Peter Dénes

Über die Diophantische Gleichung $x^{np} + y^{np} = p^m \cdot z^{np}$

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 1 (1951), No. 3, 179–185

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100026`

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 1(76) 1951

ÜBER DIE DIOPHANTISCHE GLEICHUNG $x^{np} + y^{np} = p^m . z^{np}$.

PETER DÉNES, Budapest.

(Eingegangen den 13. Jänner 1951.)

Es sei p eine Primzahl, $n > 0$ ganz, $0 < m \neq 3$ ganz; dann hat (1) keine Lösung in ganzen x, y, z, wenn p eine irreguläre Primzahl ist, die den unten angeführten Bedingungen I, II genügt.

In einer früherer Arbeit habe ich bewiesen,[1]) daß die Gleichung

$$x^{np} + y^{np} = p^m . z^{np}, \quad xyz \neq 0, \tag{1}$$

in rationalen ganzen Zahlen x, y, z unlösbar ist, falls $p > 3$ eine reguläre Primzahl. m eine natürliche Zahl und n eine positive ganze Zahl ist. Auch gab ich meiner Vermutung Ausdruck, daß die Gleichung

$$x^t + y^t = t^m . z^t, \quad xyz \neq 0, \tag{2}$$

wo t und m natürliche Zahlen sind, $t > 3$, wahrscheinlich keine ganzzahlige Lösung x, y, z besitzt.

In der vorliegenden Arbeit werden wir die Unlösbarkeit der Gleichung (1) in rationalen ganzen, nicht verschwindenden Zahlen für gewisse irreguläre Primzahlen beweisen.

p bezeichnet eine irreguläre Primzahl, $\zeta = e^{2\pi i/p}$, $k(\zeta)$ den Körper der p-ten Einheitswurzel, $k(\zeta + \zeta^{-1})$ den reellen Unterkörper von $k(\zeta)$. $\lambda = 1 - \zeta$, $\mathfrak{l} = [\lambda]$, $\Lambda = (1 - \zeta)(1 - \zeta^{-1})$, $\mathfrak{L} = [\Lambda]$. Die Primzahl p erfülle die folgende Bedingungen:

I. Der zweite Faktor der Klassenzahl von $k(\zeta)$ ist prim zu p;

II. Keine der Bernoullischen Zahlen B_{rp} $\left(r = 1, 2, \ldots, \frac{p-3}{2}\right)$ ist durch p^3 teilbar.

Es gilt der folgende Satz:

Satz I. *Ist p eine irreguläre Primzahl, welche den Bedingungen I—II genügt und s eine natürliche Zahl, $s \geqq \frac{3p-1}{2}$, so ist eine Gleichung*

$$\xi^p + \eta^p = E_0 \Lambda^s \psi^p \tag{3}$$

[1]) *P. Dénes:* Monatshefte f. Math. **54** (1950), 175—182.

wo E_0 eine Einheit, ξ, η, ψ nicht verschwindende, zu $\mathfrak{L}$ prime Zahlen in $k(\zeta+\zeta^{-1})$ sind, unmöglich.

Beweis. Die Gleichung (3) kann bekanntlich in p Faktoren zerlegt werden:

$$\left.\begin{aligned} \xi+\eta &= \mathfrak{l}^{2s-p+1}\mathfrak{d}\mathfrak{j}_0^p \\ \xi+\eta\zeta^i &= \mathfrak{l}\mathfrak{d}\mathfrak{j}_i^p \quad (i=1,2\;\ldots,p-1), \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

wo $\mathfrak{d}$ den größten gemeinsamen Idealteiler der Zahlen ξ, η, bedeutet und $\mathfrak{j}_0, \mathfrak{j}_1, \ldots, \mathfrak{j}_{p-1}$ gewisse zu $\mathfrak{l}$ prime Ideale in $k(\zeta)$ sind. Wegen (4) bestehen also die Kongruenzen

$$\frac{\xi+\eta\zeta^i}{1-\zeta^i} \equiv -\eta \pmod{\mathfrak{l}^p} \quad (i=1,.2,\ldots,p-1). \tag{5}$$

