9) a (24·10) jest

$$F(t) = \int_0^{\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

pro všecka t. Definujeme-li funkci $f(u)$ proměnné u rovnicí

$$f(u) = \int_0^u \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}},$$

kde proměnná u probíhá vnitřek intervalu $[-1, 1]$, je tedy

$$F(t) = f\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right) \tag{31·8}$$

pro všecka t. Podle odst. 25 jest

$$f'(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}; \tag{31·9}$$

mimo to se najde po úpravě

$$\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)' = \frac{1}{(\sqrt{1+t^2})^3}. \qquad (31\cdot10)$$

Podle odst. 17 však plyne ze (31·8)

$$F'(t) = f'\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right) \cdot \left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)',$$

takže podle (31·9) a (31·10) je

$$F'(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{t^2}{1+t^2}}} \cdot \frac{1}{(\sqrt{1+t^2})^3},$$

z čehož plyne po úpravě

$$F'(t) = \frac{1}{1+t^2}. \qquad (31\cdot11)$$

Ze (31·11) plyne podle odst. 25

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = F(b) - F(a);$$

protože $F(0) = 0$, je tedy

$$F(t) = \int_0^t \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}. \qquad (31\cdot12)$$

32. Výpočet čísla π. Nechť stále $F(t)$ znamená funkci arcus tangens. V tomto odstavci si dokážeme, že pro $|t| \leqq 1$ je číslo $F(t)$ rovné součtu konvergentní řady

$$F(t) = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \dots \qquad (32\cdot1)$$

To je zřejmé pro $t = 0$; případ $t < 0$ se pomocí (31·5) převede na případ $t > 0$. Nechť tedy $0 < t \leqq 1$. Napřed si dokážeme, že

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t \frac{x^{2n}}{1+x^2}\,dx = 0. \tag{32·2}$$

V celém intervalu $[0, t]$ je

$$0 \leqq \frac{x^{2n}}{1+x^2} \leqq x^{2n},$$

takže podle IV a V v odst. 24 je

$$0 \leqq \int_0^t \frac{x^{2n}}{1+x^2}\,dx \leqq \int_0^t x^{2n}\,dx.$$

Podle (25·10) je však

$$\int_0^t x^{2n}\,dx = \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \leqq \frac{1}{2n+1},$$

takže

$$0 \leqq \int_0^t \frac{x^{2n}}{1+x^2}\,dx \leqq \frac{1}{2n+1},$$

z čehož plyne (32·2).

Nyní si zaveďme funkci

$$\varphi_n(x) = F(x) - \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots \pm \frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right].$$

[Horní znamení platí při lichém n, dolní při sudém.] Derivováním dostaneme pro všecka t [viz (31·1)]

$$\varphi'_n(x) = \frac{1}{1+x^2} - [1 - x^2 + x^4 - \ldots \pm x^{2n-2}].$$

Avšak podle (29·1) a (29·2) je

$$1 - x^2 + x^4 - \ldots \pm x^{2n-2} = \frac{1 \pm x^{2n}}{1+x^2},$$

takže

$$\pm\, \varphi'_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^2}.$$

Podle odst. 25 je tedy

$$\pm \int_a^b \frac{x^{2n}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \varphi_n(b) - \varphi_n(a)$$

pro každou volbu čísel a, b. Protože $\varphi_n(0) = 0$, je tedy

$$\pm \int_0^t \frac{x^{2n}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \varphi_n(t)$$

pro každé t. Pro $0 < t \leqq 1$ je tedy podle (32·2)

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = 0$$

a z toho plyne (32·1), neboť $\varphi_n(t)$ je právě rozdíl mezi $F(t)$ a součtem prvních n členů nekonečné řady napsané ve (32·1).

Pro $t = 1$ je oblouk $\widehat{PQ}$ (viz obr. 24) osminou kružnice K, takže

$$F(1) = \frac{\pi}{4} \tag{32·3}$$

neboli

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}. \tag{32·4}$$

Podle (32·1) a (32·3) je

$$\pi = 4\,[1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \ldots]. \tag{32·5}$$

Řada (5) se nehodí pro praktický výpočet čísla π. [Aproximujíce řadu (32·5) stem prvých členů, dostali bychom pro π hodnotu asi 3,1316, při aproximaci pomocí tisíce členů hodnotu asi 3,1406.] Pro praktický výpočet se hodí řada (32·1) pouze při m a l é m t. Můžeme si však při větším t pomoci následujícím obratem: Nechť α, β jsou dva úhly menší než 45°, takže úhel $\alpha + \beta$ je ostrý. Budiž zase $P = (0, 1)$

a buďtež Q_1, Q_2, Q_3 body na polokružnici K_1 napravo od osy y takové, že

$$\sphericalangle POQ_1 = \alpha, \ \sphericalangle POQ_2 = \beta, \ \sphericalangle POQ_3 = \alpha + \beta. \qquad (32{\cdot}6)$$

Je-li

$$\operatorname{tg} \alpha = t_1, \ \operatorname{tg} \beta = t_2, \ \operatorname{tg} (\alpha + \beta) = t_3,$$

jsou čísla $F(t_1), F(t_2), F(t_3)$ rovna délkám oblouků $\widehat{PQ_1}, \widehat{PQ_2}, \widehat{PQ_3}$. Jsou-li úhly α a β dosti malé, jsou také čísla t_1 a t_2 malá, takže hodnoty $F(t_1)$ a $F(t_2)$ můžeme pohodlně počítati pomocí řady (32·1). Avšak ze (32·6) plyne, že délka oblouku $\widehat{PQ_3}$ je rovna součtu délek oblouků $\widehat{PQ_1}, \widehat{PQ_2}$, takže

$$F(t_3) = F(t_1) + F(t_2).$$

Můžeme tedy také $F(t_3)$ počítati pomocí řady (32·1), umíme-li vypočísti číslo t_3 z čísel t_1, t_2. To lze pomocí vzorce

$$\operatorname{tg} (\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, \qquad (32{\cdot}7)$$

na který se někteří z vás budou pamatovati ze střední školy. Podle (32·7)

$$t_3 = \frac{t_1 + t_2}{1 - t_1 t_2},$$

tedy

$$F\left(\frac{t_1 + t_2}{1 - t_1 t_2}\right) = F(t_1) + F(t_2). \qquad (32{\cdot}8)$$

My si zde odvodíme vzorec (32·8) pomocí vyšší matematiky, neužívajíce ani geometrického významu funkce $F(t)$ ani trigonometrického vzorce (32·7). Zvolme si kladné číslo t_1 a dokažme, že (32·8) platí pro všecka t_2 taková, že $t_1 t_2 < 1$. Uvnitř intervalu $\left[-\infty, \frac{1}{t_1}\right]$ je definována funkce

$$\varphi(t) = \frac{t_1 + t}{1 - t_1 t}$$

a dá se zde derivovat; vyjde

$$\varphi'(t) = \frac{1 + t_1^2}{(1 - t_1 t)^2}.$$

Podle (31·11) a podle odst. 17 má funkce

$$F\left(\frac{t_1+t}{1-t_1t}\right)-F(t) \tag{32·9}$$

uvnitř intervalu $\left[-\infty, \frac{1}{t_1}\right]$ derivaci

$$\frac{1}{1+\left(\frac{t_1+t}{1-t_1t}\right)^2}\cdot\frac{1+t_1^2}{(1-t_1t)^2}-\frac{1}{1+t^2}. \tag{32·10}$$

Avšak úpravou snadno se dokáže, že výraz (32·10) je identicky roven nule. Tedy funkce (32·9) má uvnitř intervalu $\left[-\infty, \frac{1}{t_1}\right]$ všude derivaci rovnou nule a tedy (viz odst. 21) má uvnitř celého intervalu konstantní hodnotu. Tuto hodnotu určíme, dosadíme-li $t = 0$. (To jde, neboť číslo 0 leží uvnitř našeho intervalu.) Dostaneme, že ta konstantní hodnota je $F(t_1) - F(0) = F(t_1)$. Je tedy

$$F\left(\frac{t_1+t}{1-t_1t}\right)-F(t)=F(t_1)$$

pro všecka $t < \frac{1}{t_1}$. Dosadíme-li $t = t_2$, dostaneme (32·8).

