

Czechoslovak Mathematical Journal

Jiří Nedoma

Замечание о сходимости последовательности мер

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 2 (1952), No. 3, 239–242

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/100048>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1952

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ЗАМЕЧАНИЕ О СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ МЕР

ИРЖИ НЕДОМА (Jiří Nedoma), Прага.

(Поступило в редакцию 31/I 1952 г.)

В статье устанавливается необходимое и достаточное условие существования неравномерно сходящейся последовательности мер.

Непустая система подмножеств данного пространства P , замкнутая относительно конечной суммы и разности, называется кольцом. Кольцо, замкнутое относительно счетной суммы, будет σ -кольцом. Пересечение всех σ -колец, содержащих данное кольцо \mathbf{A} , является минимальным σ -кольцом над \mathbf{A} . Конечную σ -аддитивную неотрицательную функцию, определенную на данном кольце, мы назовем мерой. Пусть на σ -кольце \mathbf{A} в пространстве P определена последовательность мер $\mathfrak{M} = \{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ и для каждого $A \in \mathbf{A}$ имеет место $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A) = \mu_0(A)$. Тогда последовательность \mathfrak{M} является сходящейся на \mathbf{A} . Пусть $\alpha(\mathfrak{M}) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\sup_{A \in \mathbf{A}} |\mu_n(A) - \mu_0(A)|]$. \mathfrak{M} сходится равномерно, если $\alpha(\mathfrak{M}) = 0$; неравномерно, если \mathfrak{M} сходится и имеет место $\alpha(\mathfrak{M}) > 0$. Мера μ , не равную тождественно нулю на σ -кольце \mathbf{A} , назовем неатомической, если из $A \in \mathbf{A}$, $\mu(A) > 0$ вытекает существование множества $B \subset A$, $B \in \mathbf{A}$ такого, что $0 < \mu(B) < \mu(A)$.

Теорема: На σ -кольце \mathbf{A} в пространстве P существует неравномерно сходящаяся последовательность мер тогда и только тогда, когда на \mathbf{A} существует неатомическая мера.

Доказательство: 1. Пусть на \mathbf{A} существует неравномерно сходящаяся последовательность мер $\mathfrak{M} = \{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$, пределом которой является мера μ_0 . Тогда существует последовательность $\mathfrak{A} = \{A_i\}_{i=1}^{\infty}$, $A_i \in \mathbf{A}$, $i = 1, 2, 3, \dots$ и последовательность индексов $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ так, что

$$|\mu_{n_i}(A_i) - \mu_0(A_i)| > \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < \alpha(\mathfrak{M}).$$

Пусть последовательность \mathfrak{A} фиксирована и A_i будет означать до конца первой части доказательства члены последовательности \mathfrak{A} . Положим

$$A^0 = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i - A; \quad A^1 = A$$

для $A \in \mathfrak{A}$. Множества $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^{a_i}$, где $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность нулей и единиц, назовем атомами. Пусть C — система всех атомов, \mathbf{C} — система всех сумм атомов. Положим $\mathbf{B} = \mathbf{A} \cap (\mathbf{C} \cup \emptyset)$ и определим меры $\mu_i^{\mathbf{B}}$ так, что $\mu_i^{\mathbf{B}}(A) = \mu_i(A)$ для $A \in \mathbf{B}$, $i = 0, 1, 2, \dots$. Множество всех атомов, имеющих положительную меру $\mu_0^{\mathbf{B}}$, обозначим через D . Определим теперь

$$\left. \begin{aligned} \nu_i^{\mathbf{B}}(A) &= \mu_i^{\mathbf{B}}(A \cap (\bigcup C - \bigcup D)) \\ \bar{\nu}_i^{\mathbf{B}}(A) &= \mu_i^{\mathbf{B}}(A \cap \bigcup D) \end{aligned} \right\} A \in \mathbf{B}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Так как D — счетная система, $\{\bar{\nu}_i^{\mathbf{B}}\}$ сходится на $\mathbf{B} \cap (\bigcup D)$ равномерно. Для конечных D это очевидно. Если D — счетное бесконечное множество, расположим элементы D в последовательности $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$. Для $\varepsilon > 0$ существуют натуральные числа M и N такие, что одновременно имеют место соотношения:

$$\text{а) } \sum_{j=M}^{\infty} \bar{\nu}_0^{\mathbf{B}}(x_j) < \varepsilon;$$

$$\text{б) } |\bar{\nu}_j^{\mathbf{B}}(x_j) - \bar{\nu}_0^{\mathbf{B}}(x_j)| < \frac{\varepsilon}{M} \text{ для } j < M, \quad i > N;$$

$$\text{в) } \left| \sum_{j=M}^{\infty} \bar{\nu}_j^{\mathbf{B}}(x_j) - \sum_{j=M}^{\infty} \bar{\nu}_0^{\mathbf{B}}(x_j) \right| < \varepsilon \text{ для } i > N.$$