Bedeuten i und k zwei Zahlen aus der Serie $1, 2, \ldots, p-1$ und a eine natürliche Zahl, $a \leqq p$, so ist

$$\left(\frac{\xi+\eta\zeta^i}{1-\zeta^i}\right)^a \left(\frac{\xi+\eta\zeta^k}{1-\zeta^k}\right)^{p-a} \equiv -\eta^p \equiv C \pmod{\mathfrak{l}^p}, \tag{6}$$

wo C eine rationale ganze Zahl ist. Aus (4) und (6) folgt, daß das Hauptideal

$$\mathfrak{j}_i^{ap}\mathfrak{j}_k^{(p-a)p}\mathfrak{d}^p \quad (i, k=1,2,\ldots,p-1)$$

einer primären Zahl in $k(\zeta)$ gleich ist. Nach VANDIVER [2]) ist ein Ideal von $k(\zeta)$, dessen p — te Potenz eine primäre Zahl ist, ein Hauptideal, falls der zweite Faktor der Klassenzahl von $k(\zeta)$ prim zu p ist (unsere Voraussetzung 1):

$$\mathfrak{j}_i^a\mathfrak{j}_k^{p-a}\mathfrak{d} \sim 1 \quad (i, k=1,2,\ldots,p-1). \tag{7}$$

Laut den Gleichungen (4) gelten ausserdem

$$\mathfrak{j}_k^{p-1}\mathfrak{d} \sim \mathfrak{j}_k^{-1} \quad (k=1,2,\ldots,p-1) \tag{8}$$

und wenn wir in (7) $a=1$ setzen, wird aus (7) und (8)

$$\mathfrak{j}_i \sim \mathfrak{j}_k \quad (i, k=1,2,\ldots,p-1). \tag{9}$$

Weiter ist

$$[\psi] = \mathfrak{d}\prod_{i=0}^{p-1}\mathfrak{j}_i \sim 1,$$

woraus wegen (9)

$$\mathfrak{d}\mathfrak{j}_0\mathfrak{j}_k^{p-1} \sim 1$$

folgt, also ist wegen (8)

$$\mathfrak{j}_0 \sim \mathfrak{j}_k \quad (k=1,2,\ldots,p-1). \tag{10}$$

---

[2]) *H. S. Vandiver:* Transactions Amer. Math. Soc. **31** (1929), 613—642, Lemma 1.

Wird nun k von 0, i und $p-i$ verschieden gewählt, so sind die Ideale

$$\frac{\mathfrak{j}_0}{\mathfrak{j}_k}, \frac{\mathfrak{j}_i}{\mathfrak{j}_k}, \frac{\mathfrak{j}_{p-i}}{\mathfrak{j}_k}.$$

Hauptideale und können durch Zahlen

$$\frac{\varrho_0}{\varrho_k}, \frac{\varrho_i}{\varrho_k}, \frac{\varrho_{p-i}}{\varrho_k}$$

des Körpers $k(\zeta)$ repräsentiert werden. Wir können aus (4) die folgenden Gleichungen

$$\frac{\xi+\eta}{\xi+\eta\zeta^k} = \beta_0\lambda^{2s-p}\frac{\varrho_0^p}{\varrho_k^p}$$

$$\frac{\xi+\eta\zeta^i}{\xi+\eta\zeta^k} = \beta_i\frac{\varrho_i^p}{\varrho_k^p}$$

$$\frac{\xi+\eta\zeta^{-i}}{\xi+\eta\zeta^k} = \beta_{p-i}\frac{\varrho_{p-i}^p}{\varrho_k^p}$$

bilden, wo β_0, β_i, β_{p-i} Einheiten in $k(\zeta)$ sind und aus welchen wir die Gleichung

$$\varrho_i^p - \vartheta_i\varrho_{p-i}^p = \vartheta_0\lambda^{2s-p}\varrho_0^p \tag{11}$$

gewinnen können. Hier bezeichnen ϑ_0, ϑ_i reelle Einheiten in $k(\zeta)$ und aus der ersten Gleichung von (4) können wir auch folgern, daß ϱ_0 reell ist.

Wir bilden durch die Substitution $s = \zeta:\zeta^{-1}$ die konjugierte Gleichung von (11):

$$\vartheta_i\varrho_i^p - \varrho_{p-i}^p = \vartheta_0\lambda^{2s-p}\varrho_0^p. \tag{12}$$

Dann ist es ersichtlich, daß nur $\vartheta_i = 1$ sein kann; es ist also:

$$\varrho_i^p - \varrho_{p-i}^p = \varepsilon_i'\lambda^{2s-p}\varrho_0^p \left(i = 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}\right), \tag{13}$$

in welchen ε_i' Einheiten von $k(\zeta)$ bedeuten.