Pomocí vzorce (32·8) lze najít rozmanité cesty k pohodlnému numerickému výpočtu čísla π. Vyložíme si jednu z nich. Dosadíme do (32·8) nejprve $t_1 = t_2 = \frac{1}{5}$. Vyjde

$$F(\tfrac{5}{12}) = 2\,.\,F(\tfrac{1}{5}). \tag{32·11}$$

Dále dosadíme $t_1 = t_2 = \frac{5}{12}$. Vyjde

$$F(\tfrac{120}{119}) = 2F(\tfrac{5}{12}). \tag{32·12}$$

Konečně dosadíme $t_1 = 1$, $t_2 = \frac{1}{239}$. Vyjde

$$F(\tfrac{120}{119}) = F(1) + F(\tfrac{1}{239}). \tag{32·13}$$

Ze (32·3), (32·11), (32·12) a (32·13) plyne snadným počtem

$$\pi = 16\,.\,F(\tfrac{1}{5}) - 4\,.\,F(\tfrac{1}{239}). \tag{32·14}$$

Čísla $F(\frac{1}{5})$ a $F(\frac{1}{239})$ můžeme počítati pomocí řady (32·1) velmi pohodlně na velký počet desetinných míst, takže (32·14) je rychlá cesta k výpočtu čísla π. Vypočtěte si sami tímto způsobem π aspoň na deset desetinných míst. Pro kontrolu budiž zde udáno prvých 20 desetinných míst čísla π:

$$\pi \doteq 3{,}14159\ 26535\ 89793\ 23846.$$

Skončíme poznámkou o vzorci (32·8). Omezme se jako dosud na případ $t_1 > 0$. Vzorec (32·8) byl odvozen za předpokladu $t_2 < \frac{1}{t_1}$. Zejména platí vzorec (32·8) pro všecka záporná t_2. Je-li však t_2 záporné a roste-li $|t_2|$ nade všecky meze, pak se zřejmě zlomek

$$\frac{t_1 + t_2}{1 - t_1 t_2} = \frac{\frac{t_1}{t_2} + 1}{\frac{1}{t_2} - t_1} \tag{32·15}$$

blíží číslu $-\frac{1}{t_1}$, takže se levá a tudíž i pravá strana vzorce (32·8) blíží číslu $F\left(-\frac{1}{t_1}\right)$. Porovnáme-li tento výsledek se (31·7), dostaneme

$$F\left(-\frac{1}{t_1}\right) = F(t_1) - \frac{\pi}{2}. \tag{32·16}$$

Pro $t_2 = \frac{1}{t_1}$ je zlomek (15) bezvýznamný, tudíž i vzorec (32·8). Ale pro $t_2 > \frac{1}{t_1}$ mají obě strany vzorce (32·8) význam, ale vzorec (32·8) je v tomto případě nesprávný. Správný vzorec pro případ $t_2 > \frac{1}{t_1}$ je

$$F\left(\frac{t_1 + t_2}{1 - t_1 t_2}\right) = F(t_1) + F(t_2) - \pi.$$

Neboť nechť proměnná t probíhá vnitřek intervalu $\left[\frac{1}{t_1}, \infty\right]$. Jako výše najdeme, že funkce (32·9) má derivaci identicky rovnou nule, takže je to konstanta. Označíme-li si tuto konstantu c, je pro $t > \frac{1}{t_1}$

$$F\left(\frac{t_1 + t_2}{1 - t_1 t_2}\right) = F(t) + c, \tag{32·17}$$

takže potřebujeme pouze dokázati, že

$$c = F(t_1) - \pi. \tag{32·18}$$

Za tím účelem si všimněme, co se děje, roste-li t nade všecky meze. Zlomek, který se vyskytne nalevo ve (32·17), se pak blíží číslu $-\frac{1}{t_1}$ [to vidíme, upravíme-li jej jako ve (32·15)], takže se levá a tudíž i pravá strana vzorce (32·17) blíží číslu $F\left(-\frac{1}{t_1}\right)$. Porovnáme-li tento výsledek se (31·6), dostaneme

$$F\left(-\frac{1}{t_1}\right) = \frac{\pi}{2} + c. \tag{32·19}$$

Ze (32·16) a (32·19) plyne (32·18).

DODATEK

33. Metoda postupného půlení. V textu této knížky jsme několikrát vynechali důkaz některých tvrzení a tyto vynechané důkazy mají býti v tomto Dodatku provedeny. Mnohá z těch tvrzení mají tento tvar: Je dán interval $[a, b]$ a tvrdí se, že v tomto intervalu existuje aspoň jedno číslo ξ, které má určitou vlastnost. Naše důkazy existence takových čísel ξ budou míti jednotný tvar, a úkolem tohoto odstavce je popis tohoto jednotného tvaru.

Budeme při tom užívati, jak jsme to vlastně v této knížce stále dělali, geometrického znázornění čísel body na přímce, kterou si myslíme vodorovnou a můžeme považovati za osu x. Určitý bod O na ose x je zvolen za počátek a geometrickým obrazem čísla x je bod $(x; 0)$, který budeme teď krátce nazývati bodem x. Geometrickým obrazem intervalu $[a, b]$ je úsečka na ose x, pro kterou jsou bod a a bod b krajními body; geometrickým obrazem určitého čísla z intervalu $[a, b]$ je určitý bod té úsečky.

Je-li $J = [\alpha, \beta]$ interval obsažený v intervalu $[a, b]$, pak bod $\dfrac{\alpha + \beta}{2}$ leží právě uprostřed intervalu J (t. j. uprostřed úsečky, která je geometrickým obrazem intervalu J). Bodem $\dfrac{\alpha + \beta}{2}$ se interval J rozdělí na dvě poloviny

$$J^* = \left[\alpha, \frac{\alpha + \beta}{2}\right], \qquad J^{**} = \left[\frac{\alpha + \beta}{2}, \beta\right]. \tag{33·1}$$

Mysleme si nyní dán určitý předpis, který každému intervalu $J = [\alpha, \beta]$ obsaženému v základním intervalu $[a, b]$ přiřazuje *jednu* z obou polovin (33·1) intervalu J, kterou nazveme *vyvolenou polovinou* intervalu J. Pak si můžeme postupně utvořit intervaly

$$J_0, J_1, J_2, J_3, \ldots, \tag{33·2}$$

při čemž první interval J_0 je roven základnímu intervalu

$[a, b]$ a každý následující interval je vyvolenou polovinou intervalu bezprostředně předcházejícího. Z názoru je jasné, že existuje zcela určitý bod ξ, který leží současně ve všech intervalech (33·2). Tento bod ξ je geometrickým obrazem určitého čísla ξ. Toto číslo ξ nazveme kořenem výše uvedeného předpisu pro půlení intervalů J. Poloha bodu ξ v intervalu $[a, b]$ závisí na volbě toho předpisu a obratnou volbou předpisu dosáhneme v řadě případů, že číslo ξ bude míti právě tu vlastnost, jejíž existence se má prokázati.

Délky intervalů (33·2) jsou

$$b - a, \quad \frac{b-a}{2}, \quad \frac{b-a}{2^2}, \quad \frac{b-a}{2^3}, \ldots$$

Protože bod ξ leží ve všech intervalech (33·2), platí nerovnost

$$| x - \xi | \leqq \frac{b-a}{2^n}$$

pro každý bod x intervalu J_n. Avšak zřejmě je

$$\lim_{n \to \infty} \frac{b-a}{2^n} = 0.$$

Z toho následuje snadno, že každému číslu $\delta > 0$ lze přiřaditi index p tak, že, kdykoli $n \geqq p$, platí nerovnost

$$| x - \xi | < \delta$$

pro všecky body x intervalu J_n. Tento fakt nám bude užitečný.

Že kořen ξ předpisu pro půlení existuje, usoudili jsme z geometrického názoru. Je možné a účelné, dokázati existenci čísla ξ ryze aritmeticky a lze to provésti několika způsoby. Ale tím se v této knížce nehodláme zabývati.

34. Obecné vlastnosti spojitých funkcí. V celém odstavci předpokládáme, že je dána v intervalu $[a,b]$ spojitá funkce $f(x)$.

I. Je-li $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, existuje v intervalu $[a, b]$ aspoň jedno číslo ξ takové, že $f(\xi) = 0$.

Budeme naopak předpokládati, že je $f(x) \neq 0$ pro každé číslo x z intervalu $[a, b]$. Zavedeme si určitý předpis pro půlení intervalů a dokážeme, že musí býti přece jenom $f(\xi) = 0$, je-li ξ kořen předpisu.

Interval $J = [\alpha, \beta]$ nazveme významným, jsou-li splněny obě nerovnosti

$$f(\alpha) < 0, \; f(\beta) > 0 \tag{34·1}$$

a lhostejným v případě opačném. Jsou-li (33·1) obě poloviny intervalu J a je-li J lhostejný interval, prohlásíme J^* za vyvolenou polovinu. Je-li J významný interval, prohlásíme za vyvolenou polovinu: [1] J^*, když číslo

$$f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \tag{34·2}$$

je kladné, [2] J^{**}, když číslo (34·2) je záporné. Je zřejmé, že vyvolená polovina významného intervalu je zase významný interval. Protože interval $J_0 = [a, b]$ je významný, jsou všecky intervaly (33·2) významné. Budiž ξ kořen našeho předpisu pro půlení. Podle předpokladu je $f(\xi) \neq 0$. Dokážeme, že to není možné.

