Václav A. Hruška

Remarque sur la note de M. Jiří Seitz dans le no 4, 1950, p. 137 des «Aktuárské Vědy».

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 1 (1951), No. 1, 3,4

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100009`

REMARQUE SUR LA NOTE DE M. JIŘÍ SEITZ DANS LE No 4, 1950, p. 137 DES „AKTUÁRSKÉ VĚDY".

VÁCLAV HRUŠKA, Praha.

(Reçu le 10 Juin 1950.)

Une démonstration simple de la formule (14), où la forme $\sum_2^n a'_{ik}x_ix_k$ provient de la forme $\sum_1^n a_{ik}x_ix_k$ par la substitution $c_1x_1 + \ldots + c_nx_n = 0$, $c_1 \neq 0$.

Dans sa note citée plus haut M. Seitz a déduit la condition nécessaire et suffisante, pourque la forme quadratique

$$A(x, x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k$$

soit une forme définie pour tout système de nombres réels $x_1, x_2, \ldots x_n$ vérifiant la relation linéaire

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = 0, \quad c_1 \neq 0.$$

Sa démonstration est fondée sur une formule fondamentale

$$\begin{vmatrix} a'_{22}, & a'_{23}, & \ldots & a'_{2r} \\ a'_{32}, & a'_{33}, & \ldots & a'_{3r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a'_{r2}, & a'_{r3}, & \ldots & a'_{rr} \end{vmatrix} = -\frac{1}{c_1^2} \begin{vmatrix} 0, & c_1, & c_2, & \ldots & c_r \\ c_1, & a_{11}, & a_{12}, & \ldots & a_{1r} \\ c_2, & a_{21}, & a_{22}, & \ldots & a_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_r, & a_{r1}, & a_{r2}, & \ldots & a_{rr} \end{vmatrix}, \tag{14}$$

où les a'_{ik} sont les coëfficients de la forme quadratique $\sum_{i,k=2}^{n} a'_{ik}x_ix_k$ que l'on obtient de $A(x,x)$ en y posant

$$x_1 = -\frac{1}{c_1}(c_2x_2 + \ldots + c_nx_n).$$

On peut démontrer la formule (14) de M. Seitz aussi de la manière suivante:

En vertu de $c_1 \neq 0$ écrivons la forme linéaire

$$L(x) = -x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = 0 \tag{1}$$

et la forme quadratique

$$A(x, x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_i x_k = a_{11}x_1^2 + x_1(a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n) + \\ + x_1(a_{21}x_2 + \ldots + a_{n1}x_n) + \sum_{i,k=2}^{n} a_{ik}x_i x_k. \tag{2}$$

Portons x_1 de (1) dans (2). Nous obtiendrons évidemment la forme

$$\begin{aligned} A(x, x) &= \sum_{i,k=2}^{n} (a_{11}c_i c_k + c_i a_{1k} + a_{i1}c_k + a_{ik})x_i x_k \\ &= \sum_{i,k=2}^{n} a'_{ik}x_i x_k, \end{aligned} \tag{3}$$

où

$$a'_{ik} = a_{11}c_i c_k + c_i a_{1k} + a_{i1}c_k + a_{ik}.$$

Alors, si l'on fait les opérations suivantes dans le déterminant

$$\begin{vmatrix} 0, & -1, & c_2, & \ldots & c_r \\ -1, & a_{11}, & a_{12}, & \ldots & a_{1r} \\ c_2, & a_{21}, & a_{22}, & \ldots & a_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_r, & a_{r1}, & a_{r2}, & \ldots & a_{rr} \end{vmatrix} \tag{4}$$

qui ne changent pas sa valeur:

a) addition du c_k-multiple de la 2ième colonne à la colonne commençant par c_k $(k = 2, 3, \ldots r)$;

b) addition du c_i-multiple de la 2ième ligne du *déterminant changé* à sa ligne commençant par c_i, on obtiendra bien la formule (14) de M. SEITZ

$$\begin{vmatrix} 0, & -1, & 0, & \ldots & 0 \\ -1, & a_{11}, & a'_{12}, & \ldots & a'_{1r} \\ 0, & a'_{21}, & a'_{22}, & \ldots & a'_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & a'_{r1}, & a'_{r2}, & \ldots & a'_{rr} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a'_{22}, & \ldots & a'_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{r2}, & \ldots & a'_{rr} \end{vmatrix},$$

où

$$\begin{aligned} a'_{1k} &= a_{1k} + c_k a_{11}, \quad a'_{i1} = a_{i1} + c_i a_{11}, \\ a'_{ik} &= a_{ik} + c_k a_{i1} + c_i a'_{1k} = \\ &= a_{ik} + c_k a_{i1} + c_i a_{1k} + c_i c_k a_{11} \end{aligned}$$

$i, k = 2, 3, \ldots, r.$

c'est-à-dire (3) c. q. f. d.

Evidemment, on pourrait démontrer de la même manière aussi les formules générales (24) etc. de M. SEITZ.