Имеем $A = E \cup F$, где $E = \bigcup_{j \in \mathfrak{N}_1^A} x_j$, $F = \bigcup_{j \in \mathfrak{N}_2^A} x_j$ и

$$\mathfrak{N}_1^A \subset \{1, 2, \dots, M-1\}, \quad \mathfrak{N}_2^A \subset \{M, M+1, M+2, \dots\}.$$

Из (б) следует $|\bar{\nu}_i^{\mathbf{B}}(E) - \bar{\nu}_0^{\mathbf{B}}(E)| < \varepsilon$ для $i > N$, из (а) и (в) следует $\bar{\nu}_i^{\mathbf{B}}(F) < 2\varepsilon$ для $i > N$, наконец из (а) получаем $\bar{\nu}_0^{\mathbf{B}}(F) < \varepsilon$, так что в общей сложности $|\bar{\nu}_i^{\mathbf{B}}(F) - \bar{\nu}_0^{\mathbf{B}}(F)| < 2\varepsilon$ для $i > N$ и из $|\bar{\nu}_i^{\mathbf{B}}(A) - \bar{\nu}_0^{\mathbf{B}}(A)| \leq |\bar{\nu}_i^{\mathbf{B}}(E) - \bar{\nu}_0^{\mathbf{B}}(E)| + |\bar{\nu}_i^{\mathbf{B}}(F) - \bar{\nu}_0^{\mathbf{B}}(F)|$ и предыдущих неравенств вытекает $|\bar{\nu}_i^{\mathbf{B}}(A) - \bar{\nu}_0^{\mathbf{B}}(A)| < 3\varepsilon$ для $i > N$ независимо от A . Из равномерной сходимости последовательности $\{\bar{\nu}_i^{\mathbf{B}}\}$ на $\mathbf{B} \cap (\bigcup D)$ следует равномерная сходимость этой последовательности на \mathbf{B} . Так как $\{\mu_n^{\mathbf{B}}\}_{n=0}^{\infty}$ сходится неравномерно и $\mu_i^{\mathbf{B}}(A) = \nu_i^{\mathbf{B}}(A) + \bar{\nu}_i^{\mathbf{B}}(A)$, $A \in \mathbf{B}$, $i = 0, 1, 2, \dots$, то и $\{\nu_i^{\mathbf{B}}\}$ сходится неравномерно, а следовательно и последова-

тельность мер $\mathfrak{M} = \{\nu_i\}$, где $\nu_i(A) = \mu_i[A \cap (\cup C - \cup D)]$, $A \in \mathbf{A}$, $i = 0, 1, 2, \dots$, сходится неравномерно. ν_0 , будучи пределом неравномерно сходящейся последовательности, не равна тождественно нулю. В самом деле, предположим, что $\alpha(\mathfrak{M}) > 0$, $\nu_0(A) = 0$ для $A \in \mathbf{A}$. Пусть α — положительное число, $\alpha < \alpha(\mathfrak{M})$. Тогда существует последовательность $\{B_j\}_{j=1}^{\infty}$, $B_j \in \mathbf{A}$ такая, что $|\nu_{n_j}(B_j) - \nu_0(B_j)| > \frac{1}{2}\alpha$ и из $\nu_0(B_j) = 0$ следует

$\nu_{n_j}(B_j) > \frac{1}{2}\alpha$, откуда $\nu_{n_j}(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j) > \frac{1}{2}\alpha$, $j = 1, 2, 3, \dots$, так что мера $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_j$ не сходится к $\nu_0(\bigcup B_j) = 0$. ν_0 не является атомической мерой — в противном случае существовало бы множество

$A \in \mathbf{A}$ такое, что $\nu_0(A) > 0$ и из $B \subset A$ следует, что или $\nu_0(B) = 0$ или $\nu_0(B) = \nu_0(A)$. Пользуясь методом математической индукции, легко доказать существование последовательности $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$,

$a_i = 0, 1$ такой, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_0(A \cap \bigcap_{i=1}^n A_i) = \nu_0(A) > 0$, что невозможно, так как по определению ν_0 имеет место $\nu_0(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = 0$.