Je-li $f(\xi) \neq 0$, můžeme zvoliti číslo $\varepsilon > 0$ tak, že $\varepsilon < |f(\xi)|$. Protože funkce $f(x)$ je pro $x = \xi$ spojitá, existuje číslo $\delta > 0$ takové, že (pro čísla x z intervalu $[a, b]$)

$$|x - \xi| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\xi)| < \varepsilon. \tag{34·3}$$

Zvolíme-li index n dosti veliký, platí (viz odst. 33) nerovnost $|x - \xi| < \delta$ pro všecka x z intervalu J_n. Je-li $J_n = [\alpha, \beta]$, je tedy zejména

$$|f(\alpha) - f(\xi)| < \varepsilon, \quad |f(\beta) - f(\xi)| < \varepsilon.$$

Z toho plyne

$$f(\alpha) > f(\xi) - \varepsilon, \quad f(\beta) < f(\xi) + \varepsilon. \tag{34·4}$$

Avšak interval J_n je významný, takže platí (34·1). Ze (34·1) a (34·4) plyne

$$f(\xi) - \varepsilon < 0, \quad f(\xi) + \varepsilon > 0.$$

Protože $\varepsilon < |f(\xi)|$, je to nemožné, ať již $f(\xi) > 0$, či $f(\xi) < 0$.

II. Nabude-li funkce $f(x)$ hodnoty b_1 i hodnoty b_2 a je-li $b_1 < d < b_2$, nabude $f(x)$ také hodnoty d.

To plyne již zcela snadno z I. Podle předpokladu existuje interval $[a_1, a_2]$ obsažený v intervalu $[a, b]$ takový, že je buďto

$$f(a_1) = b_1,\ f(a_2) = b_2 \qquad (34{\cdot}5)$$

nebo

$$f(a_1) = b_2,\ f(a_2) = b_1. \qquad (34{\cdot}6)$$

Platí-li (34·5), soudíme takto: Funkce $\varphi(x) = f(x) - d$ je spojitá v intervalu $[a_1, a_2]$ a jest $\varphi(a_1) = b_1 - d < 0$, $\varphi(a_2) = b_2 - d > 0$, takže podle I existuje v intervalu $[a_1, a_2]$ (tím spíš v intervalu $[a, b]$) aspoň jedno číslo ξ, v němž $\varphi(\xi) = 0$, takže $f(\xi) = d$. Platí-li (34·6), soudíme stejně s tím rozdílem, že položíme $\varphi(x) = d - f(x)$.

III. V intervalu $[a, b]$ existuje aspoň jedno číslo ξ takové, že $f(x) \leqq f(\xi)$ pro každé x z intervalu $[a, b]$.

Je-li J interval obsažený v intervalu $[a, b]$ a je-li K interval obsažený v intervalu J, řekneme, že K je podstatná část intervalu J, existuje-li ke každému číslu u z intervalu J aspoň jedno číslo v intervalu K tak, že $f(v) \geqq f(u)$.

Buďte (33·1) obě poloviny intervalu J. Není-li J^* podstatná část intervalu J, pak musí v intervalu J existovat číslo r takové, že

$$f(x) < f(r) \qquad (34{\cdot}7)$$

pro každé x z intervalu J^*; číslo r nenáleží do intervalu J^* [neboť (34·7) neplatí pro $x = r$], takže r musí náležet do J^{**}. Není-li J^{**} podstatná část intervalu J, soudíme podobně, že v intervalu J^* existuje číslo s takové, že

$$f(x) < f(s) \qquad (34{\cdot}8)$$

pro každé x z intervalu J^{**}.

Z toho následuje, že aspoň jedna z obou polovin (33·1) je podstatnou částí intervalu J. Neboť jinak by existovalo i číslo r v intervalu J^{**} i číslo s v intervalu J^* a dostali bychom jednak $f(s) < f(r)$ ze (34·7), jednak $f(r) < f(s)$ ze (34·8), což si navzájem odporuje.

Z toho je patrné, že můžeme zvoliti takový předpis pro půlení, že vyvolená polovina každého intervalu J je podstatnou částí intervalu J. Budiž ξ kořen toho předpisu. Dokážeme, že pro každé x z intervalu J platí nerovnost $f(x) \leqq f(\xi)$, čímž budeme s důkazem hotovi.

Nechť naopak existuje v intervalu $J_0 = [a, b]$ číslo x_0 takové, že $f(x_0) > f(\xi)$. Zvolme číslo $\varepsilon > 0$ tak, aby bylo

$$f(x_0) > f(\xi) + \varepsilon. \qquad (34{\cdot}9)$$

Protože ve (33·2) následuje za každým intervalem jeho podstatná část, můžeme postupně stanoviti čísla

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$$

po jednom v každém z intervalů (33·2), tak že

$$f(x_0) \leqq f(x_1) \leqq f(x_2) \leqq f(x_3) \leqq \ldots$$

Podle (34·9) platí

$$f(x_n) > f(\xi) + \varepsilon \tag{34·10}$$

pro všecka n. Protože funkce $f(x)$ je spojitá pro $x = \xi$, existuje číslo $\delta > 0$ takové, že platí (34·3). Je-li index n dosti veliký, je patrně $| x_n - \xi | < \delta$ (neboť x_n a ξ leží v intervalu J_n), takže podle (34·3) je

$$| f(x_n) - f(\xi) | < \varepsilon,$$

což je ve sporu s nerovností (34·10).

IV. V intervalu $[a, b]$ existuje aspoň jedno číslo ξ takové, že $f(x) \geqq f(\xi)$ pro každé x z intervalu $[a, b]$.

To plyne ihned z III. Neboť $g(x) = - f(x)$ je spojitá funkce v intervalu $[a, b]$, takže podle III existuje v $[a, b]$ číslo ξ takové, že pro každé x z intervalu $[a, b]$ platí $g(x) \leqq g(\xi)$ neboli $- f(x) \leqq - f(\xi)$ neboli $f(x) \geqq f(\xi)$.

V. Budiž dáno číslo $\varepsilon > 0$. Pak existují čísla $a_0, a_1, \ldots, a_m$ taková, že

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{m-1} < a_m = b$$

a že platí nerovnost $| f(y_1) - f(y_2) | < \varepsilon$, kdykoli obě čísla y_1, y_2 náležejí do stejného z intervalů

$$[a_0, a_1], [a_1, a_2], \ldots, [a_{m-1}, a_m].$$

Interval $J = [\alpha, \beta]$ obsažený v intervalu $[a, b]$ nazveme povolným, lze-li udati čísla $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\mu$ tak, že

$$\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{\mu-1} < \alpha_\mu = \beta \tag{34·11}$$

a že platí nerovnost $| f(y_1) - f(y_2) | < \varepsilon$, kdykoli obě čísla y_1, y_2 náležejí do stejného z intervalů

$$[\alpha_0, \quad _1], [\alpha_1, \alpha_2], \ldots, [\alpha_{\mu-1}, \alpha_\mu]. \tag{34·12}$$

Interval J nazveme vzpurným, není-li povolný, lze-li tedy při každé volbě čísel $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\mu$ vyhovujících nerovnostem (34·11) udati dvě čísla c_1, c_2 tak, že platí $| f(c_1) - f(c_2) | \geqq \varepsilon$, ač obě čísla c_1, c_2 náležejí do stejného z intervalů (34·12). Máme dokázati, že interval $[a, b]$ je povolný. Budeme naopak předpokládati, že interval $[a, b]$ je vzpurný, a ukážeme, že tento předpoklad vede ke sporu.

