

Czechoslovak Mathematical Journal

Ladislav Mišík

Об одном свойстве пространства полиномов, $\langle 0, 1 \rangle$

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 2 (1952), No. 3, 233,234–237

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/100047>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1952

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ПРОСТРАНСТВА ПОЛИНОМОВ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ НА ИНТЕРВАЛЕ $\langle 0,1 \rangle$.

ЛАДИСЛАВ МИШИК (Ladislav Mišík), Братислава.

(Поступило в редакцию 23/I 1952 г.)

(Посвящается профессору д-ру Юр. Гронцу к 70 дню его рождения.)

В некоторых топологических \mathcal{L} -группах, в которых не выполняется третья аксиома Куратовского о замкнутости замыкания, существуют некоторые плотные топологические \mathcal{L} -подгруппы, также не выполняющие этой аксиомы. В частности, пространство полиномов, определенных на интервале $\langle 0, 1 \rangle$, не выполняет аксиомы о замкнутости замыкания.

В настоящей работе доказывается, что в некоторых коммутативных \mathcal{L} -группах, не выполняющих третьей аксиомы Куратовского, некоторые плотные подгруппы, рассматриваемые как топологические \mathcal{L} -группы с относительной топологией, также не выполняют этой аксиомы. В частности, из этой теоремы следует, что пространство полиномов, определенных на интервале $\langle 0, 1 \rangle$, не выполняет третьей аксиомы Куратовского.

Согласно Д. ван Данцигу¹⁾ мы говорим, что \mathcal{L} -пространство²⁾ является топологической \mathcal{L} -группой, если каждой паре точек $x, y \in L$ поставлена в соответствие одна и только одна точка $z \in L$, называемая их суммой и обозначаемая через $z = x + y$, причем выполнены следующие условия:

1. $(x + y) + z = x + (y + z)$ для всех $x, y, z \in L$;
2. в L существует такая точка (обозначим ее через 0), что для любого $x \in L$ имеет место $x + 0 = x$;

¹⁾ Dantzig D. van: Zur topologischen Algebra, Math. Ann., **107** (1932), стр. 587—626.

²⁾ Множество L называется \mathcal{L} -пространством, если в нем определены сходящиеся последовательности, т. е. последовательности, которым поставлены в однозначное соответствие некоторые точки, называемые пределами; это соответствие таково, что выполняются две аксиомы сходимости Фреше и аксиома Урысона.

3. для каждой точки $x \in L$ в L существует такая точка (обозначим ее через $-x$), что имеет место $x + (-x) = 0$;

4. если последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к точке x и последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ к точке y , то и последовательность $\{x_n + y_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к $x + y$, и последовательность³⁾ $\{x_n - y_n\}_{n=1}^{\infty}$ к $x - y$.

Мы говорим, что топологическая \mathfrak{L} -группа L имеет свойство (d) для расстояния⁴⁾ $\delta(x, y)$, если в пространстве L можно определить $\delta(x, y)$, $x, y \in L$, так, что выполнено следующее условие:

(1) Если для последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ существует такая последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, сходящаяся к x в топологии (\mathfrak{L}), что последовательность $\{\delta(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к числу 0, то последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ также сходится к x в топологии (\mathfrak{L}).

Пусть A — некоторое подмножество \mathfrak{L} -пространства L . Тогда \bar{A} означает множество всех точек в L , являющихся пределами сходящихся последовательностей из множества A . Мы говорим, что \mathfrak{L} -пространство L выполняет третью аксиому Куратовского⁵⁾, если имеет место $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$ для любого подмножества A \mathfrak{L} -пространства L .

Пусть L -топологическая \mathfrak{L} -группа, имеющая свойство (d) для расстояния $\delta(x, y)$. Пусть P — подмножество L . Множество P называется плотным для $\delta(x, y)$ в L , если для каждого $x \in L$ и для каждого $\varepsilon > 0$ существует такая точка y в P , что $\delta(x, y) < \varepsilon$. Ясно, что множество P плотно в \mathfrak{L} -пространстве L , если оно плотно для $\delta(x, y)$ в топологической \mathfrak{L} -группе L . Если множество P плотно для $\delta(x, y)$ в топологической \mathfrak{L} -группе L , то легко доказать следующее утверждение: (2) Для каждой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_1, x_2, \dots \in L$, сходящейся к $x \in L$, существует последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, $y_1, y_2, \dots \in P$, сходящаяся к x и такая, что последовательность $\{\delta(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к числу 0.

Теорема. Пусть L — коммутативная⁶⁾ топологическая \mathfrak{L} -группа со свойством (d) для $\delta(x, y)$. Пусть L не выполняет третьей аксиомы Куратовского. Пусть P — подгруппа абстрактной группы L , плотной для $\delta(x, y)$ в L . Тогда подгруппа

³⁾ $x + (-y)$ мы обозначаем через $x - y$.