Aus

$$\frac{\mathfrak{j}_i}{\mathfrak{j}_k} = \left[\frac{\varrho_i}{\varrho_k}\right] \quad (i, k = 0, 1, \ldots, p-1)$$

folgt

$$[\varrho_i] = \mathfrak{t}\mathfrak{j}_i \quad (i = 0, 1, \ldots, p-1), \tag{14}$$

wo $\mathfrak{t}$ ein Ideal in $k(\zeta)$ ist. Wird in (14) $i = 0$ gesetzt, so ist es ersichtlich, daß $\mathfrak{t}$ reell ist, weil ϱ_0 und $\mathfrak{j}_0$ ebenfalls reell sind. Die Gleichung (13) kann in die folgenden Faktoren zerlegt werden:

$$\left.\begin{aligned} \varrho_i - \varrho_{p-i} &= \mathfrak{j}^{2s-2p+1}\mathfrak{t}\,\mathfrak{g}_{i0}^p \\ \varrho_i - \varrho_{p-i}\zeta^k &= \mathfrak{l}\,.\,\mathfrak{t}\,.\,\mathfrak{g}_{ik}^p \quad (k = 1, 2, \ldots, p-1), \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

in welchen $\mathfrak{g}_{i0}, \ldots, \mathfrak{g}_{i,p-1}$ zu $\mathfrak{l}$ prime Ideale in $k(\zeta)$ sind.

Das Hauptideal $[\varrho_i - \varrho_{p-i}\zeta^k]$ $(k = 0, 1, \ldots, p-1)$ bleibt bei der Anwendung der Substitution $s = \zeta : \zeta^{-1}$ unverändert, also gehören die Ideale $\mathfrak{g}_{i0}, \ldots, \mathfrak{g}_{i,p-1}$ zum reellen Unterkörper $k(\zeta + \zeta^{-1})$. Aus (15) folgt ferner

$$\varrho_i - \varrho_{p-i} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{l}^{2s-2p+1}} \quad \left(i = 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}\right) \tag{16}$$

und

$$\frac{\varrho_i - \varrho_{p-i}\zeta^k}{\varrho_j - \varrho_{p-j}\zeta^k} = \frac{\mathfrak{g}_{ik}^p}{\mathfrak{g}_{jk}^p} \quad \begin{pmatrix} k = 1, 2, \ldots, p-1 \\ i, j = 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}, \; i \neq j \end{pmatrix}.$$

Da das Ideal $\dfrac{\mathfrak{g}_{ik}}{\mathfrak{g}_{jk}}$ reell und seine p-te Potenz Hauptideal ist, ist es wegen der Voraussetzung I. auch selbst ein Hauptideal:

$$\frac{\mathfrak{g}_{ik}}{\mathfrak{g}_{jk}} = \left[\frac{\gamma_{ik}}{\gamma_{jk}}\right] \quad \begin{pmatrix} k = 1, 2, \ldots, p-1 \\ i, j = 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}, \; i \neq j \end{pmatrix}.$$

Hiedurch wird für $k = 1$

$$\frac{\varrho_i - \varrho_{p-i}\zeta}{\varrho_j - \varrho_{p-j}\zeta} = \delta_{ij}\frac{\gamma_i^p}{\gamma_j^p},$$

δ_{ij} eine Einheit in $k(\zeta)$, woraus wegen (16)

$$\frac{\varrho_i}{\varrho_j} \equiv \frac{\varrho_{p-i}}{\varrho_{p-j}} \equiv \delta_{ij}\frac{\gamma_i^p}{\gamma_j^p} \pmod{\mathfrak{l}^{2s-2p}},$$

beziehungsweise

$$\frac{\sigma_i}{\sigma_j} = \frac{\varrho_i\varrho_{p-i}}{\varrho_j\varrho_{p-j}} \equiv \frac{\delta_i^*}{\delta_j^*}\frac{\gamma_i^{2p}}{\gamma_j^{2p}} \pmod{\mathfrak{l}^{2s-2p}} \quad \left(i, j = 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}, \; i \neq j\right) \tag{17}$$

folgt, wo δ_i^*, δ_j^* Einheiten des Körpers $k(\zeta)$ sind.