Jsou-li obě poloviny (33·1) intervalu J povolné, je lehko dokázati, že také interval J je povolný. Z toho následuje, že lze udati takový předpis pro půlení, že vyvolená polovina každého vzpurného intervalu je zase vzpurný interval. Budiž ξ kořen toho předpisu. Protože interval $J_0 = [a, b]$ je vzpurný, musí všecky intervaly (33·2) býti vzpurné. Zvolme číslo $\varepsilon_1 > 0$ tak, že $2\varepsilon_1 < \varepsilon$. Protože funkce $f(x)$ je spojitá pro $x = \xi$, existuje číslo $\delta_1 > 0$ takové, že pro x z intervalu $[a, b]$ platí

$$|x - \xi| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(\xi)| < \varepsilon_1. \qquad (34\cdot13)$$

Volíme-li n dosti veliké, bude délka intervalu J_n menší než δ_1. Interval J_n je vzpurný, takže v něm jistě existují čísla c_1, c_2 taková, že $|f(c_1) - f(c_2)| \geqq \varepsilon$. Protože také ξ náleží do J_n a protože J_n má délku menší než δ_1, jest $|c_1 - \xi| < \varepsilon_1$, $|c_2 - \xi| < \varepsilon_1$, takže podle (34·13) je

$$|f(c_1) - f(\xi)| < \varepsilon_1, \ |f(\xi) - f(c_2)| = |f(c_2) - f(\xi)| < \varepsilon_1.$$

Z toho plyne

$$\begin{aligned} |f(c_1) - f(c_2)| &= |[f(c_1) - f(\xi)] + [f(\xi) - f(c_2)]| \leqq \\ &\leqq |f(c_1) - f(\xi)| + |f(\xi) - f(c_2)| < 2\varepsilon_1 < \varepsilon \end{aligned}$$

a to je nemožné.

VI. Budiž dáno číslo $\varepsilon > 0$. Pak existuje číslo $\delta > 0$ takové, že $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$, kdykoli z_1, z_2 jsou dvě čísla z intervalu $[a, b]$ taková, že $|z_1 - z_2| < \delta$.

Zvolme číslo $\varepsilon_1 > 0$ tak, že $2\varepsilon_1 < \varepsilon$. Podle V existují čísla $a_0, a_1, \ldots, a_m$ taková, že

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{m-1} < a_m = b$$

a že $|f(y_1) - f(y_2)| < \varepsilon_1$, kdykoli y_1, y_2 jsou dvě čísla ze stejného z intervalů

$$[a_0, a_1], [a_1, a_2], \ldots, [a_{m-1}, a_m]. \qquad (34\cdot14)$$

Zvolme číslo $\delta > 0$ tak, aby délka každého z intervalů (34·14) byla větší než δ. Buďtež z_1, z_2 dvě čísla z intervalu $[a, b]$ taková, že $|z_1 - z_2| < \delta$. Jsou-li obě čísla z_1, z_2 ve stejném z intervalů (34·14), je $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon_1$, tedy tím spíš $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$. Nejsou-li obě čísla z_1, z_2 ve stejném z intervalů (34·14), pak následuje z volby čísla δ, že interval, v kterém je z_1, a interval, v kterém je z_2, musí míti společný bod z_0. Pak je však $|f(z_1) - f(z_0)| < \varepsilon_1$, $|f(z_0) - f(z_2)| < \varepsilon_1$, tedy

$$|f(z_1) - f(z_2)| = |[f(z_1) - f(z_0)] + [f(z_0) - f(z_2)]| \leqq$$
$$\leqq |f(z_1) - f(z_0)| + |f(z_0) - f(z_2)| < 2\varepsilon_1 < \varepsilon.$$

35. Obecné vlastnosti derivace. I. Budiž $f(x)$ spojitá funkce v intervalu $[a, b]$. Budiž $f(a) = f(b)$. V každém čísle x uvnitř intervalu $[a, b]$ nechť má funkce $f(x)$ derivaci. Pak existuje uvnitř $[a, b]$ aspoň jedno číslo ξ takové, že $f'(\xi) = 0$.

Podle III v odst. 34 existuje v intervalu $[a, b]$ aspoň jedno číslo ξ_1 takové, že

$$f(x) \leqq f(\xi_1) \tag{35·1}$$

pro každé x z intervalu $[a, b]$. Předpokládejme nejprve, že ξ_1 leží uvnitř $[a, b]$! Pak je

$$\lim_{x \to \xi_1} \frac{f(x) - f(\xi_1)}{x - \xi_1} = f'(\xi_1). \tag{35·2}$$

Pro každé x z intervalu $[a, b]$ čitatel zlomku

$$\frac{f(x) - f(\xi_1)}{x - \xi_1} \tag{35·3}$$

je buďto záporný nebo rovný nule. Pro x menší než ξ_1 je jmenovatel zlomku (35·3) záporný, tedy je ten zlomek kladný nebo 0. Proto ze (35·2) plyne, že $f'(\xi_1) \geqq 0$. Pro x větší než ξ_1 je jmenovatel zlomku (35·3) kladný, tedy je ten zlomek záporný. Proto ze (35·2) plyne, že $f'(\xi_1) \leqq 0$. Jelikož už víme, že $f'(\xi_1) \geqq 0$, musí býti $f'(\xi_1) = 0$. Tedy pro případ, že ξ_1 leží uvnitř $[a, b]$, je důkaz hotov.

Podle IV v odst. 34 existuje v intervalu $[a, b]$ aspoň jedno číslo ξ_2 takové, že

$$f(x) \geqq f(\xi_2) \tag{35·4}$$

pro každé x z intervalu $[a, b]$. Předpokládáme-li, že ξ_2 leží uvnitř $[a, b]$, dokážeme cestou zcela stejnou, jakou jsme šli u čísla ξ_1, že je $f'(\xi_2) = 0$.

Zbývá tedy pouze případ, že žádné z obou čísel ξ_1, ξ_2 neleží uvnitř $[a, b]$. Protože $f(a) = f(b)$, je $f(\xi_1) = f(\xi_2)$. Protože pro každé x z intervalu $[a, b]$ platí obě nerovnosti (35·1) a (35·4), je $f(x)$ konstanta. Pak je však $f'(\xi) = 0$ pro **každé** ξ uvnitř $[a, b]$.

II. Budiž $f(x)$ spojitá funkce v intervalu $[a, b]$. V každém čísle x uvnitř intervalu $[a, b]$ nechť má funkce $f(x)$ derivaci. Pak existuje uvnitř $[a, b]$ aspoň jedno číslo ξ takové, že

$$f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b - a). \tag{35·5}$$

Zvolíme-li si nějakou konstantu c, můžeme utvořiti novou funkci

$$F(x) = f(x) - c \cdot x. \tag{35·6}$$

Zároveň s funkcí $f(x)$ je také $F(x)$ spojitá funkce v intervalu $[a, b]$. V každém čísle x uvnitř intervalu $[a, b]$ má také funkce $F(x)$ derivaci, a to

$$F'(x) = f'(x) - c. \tag{35·7}$$

Volíme-li konstantu c tak, aby bylo

$$F(a) = F(b), \tag{35·8}$$

můžeme na funkci $F(x)$ užíti věty I, podle které existuje uvnitř intervalu $[a, b]$ aspoň jedno číslo ξ takové, že

$$F'(\xi) = 0. \tag{35·9}$$

Dosadíme-li do (35·8) ze (35·6), dostaneme rovnici pro c, z které snadno vypočteme

$$c = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{35·10}$$

Ze (35·7), (35·9) a (35·10) plyne (35·5).

III. Pro $x = a$, pro $x = b$ a pro každé x uvnitř intervalu $[a, b]$ nechť má funkce $f(x)$ derivaci. Nechť je $f'(a) > 0$, $f'(b) < 0$. Pak existuje uvnitř intervalu $[a, b]$ aspoň jedno číslo ξ takové, že $f'(\xi) = 0$.

Důkaz je velmi podobný důkazu věty I. Podle věty IX z odst. 15 je $f(x)$ spojitá funkce v intervalu $[a, b]$, takže podle věty III z odst. 34 existuje v intervalu $[a, b]$ aspoň jedno číslo ξ takové, že

$$f(x) \leq f(\xi) \tag{35·11}$$

pro každé x z intervalu $[a, b]$. Leží-li ξ uvnitř $[a, b]$, dokáže se docela stejně jako v důkaze věty I, že $f'(\xi) = 0$. Tedy stačí dokázat, že nemůže býti ani $\xi = a$ ani $\xi = b$.

Kdyby bylo $\xi = a$, pak by podle (35·11) bylo

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqq 0$$

pro všecka $x \neq a$ z intervalu $[a, b]$. Protože $f'(a) > 0$, je to zřejmě nemožné. Kdyby bylo $\xi = b$, pak by podle (35·11) bylo

$$\frac{f(x) - f(b)}{x - b} \geqq 0$$

pro všecka $x \neq b$ z intervalu $[a, b]$. Protože $f'(b) < 0$, je to zřejmě nemožné.

IV. Nechť funkce $f(x)$ má uvnitř intervalu J všude derivaci. Nabude-li derivace $f'(x)$ uvnitř J hodnot b_1, b_2 a je-li $b_1 < d < b_2$, nabude $f'(x)$ uvnitř J také hodnoty d.