⁴⁾ Расстояние $\delta(x, y)$ выполняет в L аксиомы расстояния:

1. $\delta(x, y) \geq 0$, $\delta(x, y)$ равно 0 только в случае $x = y$; 2. $\delta(x, y) = \delta(y, x)$; 3. $\delta(x, y) \leq \delta(x, z) + \delta(z, y)$.

⁵⁾ Kuratowski C., Topologie I., Warszawa-Lwów 1933, стр. 15.

⁶⁾ Топологическая \mathfrak{L} -группа L называется коммутативной, если $x + y = y + x$ для всех $x, y \in L$.

P не выполняет третьей аксиомы Куратовского, если подгруппу рассматривать как топологическое пространство с относительной топологией.

Доказательство. Приведем прежде всего следующую теорему, доказанную Новаком и Мишиком⁷⁾:

Теорема. Если L — коммутативная топологическая \mathfrak{L} -группа, точки которой имеют в ней свойство⁸⁾ ρ , то L не выполняет третьей аксиомы Куратовского; наоборот, если L — коммутативная топологическая \mathfrak{L} -группа, не выполняющая третьей аксиомы Куратовского, то все ее точки имеют в L свойство ρ .

Из этой теоремы следует, что каждая точка коммутативной топологической \mathfrak{L} -группы L в L имеет свойство ρ . Тогда точка $0 \in P$ также имеет в L свойство ρ , т. е. существует такая двойная последовательность $\{x_{n,k}\}_{n,k=1}^{\infty}$, $x_{n,k} \in L$, $n, k = 1, 2, 3, \dots$, что последовательность $\{x_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к точке 0 для любого n и ни одна диагональная последовательность $\{x_{n_i, k_i}\}_{i=1}^{\infty}$, $n_1 < n_2 < \dots$, не сходится к точке 0.

Докажем теперь, что точка $0 \in P$ имеет в P свойство ρ .

Так P — подмножество \mathfrak{L} -пространства L плотное для $\delta(x, y)$ в L , то согласно (2) существует такая двойная последовательность $\{y_{n,k}\}_{n,k=1}^{\infty}$, $y_{n,k} \in P$, $n, k = 1, 2, 3, \dots$, что последовательность $\{y_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к точке 0 для каждого n и последовательность $\{\delta(x_{n,k}, y_{n,k})\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к числу 0 для любого n .

Отсюда следует, что из двойной последовательности $\{y_{n,k}\}_{n,k=1}^{\infty}$ можно выделить такую двойную последовательность $\{y_{n, k_s}\}_{n, s=1}^{\infty}$, что последовательность $\{y_{n, k_s}\}_{s=1}^{\infty}$ сходится к точке 0 для каждого n и последовательность $\{\delta(x_{n, k_s}, y_{n, k_s})\}_{s=1}^{\infty}$ сходится к числу 0 для любого n , причем $\delta(x_{n, k_s}, y_{n, k_s})$ все время $< \frac{1}{n}$ для $s = 1, 2, \dots$.

Нужно еще доказать, что ни одна диагональная последовательность $\{y_{n_i, k_{s_i}}\}_{i=1}^{\infty}$, $n_1 < n_2 < \dots$, не сходится к точке 0.

Предположим, наоборот, что диагональная последовательность $\{y_{n_i, k_{s_i}}\}_{i=1}^{\infty}$ сходится к точке 0. В таком случае, так

⁷⁾ Novák J. a Mišík L., O L -priestore spojitych funkcií, Matematicko-fyzikálny zborník SAVU, Bratislava, I., No 1 (1951), стр. 1—13.

⁸⁾ Мы говорим, что точка x имеет в \mathfrak{L} -пространстве L свойство ρ , если существует такая двойная последовательность $\{x_{n,k}\}_{n,k=1}^{\infty}$, $x_{n,k} \in L$, $n, k = 1, 2, 3, \dots$, что последовательность $\{x_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к x для любого n и ни одна последовательность $\{x_{n_i, k_i}\}_{i=1}^{\infty}$, $n_1 < n_2 < \dots$, (называемая диагональной) не сходится к x .

как последовательность $\{\delta(x_{ni,ksi}, y_{ni,ksi})\}_{i=1}^{\infty}$ сходится к числу 0, $\delta(x_{ni,ksi}, y_{ni,ksi})$ будет для любого i меньше $\frac{1}{n_i}$, и (диагональная) последовательность $\{x_{ni,ksi}\}_{i=1}^{\infty}$ должна по условию (1) сходиться к точке 0. Но это невозможно.