Es sollen nun aus den Gleichungen (4) die folgenden reellen Gleichungen gebildet werden:

$$\left.\begin{aligned} (\xi + \eta)^2 &= \mathfrak{L}^{2s-p+1}\mathfrak{d}^2\mathfrak{j}_0^{2p} \\ (\xi + \eta\zeta^i)(\xi + \eta\zeta^{-i}) &= \mathfrak{L}\mathfrak{d}^2\mathfrak{j}_i^p\mathfrak{j}_{p-i}^p \quad \left(i = 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Wird k von 0, i und $p-i$ verschieden gewählt, so sind laut (9) und (10) die Ideale

$$\frac{\mathfrak{j}_0^2}{\mathfrak{j}_k\mathfrak{j}_{p-k}},\ \frac{\mathfrak{j}_i\mathfrak{j}_{p-i}}{\mathfrak{j}_k\mathfrak{j}_{p-k}},\ \left(i=1,2,\ldots,\frac{p-1}{2}\right)\ i \neq k,$$

Hauptideale und können der Bezeichnung (17) nach durch die Zahlen

$$\left[\frac{\varrho_0^2}{\sigma_k}\right],\ \left[\frac{\sigma_i}{\sigma_k}\right]\ \left(i=1,2,\ldots,\frac{p-1}{2}\right)\ i \neq k$$

ersetzt werden. Damit erhalten wir aus (18)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\xi^2+2\xi\eta+\eta^2}{\xi^2+\xi\eta(\zeta^k+\zeta^{-k})+\eta^2} &= H_0\Lambda^{2s-p}\frac{\sigma_0^p}{\sigma_k^p} \\ \frac{\xi^2+\xi\eta(\zeta^i+\zeta^{-i})+\eta^2}{\xi^2+\xi\eta(\zeta^k+\zeta^{-k})+\eta^2} &= H_i\frac{\sigma_i^p}{\sigma_k^p}\ \left(i=1,2,\ldots,\frac{p-1}{2}\right)\ i\neq k, \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

wo $H_0, H_1, \ldots, H_{\frac{p-1}{2}}$ Einheiten in $k(\zeta+\zeta^{-1})$ sind. Eliminieren wir die Zahlen $\xi^2+\eta^2$ und $\xi\eta$ aus den ersten drei Gleichungen der Schar (19), so bekommen wir

$$\sigma_1^p + e_2\sigma_2^p = e_0\Lambda^{s'}\sigma_0^p. \tag{20}$$

In (20) sind e_0, e_2 Einheiten, $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ Zahlen des Körpers $k(\zeta+\zeta^{-1})$ und

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \varrho_0^2, \\ s' &= 2s-p > 2p. \end{aligned} \tag{21}$$

Nach (20) und (21) ist

$$e_2 \equiv -\frac{\sigma_1^p}{\sigma_2^p}\ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{l}^{2s-p}).$$

Andererseits gilt zufolge (17)

$$\frac{\sigma_1^p}{\sigma_2^p} \equiv \frac{\delta_1^{*p}}{\delta_2^{*p}}\cdot\frac{\gamma_1^{2p^2}}{\gamma_2^{2p^2}},\ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{l}^{2s-p+1}),$$

woraus sich wegen unserer Voraussetzung $p \geqq \frac{3p-1}{2}$

$$e_2 \equiv -\frac{\delta_1^{*p}}{\delta_2^{*p}}\cdot C^p\ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{l}^{2p-2})$$

ergibt, wo C eine rationale ganze Zahl ist. Die Einheit

$$e_2\frac{\delta_2^{*p}}{\delta_1^{*p}}$$

ist also nach einem Satze von VANDIVER [3]) die p-te Potenz einer Einheit in $k(\zeta)$, und so ist e_2 selbst eine volle p-te Potenz in $k(\zeta)$. Hierdurch wird (20)

$$\sigma_1^p + \sigma_2'^p = e_0 \Lambda^{s'} \sigma_0^p, \tag{22}$$

welcher Ausdruck dieselbe Form hat, wie die Gleichung (3). Wegen (21) erfüllt auch die Zahl s' die Voraussetzung $s' > \frac{3p-1}{2}$. Die Zahlen $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ sind numerische Faktoren der Zahl ψ und dementsprechend sind ihre Normen kleiner als $N(\psi)$. Die Fortsetzung der angewendeten Methode muss also entweder zu einem Widerspruch, oder zu einer Gleichung