Podle předpokladu existuje uvnitř intervalu J interval $[a_1, a_2]$ takový, že je buďto

$$f'(a_1) = b_2,\ f'(a_2) = b_1 \tag{35·12}$$

nebo

$$f'(a_1) = b_1,\ f'(a_2) = b_2. \tag{35·13}$$

Platí-li (35·12), soudíme takto: Funkce $\varphi(x) = f(x) - d\,.\,x$ má derivaci pro $x = a_1$, pro $x = a_2$ i pro každé x uvnitř intervalu $[a_1, a_2]$; mimo to je

$$\varphi'(a_1) = f'(a_1) - d = b_2 - d > 0,$$
$$\varphi'(a_2) = f'(a_2) - d = b_1 - d < 0.$$

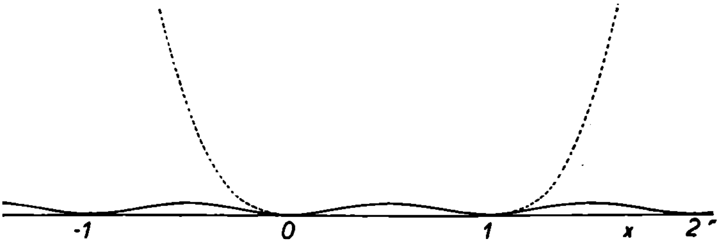
Tedy podle III existuje uvnitř $[a_1, a_2]$, tedy uvnitř J, aspoň jedno číslo ξ takové, že $0 = \varphi'(\xi) = f'(\xi) - d$, tedy $f'(\xi) = d$. Platí-li (35·13), soudíme stejně s tím rozdílem, že položíme $\varphi(x) = d\,.\,x - f(x)$.

Poznámka. Je-li derivace $f'(x)$ spojitou funkcí, je věta IV důsledkem věty II z odst. 35. Ale věta IV se nedá úplně převésti na onu větu, protože existují funkce $f(x)$, které mají všude derivaci, při čemž však tato derivace není všude spojitá.

Příklad takové funkce $f(x)$ si nyní udáme. Vyjdeme od funkce $\varphi(x) = x^2 (1 - x)^2$. Tato funkce je spojitá a má derivaci $\varphi'(x) = 2x (1 - x) (1 - 2x)$. Jest

$$\varphi(0) = \varphi(1) = 0,\ \varphi'(0) = \varphi'(1) = 0,$$
$$0 \leqq x \leqq 1 \Rightarrow 0 \leqq \varphi(x) < 1.$$

Nyní definujeme novou funkci $F(x)$ takto. V intervalu $[0, 1]$ budiž $F(x) = \varphi(x)$. Pro ostatní x budiž $F(x)$ definována tak, aby byla periodická s periodou 1, t. j. aby platila identita $F(x + 1) = F(x)$. Viz obr. 25, v kterém je graf funkce $F(x)$ vytažen plně a graf funkce $\varphi(x)$ vně intervalu $[0, 1]$ čárkovaně.



Obr. 25.

Funkce $F(x)$ má všude derivaci. Nyní definujeme funkci $f(x)$ takto: Jest $f(0) = 0$ a pro $x \neq 0$ je

$$f(x) = x^2 F\left(\frac{1}{x}\right).$$

Pak funkce $f(x)$ má všude derivaci; jest $f'(0) = 0$ a pro $x \neq 0$ je

$$f'(x) = 2x F\left(\frac{1}{x}\right) - F'\left(\frac{1}{x}\right).$$

Pro $x = 0$ není derivace $f'(x)$ spojitá. Podrobné důkazy učiněných tvrzení si čtenář snadno sestaví sám.

36. Důkaz existence integrálu. Než přistoupíme k vlastnímu předmětu tohoto odstavce, dokážeme si větu I, která nemá s pojmem integrálu nic společného, ale které potom užijeme na integrál. Věta I je přes svou jednoduchost ve vyšší matematice velmi užitečná, takže stojí za to, abychom si ji zde výslovně formulovali a podrobně dokázali, ač jí v této knížce užijeme pouze jednou.

I. Jsou-li dána čísla $a_1, a_2, a_3, \ldots$ taková, že

$$a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \ldots \tag{36·1}$$

a existuje-li číslo b, které je větší než všecka čísla a_n, pak existuje limita

$$\lim_{n \to \infty} a_n = c. \tag{36·2}$$

Všecka čísla a_n jsou v intervalu $[a_1, b]$. Na tento základní interval užijeme metody postupného půlení. Interval $J = [\alpha, \beta]$ obsažený v základním intervalu nazveme významným, lze-li mu přiřaditi index k tak, že a_n leží v J pro všecka $n > k$. Jsou-li (33·1) obě poloviny významného intervalu J, je buďto J^* nebo J^{**} významný interval. Ježto totiž J je významný, existuje index k takový, že a_n leží v J pro všecka $n > k$; když z těchto a_n žádné neleží v J^{**}, leží všecka v J^*, takže J^* je významný interval; když však existuje index $l > k$ takový, že a_l leží v J^{**}, následuje ze (36·1), že a_n leží v J^{**} pro všecka $n > l$, takže J^{**} je významný interval.

Tedy můžeme určit takový předpis pro půlení, že vyvolená polovina významného intervalu je zase významný interval. Budiž c kořen toho předpisu. Dokážeme, že platí (36·2). Budiž dáno číslo $\varepsilon > 0$. Máme dokázati, že existuje index k takový, že

$$n > k \Rightarrow |a_n - c| < \varepsilon. \tag{36·3}$$

Protože interval $J_0 = [a_1, b]$ je zřejmě významný, jsou všecky intervaly (33·2) významné. Zvolíme-li dosti veliký index m, bude délka intervalu J_m menší než ε. Protože J_m je významný interval, existuje index k takový, že a_n leží v J_m, pro všecka $n > k$. Protože také c leží v J_m a protože J_m má délku menší než ε, platí (36·3).

II. Budiž $f(x)$ spojitá funkce v intervalu $[a, b]$. Pak existuje integrál

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Máme dokázati, že existuje číslo c s touto vlastností: Každému

$\varepsilon > 0$ lze přiřaditi $\delta > 0$ tak, že $|S - c| < \varepsilon$ pro všecky vytvořující součty S s normou menší než δ.

Vyjdeme od vytvořujících součtů

$$S_1, S_2, S_3, \ldots, \tag{36·4}$$

které jsou takto definovány. Vytvořující součet S_n vznikne tak, že rozdělíme interval $[a, b]$ na 2^n stejných intervalů

$$\left[a, a + \frac{b - a}{2^n}\right], \quad \left[a + \frac{b - a}{2^n}, \quad a + 2 \, . \frac{b - a}{2^n}\right], \ldots,$$
$$\left[a + (2^n - 1) \frac{b - a}{2^n}, b\right] \tag{36·5}$$

a potom si v každém intervalu zvolíme číslo tak, aby hodnota funkce $f(x)$ v žádnem jiném čísle toho intervalu nebyla menší než hodnota ve zvoleném čísle; taková volba je možná podle věty IV z odst. 34. Tedy S_n je součet 2^n sčítanců, z nichž každý odpovídá jednomu z intervalů (36·5) a má tvar

$$f(\xi) \, . \frac{b - a}{2^n}, \tag{36·6}$$

kde ξ je číslo zvolené v příslušném intervalu (36·5) tak, že

$$f(x) \geqq f(\xi) \tag{36·7}$$

pro každé x z toho intervalu. Když od indexu n přejdeme k indexu $n + 1$, musíme nahraditi každý interval (36·5) dvěma intervaly, tedy každého sčítance (36·6) součtem dvou sčítanců

$$f(\xi') \, . \frac{b - a}{2^{n+1}} + f(\xi'') \, . \frac{b - a}{2^{n+1}}. \tag{36·8}$$

Podle (36·7) je

$$f(\xi') \geqq f(\xi), \; f(\xi'') \geqq f(\xi),$$

takže číslo (36·8) je větší než číslo (36·6) nebo je mu rovné. Protože nerovnosti je dovoleno sčítati, je $S_{n+1} \geqq S_n$ pro každé n.