Итак, точка $0 \in P$ имеет в P свойство ρ .

Теперь мы будем рассматривать P как топологическое \mathfrak{L} -пространство с относительной топологией. Тогда P будет коммутативной топологической \mathfrak{L} -группой, так как оно является подгруппой абстрактной группы L , которая будет одновременно коммутативной топологической \mathfrak{L} -группой. В таком случае, так как в P существует точка, имеющая в нем свойство ρ , то все точки в P должны в нем иметь это свойство.

Но по приведенной теореме P не выполняет третьей аксиомы Куратовского. Этим доказана наша теорема.

Пусть теперь L_1 будет \mathfrak{L} -пространством непрерывных функций $f(x)$, определенных на интервале $\langle 0, 1 \rangle$ таким, что последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к функции $f(x)$ только тогда, когда последовательность чисел $\{f_n(a)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к числу $f(a)$ для любого $a \in \langle 0, 1 \rangle$. Относительно сложения функций L_1 является коммутативной топологической \mathfrak{L} -группой. Ясно, что L_1 имеет свойство (d) для расстояния $\delta(f, g) = \max_{x \in \langle 0, 1 \rangle} |f(x) - g(x)|$, так как это расстояние выполняет условие (1).

Пусть P_1 — пространство полиномов с рациональными коэффициентами, определенными на $\langle 0, 1 \rangle$. Ясно, что P_1 — подгруппа абстрактной группы L_1 ; из теоремы Вейерштрасса следует, что P_1 будет плотным для $\delta(f, g)$ в L_1 .

Однако, известно, что \mathfrak{L} -пространство L_1 не удовлетворяет третьей аксиоме Куратовского.⁹⁾ Итак, вследствие нашей теоремы пространство P_1 также не удовлетворяет третьей аксиоме Куратовского, если его рассматривать как топологическое пространство с относительной топологией.

Заметим, что по другой теореме, содержащейся в упомянутой уже работе¹⁰⁾ Новака и Мишика, характер¹¹⁾ каждого полинома будет несчетным, ибо каждый полином имеет в нем свойство ρ .

⁹⁾ Neubauer M., Sur l'espace des fonctions continues, Fund. Mathematicae, XXXI (1938), стр. 269—278.

¹⁰⁾ Мы имеем в виду следующую теорему: Если точка x в \mathfrak{L} -пространстве L имеет свойство ρ , то ее характер — несчетный, стр. 6.

¹¹⁾ Характером точки в топологическом пространстве называется наименьшая мощность полной системы окрестностей этой точки.

Добавим наконец, что П. Урысон¹²⁾ первый дал пример счетного топологического пространства с одной точкой несчетного характера. Э. Чех выдвинул проблему, существует ли счетное пространство, все точки которого имели бы несчетный характер. И. Новак¹³⁾ был первым, построившим такое пространство. Пространство полиномов с рациональными коэффициентами является естественным решением проблемы Э. Чеха.

Summary.

Concerning a property of the space of polynomials defined on the interval $\langle 0, 1 \rangle$.

LADISLAV MIŠÍK, Bratislava.

(Received January 23th, 1952.)

Let L be a commutative topological \mathfrak{L} -group, i. e. an Abelian group in which the topology has been introduced by means of two Fréchet's axioms of convergence satisfying the following condition: if $x_n \rightarrow x$ and $y_n \rightarrow y$, then $x_n \pm y_n \rightarrow x \pm y$. Let $\delta(x, y)$ be a metric function in the space L ; let $y_n \rightarrow x$ and $\delta(x_n, y_n) \rightarrow 0$ imply that $x_n \rightarrow x$. Let $P \subset L$ be a subgroup, which is dense in the group L as to the metric $\delta(x, y)$. If the space L fails to satisfy the Kuratowski's axiom of the closure $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, then the subgroup P — as a topological space immersed in L — fails to satisfy the axiom as well.

Let L_1 be \mathfrak{L} -group of all continuous real-valued functions defined on the interval $\langle 0, 1 \rangle$ with the metric $\delta(f, g) = \max|f(x) - g(x)|$ and satisfying the condition mentioned above. It is well known, that in L_1 there are sets whose closures are not closed. As the group P_1 of all polynomials defined on $\langle 0, 1 \rangle$ with rational coefficients is dense in L_1 , the space P_1 does not satisfy the axiom of the closure. From this it follows according to a theorem of Novák-Mišík, that the character of every point of the countable space P_1 is uncountable.

¹²⁾ Uryson P., Über die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen, Math. Ann., **94**, стр. 288.

¹³⁾ Novák J., Spočetný ARU-prostor, jenž neobsahuje žádný bod spočetnosti, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, **67** (1938), стр. 97—99.