$$\omega_1^p + \omega_2^p = \Theta \Lambda^t \omega_0^p \tag{23}$$

führen, $t > \frac{3p-1}{2}$, in welcher Θ, $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ alle Einheiten des Körpers $k(\zeta + \zeta^{-1})$ sind. In diesem Falle ist

$$\omega_1 + \omega_2 \zeta = \lambda \zeta^b \Theta_1,$$

wo Θ_1 eine Einheit in $k(\zeta + \zeta^{-1})$ und b eine rationale ganze Zahl ist. Die durch die Substitution $s = \zeta : \zeta^{-1}$ entspringende konjugierte Gleichung lautet:

$$\omega_1 + \omega_2 \zeta^{-1} = - \lambda \zeta^{-b-1} \Theta_1.$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man

$$(\omega_1 + \omega_2)(1 + \zeta) = \lambda(\zeta^b - \zeta^{-b}) \Theta_1,$$

woraus, da

$$\omega_1 + \omega_2 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{l}^p}$$

ist, sich

$$\zeta^b - \zeta^{-b} \equiv 0 \pmod{p}$$

ergibt, was aber unmöglich ist. Damit ist Satz 1 bewisen.

Satz 2. *Sind p eine irreguläre Primzahl, welche den Bedingungen I—II genügt, n eine positive ganze Zahl, m eine natürliche Zahl, $m \neq 3$, so ist die Gleichung*

$$x^{np} + y^{np} = p^m \,.\, z^{np}, \quad xyz \neq 0 \tag{1}$$

in rationalen ganzen Zahlen x, y, z unlösbar.

Beweis. Die Gleichung (1) kann auf die Form

$$X^p + Y^p = p^m \,.\, Z^p \tag{24}$$

gebracht werden. Ist $m = 0$, so bedeutet (24) den ersten Fall des letzten

---

[3]) *H. S. Vandiver*, loc. cit., Lemma 2. Vandiver wendet in der Kongruenz des Lemmas den Modul $\mathfrak{l}^{2p}$ an; im Beweise des Lemmas (s. Gleichung 3a) ist aber nur die Erfüllung der Kongruenz nach dem Modul $\mathfrak{l}^{2p-2}$ erfordert.

Fermatschen Satzes, welchen für Primzahlen p, die die Voraussetzung I. erfüllen, VANDIVER[4]) bewies.

Ist $m = 1$, so lautet die Gleichung (3)

$$\xi^p + \eta^p = E_0 \Lambda^{\frac{p-1}{2}} \psi^p,$$

welche jedoch offensichtlich unmöglich ist, da ξ, η reelle Zahlen bedeuten, also

$$\xi^p \equiv a \pmod{\mathfrak{L}^{\frac{p+1}{2}}}$$

$$\eta^p \equiv b \pmod{\mathfrak{L}^{\frac{p+1}{2}}}$$

gelten, wo a, b rationale ganze Zahlen sind. Besteht also

$$\xi^p + \eta^p \equiv 0 \pmod{\mathfrak{L}^{\frac{p-1}{2}}},$$

so muss auch

$$\xi^p + \eta^p \equiv 0 \pmod{\mathfrak{L}^{\frac{p+1}{2}}}$$

erfüllt sein.

Wenn $m = 2$ ist, dann hat die Gleichung (13) die Form

$$\varrho_i^p - \varrho_{p-i}^p = \varepsilon_i' \lambda^{p-2} \varrho_0^p. \tag{25}$$

Auch diese Gleichung ist unmöglich, da ϱ_i und ϱ_{p-i} durch Multiplikation mit einer Einheitswurzel semiprimär gemacht werden können und deswegen

$$\varrho_i^p - \varrho_{p-i}^p \equiv 0 \pmod{\mathfrak{l}^p}$$

ist. (25) könnte also nur bestehen. wenn ϱ_0 gegen Annahme durch $\mathfrak{l}$ teilbar wäre.

Ist endlich $m > 3$, so folgt der Beweis unmittelbar aus Satz 1.

---

[4]) *H. S. Vandiver:* Bull. Amer. Math. Soc. **40** (1934), 118—126.