Z věty III v odst. 34 následuje, že existuje číslo v takové, že $f(x) < v$ pro všecka x z intervalu $[a, b]$. Zřejmě je $S < v \, . \, (b - a)$ pro každý vytvořující součet S. Zejména je $S_n < \, < v \, (b - a)$ pro všecka n. Protože je $S_n \leqq S_{n+1}$ pro všecka n, plyne z I, že existuje číslo c takové, že

$$\lim_{n \to \infty} S_n = c. \tag{36·9}$$

Zbývá dokázati, že takto definované číslo c je integrálem funkce $f(x)$ od a do b, že tedy lze každému číslu $\varepsilon > 0$ přiřaditi číslo $\delta > 0$ tak, že

$$| S - c | < \varepsilon \tag{36·10}$$

pro všecky vytvořující součty S s normou menší než δ. Budiž tedy dáno číslo $\varepsilon > 0$. Zvolme číslo $\varepsilon_1 > 0$ tak, aby bylo

$$\varepsilon_1 + 2\varepsilon_1 (b - a) < \varepsilon. \tag{36·11}$$

Podle věty VI z odst. 34 existuje číslo $\delta_1 > 0$ takové, že $| f(z_1) - f(z_2) | < \varepsilon_1$, kdykoli z_1, z_2 jsou dvě čísla z intervalu $[a, b]$ taková, že $| z_1 - z_2 | < \delta_1$. Podle (36·9) existuje index k takový, že

$$n > k \Rightarrow | S_n - c | < \varepsilon_1.$$

Zvolme index n tak, aby předně bylo $n > k$, tedy

$$| S_n - c | < \varepsilon_1 \tag{36·12}$$

a aby za druhé bylo

$$\frac{b - a}{2^n} < \delta_1. \tag{36·13}$$

Zvolme kladné číslo δ menší než δ_1 a tak malé, že jsou-li y_1, y_2 dvě čísla z intervalu $[a, b]$ taková, že $| y_1 - y_2 | < \delta$, je mezi nimi nejvýš jedno z čísel

$$a + \frac{b - a}{2^n}, a + 2\,\frac{b - a}{2^n}, \ldots, a + (2^n - 1)\,\frac{b - a}{2^n}. \tag{36·14}$$

Budiž nyní S vytvořující součet s normou menší než δ. Tento součet přísluší jakýmsi intervalům

$$[\alpha_0, \alpha_1], [\alpha_1, \alpha_2], \ldots, [\alpha_{\mu-1}, \alpha_\mu], \tag{36·15}$$

které dohromady tvoří interval $[a, b]$. Délky intervalů (36·15) jsou vesměs menší než δ, a proto uvnitř každého z nich je nejvýš jedno z čísel (36·14). Vytvořující součet S vznikne, když si v každém z intervalů (36·15) zvolíme po jednom čísle. Označme S^* vytvořující součet, který přísluší týmž intervalům (36·15), ale je tvořen tak, že když uvnitř některého intervalu (36·15) je některé z čísel (36·14), užijeme právě tohoto čísla při tvoření součtu S^*. Je tedy

$$S = f(\xi_1) \,.\, (\alpha_1 - \alpha_0) + f(\xi_2) \,.\, (\alpha_2 - \alpha_1) + \ldots + f(\xi_\mu) \,.\, (\alpha_\mu - \alpha_{\mu-1}),$$
$$S^* = f(\xi^*_1) \,.\, (\alpha_1 - \alpha_0) + f(\xi^*_2) \,.\, (\alpha_2 - \alpha_1) + \ldots + f(\xi^*_\mu) \,.\, (\alpha_\mu - \alpha_{\mu-1}),$$

kde ξ_1 a ξ^*_1 jsou v intervalu $[\alpha_0, \alpha_1]$, ξ_2 a ξ^*_2 v intervalu $[\alpha_1, \alpha_2]$ atd. Protože délky intervalů (36·15) jsou menší než δ, tedy menší než δ_1, jsou čísla $|\xi_1 - \xi^*_1|$, $|\xi_2 - \xi^*_2|$ atd. menší než δ_1, takže čísla $|f(\xi_1) - f(\xi^*_1)|$, $|f(\xi_2) - f(\xi^*_2)|$ atd. jsou menší než ε_1. Proto je

$$|S - S^*| < \varepsilon_1 (b - a). \tag{36·16}$$

Nyní každý z těch intervalů (36·15), uvnitř něhož je jedno z čísel (36·14), rozdělme tímto číslem na dva menší intervaly. Tím vzniknou z intervalů (36·15) nové intervaly

$$[\beta_0, \beta_1], [\beta_1, \beta_2], \ldots, [\beta_{\nu-1}, \beta_\nu] \tag{36·17}$$

a je patrné, že vytvořující součet S^* se dá psáti ve tvaru

$$S^* = f(\eta_1)(\beta_1 - \beta_0) + f(\eta_2)(\beta_2 - \beta_1) + \ldots + f(\eta_\nu)(\beta_\nu - \beta_{\nu-1}),$$

kde η_1 je číslo z intervalu $[\beta_0, \beta_1]$, η_2 je číslo z intervalu $[\beta_1, \beta_2]$ atd. Na druhé straně je S_n vytvořující součet patřící intervalům

$$\left[a, a + \frac{b-a}{2^n}\right], \left[a + \frac{b-a}{2^n}, a + 2\frac{b-a}{2^n}\right], \ldots,$$
$$\left[a + (2^n - 1)\frac{b-a}{2^n}, b\right] \tag{36·18}$$

a každý interval (36·18) je patrně součet několika intervalů (36·17). Proto lze psáti S_n ve tvaru

$$S_n = f(\eta'_1)(\beta_1 - \beta_0) + f(\eta'_2)(\beta_2 - \beta_1) + \ldots + f(\eta'_\nu)(\beta_\nu - \beta_{\nu-1}),$$

při čemž η'_1 je číslo z toho intervalu (36·18), v kterém je obsažen interval $[\beta_0, \beta_1]$, η'_2 je číslo z toho intervalu (36·18), v kterém je obsažen interval $[\beta_1, \beta_2]$ atd. Čísla $|\eta_1 - \eta'_1|$, $|\eta_2 - \eta'_2|$ atd. jsou zřejmě nejvýš tak veliká, jaká je společná délka intervalů (36·18), takže podle (36·13) jsou všecka ta čísla menší než δ_1. Proto jsou čísla $|f(\eta_1) - f(\eta'_1)|$, $|f(\eta_2) - f(\eta'_2)|$ atd. menší než ε_1, takže

$$|S^* - S_n| < \varepsilon_1 (b - a). \tag{36·19}$$

Ze (36·11), (36·12), (36·16) a (36·19) plyne (36·10).

20·1. $3x^2 - 7$. **20·2.** $8x^3 - 18x$. **20·3.** $30x^9 - 30x^4 + 3x^2$.

20·4. $\dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$. **20·5.** $\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$. **20·6.** $\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$.

20·7. $30x^{29}$. **20·8.** $60x^{59}$. **20·9.** $100x^{99}$.

20·10. $-\dfrac{30}{x^{31}}$. **20·11.** $-\dfrac{60}{x^{61}}$. **20·12.** $-\dfrac{100}{x^{101}}$.

20·13. $2(x - 1)$. **20·14.** $3(1 + x)^2$. **20·15.** $-3(1 - x)^2$.

20·16. $-6(1 - 2x)^2$. **20·17.** $12(3x + 2)^3$. **20·18.** $20(5x - 2)^3$.

20·19. $\dfrac{x^2 - 1}{x^2}$. **20·20.** $\dfrac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}$. **20·21.** $-\dfrac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}$.

20·22. $8\dfrac{4 - x^2}{(4 + x^2)^2}$. **20·23.** $-\dfrac{36x}{(x^2 - 9)^2}$. **20·24.** $-\dfrac{3}{(2 - x)^2}$.

20·25. $-\dfrac{11}{(3x - 4)^2}$. **20·26.** $\dfrac{11}{(5x - 3)^2}$. **20·27.** $-\dfrac{x + 2}{(x - 2)^3}$.

20·28. $-\dfrac{(2 - x)^2(10 + x)}{(2 + x)^3}$. **20·29.** $\dfrac{4(x^2 - 4)}{(x^2 + 2x + 4)^2}$. **20·30.** $-\dfrac{12(x + 1)}{(x^2 + 2x - 5)^2}$.

20·31. $6x^2(x^3 - 1)$. **20·32.** $-6x(1 - x^2)^2$. **20·33.** $-9x^2(1 - x^3)^2$.

20·34. $\frac{1}{2}\sqrt{x}(7x^2 + 15x)$. **20·35.** $3(x^2 - 1)$. **20·36.** $3x(x + 2)$.

20·37. $\dfrac{2}{\sqrt{4x + 5}}$. **20·38.** $\dfrac{5}{2\sqrt{5x - 4}}$. **20·39.** $\dfrac{2}{3\sqrt[3]{(2x + 1)^2}}$.

20·40. $-\dfrac{2}{\sqrt{(4x + 5)^3}}$. **20·41.** $-\dfrac{5}{2\sqrt{(5x - 4)^3}}$. **20·42.** $\dfrac{2}{3\sqrt[3]{(1 - 2x)^4}}$.

20·43. $\dfrac{5x^4}{(1 - x)^6}$. **20·44.** $\dfrac{1 + x^2}{2\sqrt{x(1 - x^2)^3}}$. **20·45.** $-\dfrac{1}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})^2}$.

21·1. Jest $f'(x) = 3(x - 1)(x + 1)$. V intervalu $[-\infty, -1]$ funkce roste od $-\infty$ do hodnoty $f(-1) = 4$; v intervalu $[-1, 1]$ funkce klesá od hodnoty $f(-1) = 4$ do hodnoty $f(1) = 0$; v intervalu $[1, \infty]$ funkce roste od hodnoty $f(1) = 0$ do ∞.

21·2. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 10$ má derivaci $f'(x) = 6(x + 2)(x - 3)$, tedy roste v intervalu $[-\infty, -2]$ od $-\infty$ do $f(-2) = 54$, klesá v intervalu $[-2, 3]$ od 54 do $f(3) = -71$ a roste v intervalu $[3, \infty]$ od -71 do ∞. Tedy rovnice $f(x) = 0$ má tři kořeny, po jednom v každém z intervalů $[-\infty, -2]$, $[-2, 3]$, $[3, \infty]$. Jest $f(-4) = -22 < 0$, $f(-3) = 37 > 0$; $f(0) = 10 > 0$, $f(1) = -27 < 0$; $f(4) = -54 < 0$, $f(5) = 5 > 0$; proto kořeny leží v intervalech $[-4, -3]$, $[0, 1]$, $[4, 5]$.

21·3. Jest $f'(x) = 12x^2(x - 1)$. Funkce klesá v intervalu $[-\infty, 1]$ od ∞ do $f(1) = 0$ a roste v intervalu $[1, \infty]$ od 0 do ∞.

21·4. Jest $x^2 + 3x + 3 > 0$ pro všecka x, takže $f(x)$ je všude definována. Jest

$$f'(x) = \frac{4x^2 + 6x - 3}{(x^2 + 3x + 3)^2} = \frac{4(x - \alpha)(x - \beta)}{(x^2 + 3x + 3)^2},$$

kde

$$\alpha = -\frac{3 + \sqrt{21}}{4} \doteq -1{,}896, \qquad \beta = \frac{-3 + \sqrt{21}}{4} \doteq 0{,}396.$$

Funkce $f(x)$ roste v intervalu $[-\infty, \alpha]$ od $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ do

$$f(\alpha) = \frac{9 + 2\sqrt{21}}{3} \doteq 6{,}055,$$

klesá v intervalu $[\alpha, \beta]$ od $f(\alpha)$ do

$$f(\beta) = -\frac{2\sqrt{21} - 9}{3} \doteq 0{,}055$$

a roste v intervalu $[\beta, \infty]$ od $f(\beta)$ do $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1$.

21·5. Funkce $f(x)$ není definována pro $x = 1$ a pro $x = 3$. Jest

$$f'(x) = \frac{2x^3(6 - 5x)}{(x - 1)^2 (x - 3)^4}.$$

V intervalu $[-\infty, 0]$ funkce klesá od hodnoty $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ do hodnoty $f(0) = 0$, v intervalu $[0, 1]$ roste od 0 do ∞, v intervalu $[1, \frac{6}{5}]$ roste od $-\infty$ do $f(\frac{6}{5}) = -\frac{16}{9}$, v intervalu $[\frac{6}{5}, 3]$ klesá od $-\frac{16}{9}$ do $-\infty$, v intervalu $[3, \infty]$ klesá od ∞ do $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1$.

21·6. Jest
$$f'(x) = \frac{1 + 3x}{\sqrt{(1 + x^2)^3}}.$$
V intervalu $[-\infty, -\frac{1}{3}]$ funkce klesá od hodnoty $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$ do hodnoty $f(-\frac{1}{3}) = -\sqrt{10}$, v intervalu $[-\frac{1}{3}, \infty]$ roste od hodnoty $-\sqrt{10}$ do hodnoty $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1$.

21·7. Jest $f'(x) = 2n(x - \alpha)$, kde
$$\alpha = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n},$$
takže $f(x)$ klesá v intervalu $[-\infty, \alpha]$ a roste v intervalu $[\alpha, \infty]$.

21·8. $f(x)$ není definována pro $x = c$. Je-li $0 < c < 1$, je stále $f'(x) > 0$ a funkce $f(x)$ v intervalu $[-\infty, c]$ roste od $-\infty$ do ∞ a rovněž tak v intervalu $[c, \infty]$. Je-li $c < 0$ nebo $c > 1$, je $c(c - 1) > 0$ a
$$(x - c)^2 f'(x) = (x - \alpha)(x - \beta),$$
kde
$$\alpha = c - \sqrt{c(c - 1)}, \quad \beta = c + \sqrt{c(c - 1)},$$
takže $\alpha < c < \beta$. V intervalu $[-\infty, \alpha]$ funkce roste od $-\infty$ do hodnoty
$$f(\alpha) = 2c - 1 - 2\sqrt{c(c - 1)},$$
v intervalu $[\alpha, c]$ klesá od $f(\alpha)$ do $-\infty$, v intervalu $[c, \beta]$ klesá od ∞ do
$$f(\beta) = 2c - 1 + 2\sqrt{c(c - 1)},$$
v intervalu $[\beta, \infty]$ roste od $f(\beta)$ do ∞. Tedy $f(x)$ nabude všech hodnot, které neleží uvnitř intervalu $[f(\alpha), f(\beta)]$, jehož délka je $4\sqrt{c(c - 1)}$.

22·1. Jsou-li x, y rozměry obdélníka, c daný obsah, je $xy = c$ a délka úhlopříčky je
$$f(x) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + \frac{c^2}{x^2}}.$$
Proměnná x nabývá všech kladných hodnot. Funkce $f(x)$ nabude své nejmenší hodnoty pro $x = \sqrt{c}$; v tomto případě je $y = x$, t. j. obdélník s nejkratší úhlopříčkou je čtverec.

22·2. Je-li y základna a x výška obdélníka, c daný obvod, je
$$c = 2y + (2 + \tfrac{1}{2}\pi)\, x$$

a obsah je

$$f(x) = xy + \tfrac{1}{4}\pi x^2 = \tfrac{1}{2}x\,(c - 2x).$$

Proměnná x nabývá všech hodnot uvnitř intervalu

$$\left[0, \frac{2c}{\pi + 4}\right].$$

Funkce $f(x)$ nabude své největší hodnoty pro $x = \tfrac{1}{4}c$, čemuž odpovídá $y = \dfrac{4 - \pi}{16} \,.\, c$.

22·3. Znázorněme si prvou cestu osou x, druhou osou y, tedy křižovatku počátkem. Pohyb prvého auta nechť se při tomto znázornění jeví jako pohyb zleva doprava, pohyb druhého jako pohyb shora dolů. Nechť t znamená dobu v hodinách, při čemž $t = 0$ znamená dobu, kdy prvé auto projíždí křižovatkou, $t < 0$ dobu předtím, $t > 0$ dobu potom. Volíme-li 1 km za jednotku délky, je prvé auto znázorněno bodem $(x, 0)$ a druhé bodem $(0, y)$, kde

$$x = 60t, \quad y = 30 - 45t.$$

Vzdálenost aut je

$$f(t) = 15\sqrt{25t^2 - 12t + 4}.$$

Funkce $f(t)$ nabude své nejmenší hodnoty pro $t = \tfrac{6}{25}$, čemuž odpovídá

$$x = 14{,}4, \quad y = 19{,}2.$$

22·4. Jest $x + y = 40$, $f(x) = x^2 + y^2 = 2\,(x^2 - 40x + 800)$. Proměnná x nabývá všech hodnot uvnitř intervalu $[0, 40]$. Funkce $f(x)$ nabude své nejmenší hodnoty pro $x = 20$, čemuž odpovídá $y = 20$.

22·5. Jest $x - y = 100$, $f(x) = x^2 - 5y^2 = -4x^2 + 1000x - - 50\,000$. Proměnná x nabývá všech hodnot uvnitř intervalu $[100, \infty]$. Funkce $f(x)$ nabude své největší hodnoty pro $x = 125$, čemuž odpovídá $y = 25$.

22·6. Je-li x základna, y rameno, c daný obvod, je $x + 2y = c$ a obsah je $f(x) = \tfrac{1}{4}x\sqrt{c^2 - 2cx}$. Proměnná x nabývá všech hodnot uvnitř intervalu $[0, \tfrac{1}{2}c]$. Funkce $f(x)$ nabude své největší hodnoty pro $x = \tfrac{1}{3} \,.\, c$, čemuž odpovídá $y = x$.

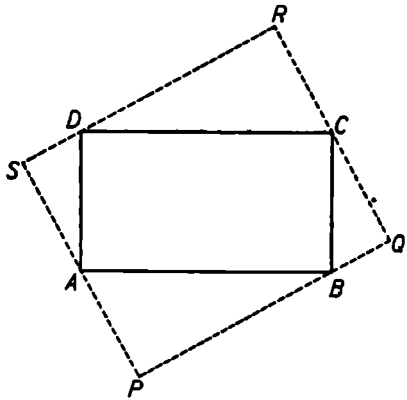
22·7. Je-li x základna, y výška obdélníka, je $x^2 + y^2 = 4r^2$ a obvod je $f(x) = 2\,(x + y) = 2\,[x + \sqrt{4r^2 - x^2}]$. Proměnná x nabývá všech hodnot uvnitř intervalu $[0, 2r]$. Funkce $f(x)$ nabude své největší hodnoty pro $x = r \,.\, \sqrt{2}$, čemuž odpovídá $y = r \,.\, \sqrt{2}$; to je případ čtverce. Příslušná hodnota obvodu je $r \,.\, 4\sqrt{2}$. Ostatní hodnoty obvodu vyplní vnitřek intervalu $[4r, r \,.\, 4\sqrt{2}]$.

22·8. V obr. 26 je $ABCD$ obdélník M, $PQRS$ proměnný obdélník. Budiž

$$\overline{AB} = \overline{CD} = a, \ \overline{AD} = \overline{BC} = b.$$

Z obrazce je patrno, že pravoúhlé trojúhelníky

$$APB, CRD \qquad (\alpha)$$



Obr. 26.

jsou shodné a rovněž pravoúhlé trojúhelníky

$$BQC, DSA; \qquad (\beta)$$

mimo to jsou trojúhelníky (α) podobné trojúhelníkům (β). Proto můžeme položiti

$$\overline{AP} = \overline{CR} = ax, \ \overline{BP} = \overline{DR} = ay,$$
$$\overline{BQ} = \overline{DS} = bx, \ \overline{CQ} = \overline{AS} = by.$$

Z Pythagorovy věty následuje $x^2 + y^2 = 1$. Obsah proměnného obdélníka je

$$f(x) = (ax + by)(bx + ay) = ab + (a^2 + b^2)\, x\sqrt{1 - x^2}.$$

Proměnná x nabývá všech hodnot uvnitř intervalu [0, 1]. Funkce $f(x)$ nabude své největší hodnoty pro $x = 1 : \sqrt{2}$. Tomu odpovídá $y = x$, takže $PQRS$ je čtverec.

22·9. Budiž r poloměr koule, x poloměr podstavy válce, $2y$ výška válce, takže $x^2 + y^2 = r^2$. Objem válce je $f(x) = 2\pi x^2 y = 2\pi x^2\sqrt{r^2 - x^2}$. Proměnná x nabývá všech hodnot uvnitř intervalu $[0, r]$. Funkce $f(x)$ nabude své největší hodnoty pro

$$x = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,.\,r,$$

čemuž odpovídá

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}\,.\,\frac{4}{3}\pi r^3 \doteq 0{,}5773\,.\,\frac{4}{3}\pi r^3.$$

22·10. Budiž x poloměr podstavy, y výška, c daný povrch, takže $c = 2\pi x\,(x + y)$. Objem je

$$f(x) = \pi x^2 y = \tfrac{1}{2}cx - \pi x^3.$$

Proměnná x nabývá všech hodnot uvnitř intervalu $\left[0, \sqrt{\frac{c}{2\pi}}\right]$. Funkce $f(x)$ nabude své největší hodnoty pro $x = \sqrt{\frac{c}{6\pi}}$, čemuž odpovídá $y = 2x$.

22·11. Při stejném označení jako ve **22·9** je plášť $f(x) = 4\pi x\sqrt{r^2 - x^2}$. Funkce $f(x)$ nabude své největší hodnoty pro $x = \dfrac{r}{\sqrt{2}}$, čemuž odpovídá $y = x$.

22·12. Budiž a, b základna a výška daného trojúhelníka, dále u, v základna a výška obdélníka. Volíme-li odvěsny trojúhelníka za osy souřadné soustavy, má přímka, na které leží přepona, rovnici tvaru $y = kx + l$, kde konstanty k, l určíme odtud, že body $(a, 0)$, $(0, b)$ leží na přímce, takže rovnice přímky je $bx + ay = ab$. Této rovnici musí vyhovovati bod (u, v), takže $bu + av = ab$. Obsah obdélníka je $f(u) = uv = ba^{-1}\,.\,u\,(a - u)$, obvod je $\varphi(u) = 2\,(u + v) = 2a^{-1}\,.\,[(a - b)\,u + ab]$. Proměnná u nabývá všech hodnot uvnitř intervalu $[0, a]$. Funkce $f(u)$ nabude své největší hodnoty pro $u = \frac{1}{2}a$; jest

$$f(\tfrac{1}{2}a) = \tfrac{1}{4}ab.$$

Naproti tomu $\varphi(u)$ stále roste (je-li $a > b$) nebo stále klesá (je-li $a < b$) a nemá tedy ani největší ani nejmenší hodnoty; je-li $a = b$, je $\varphi(u)$ konstanta.

22·13. Podle (22·4) a (22·5) je

$$f(t) = \overline{PQ} = \frac{b + at}{t}\sqrt{1 + t^2}.$$

Proměnná t nabývá všech kladných hodnot. Funkce $f(t)$ nabude své nejmenší hodnoty pro $t = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$; jest

$$f\left(\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right) = (a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}.$$

22·14. Jsou-li x, y délky odvěsen, c daný obsah, tedy $xy = 2c$, je obvod

$$f(x) = x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\sqrt{x^4 + 4c^2} + x^2 + 2c}{x}.$$

Proměnná x nabývá všech kladných hodnot. Funkce $f(x)$ nabude své nejmenší hodnoty pro $x = \sqrt{2c}$, čemuž odpovídá $y = x$.

22·15. Je-li x strana čtverců, je objem

$$f(x) = (60 - 2x)(28 - 2x)\,x.$$

Proměnná x nabývá všech hodnot uvnitř intervalu $[0, 14]$ Funkce $f(x)$ nabude své největší hodnoty pro $x = 6$, čemuž odpovídá objem 4,608 dm³.

22·16. Je-li a vzdálenost světelných zdrojů, x vzdálenost osvětlovaného bodu od silnějšího zdroje, pak běží o funkci

$$f(x) = \frac{8}{x^2} + \frac{1}{(a - x)^2}.$$

Proměnná x nabývá všech hodnot uvnitř intervalu $[0, a]$. Funkce $f(x)$ nabude své nejmenší hodnoty pro $x = \frac{2}{3} \, . \, a$.

22·17. Je-li x délka kusu, který se má ohnouti do čtverce, je součet obsahů čtverce a kruhu

$$f(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{(a - x)^2}{4\pi}.$$

Proměnná x nabývá všech hodnot uvnitř intervalu $[0, a]$. Funkce $f(x)$ nabude své nejmenší hodnoty pro $x = \frac{4a}{\pi + 4}$.

Jest

$$\frac{4b}{\pi + 4} \doteq 0{,}56 \, . \, a, \qquad a - \frac{4a}{\pi + 4} \doteq 0{,}44 \, . \, a.$$

27·1. Obsah $20\frac{1}{4}$; objem $312\frac{4}{7} \, . \, \pi$.

27·2. Obsah 192; objem 864π.

27·3. Obsah 34; objem $678\frac{1}{56} \cdot \pi$.

27·4. Obsah $\frac{3}{8}\sqrt{3}$; objem $\frac{3}{16}\pi$.

27·5. Obsah $20\frac{5}{6}$; objem $104\frac{1}{6} \cdot \pi$.

27·6. Obsah $\frac{3}{4}$; objem $\frac{9}{16}\pi$.

27·7. Obsah 12; objem 52π.

27·8. $10\frac{2}{3}$. **27·9.** $\frac{1}{6}$. **27·10.** $\frac{4}{15}$.

27·11. Délka $10\frac{7}{8}$; povrch $118\frac{23}{64} \cdot \pi$.

27·12. Délka $2\frac{1}{16}$; povrch $4\frac{155}{256} \cdot \pi$.

27·13. Délka $2 \cdot \sqrt{3}$; povrch 3π.

OBSAH