2. Пусть на σ -кольце \mathbf{A} существует неатомическая мера ν . Выберем $A_0 \in \mathbf{A}$ так, чтобы $\nu(A_0) > 0$. Образует меру $\mu(A) =$

$$= \frac{\nu(A_0 \cap A)}{\nu(A_0)} \text{ для } A \in \mathbf{A}. \text{ Мера } \mu \text{ точно так же будет неатоми-}$$

ческой, поэтому существует $I_0 \in \mathbf{A}$, $I_0 \subset A_0$ так, что $\mu(I_0) = \frac{1}{2}$. Положим $I_1 = A_0 - I_0$ и определим множества I_{i_1, \dots, i_n} для $n = 2, 3, \dots$ и $i_k = 0, 1$ так:

$$I_{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, 0} \subset I_{i_1, \dots, i_{n-1}}; \mu(I_{i_1, \dots, i_{n-1}, 0}) = \frac{1}{2^n}$$

$$I_{i_1, \dots, i_{n-1}, 1} = I_{i_1, \dots, i_{n-1}} - I_{i_1, \dots, i_{n-1}, 0}.$$

Систему всех множеств I_{i_1, \dots, i_n} обозначим через I . Пусть \mathbf{B} — кольцо, содержащее все суммы элементов I и пустое множество. Определим последовательность множеств $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ и мер $\mathfrak{M} = \{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ на кольце следующим образом:

$$A_n = \bigcup_{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}} I_{i_1, \dots, i_{n-1}, 0};$$

$$\mu_n(B) = 2\mu(B \cap A_n); B \in \mathbf{B}, n = 1, 2, 3, \dots$$

$\mu_n(B)$ стремится к $\mu(B)$ для $B \in \mathbf{B}$, как явствует из определения кольца \mathbf{B} и последовательности мер. Образует минимальное σ -кольцо $\sigma(\mathbf{B})$ над \mathbf{B} . Тогда для каждой $F \in \sigma(\mathbf{B})$ и для $\varepsilon > 0$ существует $B \in \mathbf{B}$ такое, что $\mu(B \triangle F) < \frac{1}{2}\varepsilon$; отсюда следует $\mu_n(B \triangle F) < \varepsilon$. Из $\mu_n(B) \rightarrow \mu(B)$ вытекает поэтому $\mu_n(F) \rightarrow$

$\rightarrow \mu(F)$ для $F \in \sigma(\mathbf{B})$. Положим $\nu_A(B) = \mu(A \cap B)$ для $B \in \sigma(\mathbf{B})$. По теореме Радона-Никодима существует функция точки $f_A(x)$, определенная на A_0 таким образом, что $\nu_A(B) = \int_B f_A(x) d\mu$ для $B \in \sigma(\mathbf{B})$. Так как $0 \leq \nu_A(B) \leq \mu(B)$ для $B \in \sigma(\mathbf{B})$, то имеет место $0 \leq f_A(x) \leq 1$ везде на A_0 кроме множества меры μ нуль. Так как

$$\mathbf{A}(A) = \mu(A \cap A_0) = \nu_A(A_0)$$

будет

$$\mu_n(A) = 2\mu(A_n \cap A) = 2\nu_A(A_n) = 2 \int_{A_n} f_A(x) d\mu = \int_{A_n} f_A(x) d\mu_n$$

для $n = 1, 2, 3, \dots$

откуда $\{\mu_n(A)\}_{n=1}^{\infty} = \{\int_A f_A(x) d\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$, а так как $f_A(x)$ ограничена, из сходимости последовательности $\{\mu_n\}$ на $\sigma(\mathbf{B})$ следует сходимость последовательности интегралов, а отсюда и сходимость последовательности мер $\mathfrak{M} = \{\mu_n(A)\}_{n=1}^{\infty}$ для $A \in \mathbf{A}$. Имеем $\alpha(\mathfrak{M}) \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\mu_n(A) - \mu(A)| = \frac{1}{2} > 0$ и, следовательно, сходимость не будет равномерной.

*Научно-исследовательский институт
техники связи им. А. С. Попова.*

Summary.

Convergence of Sequences of Measures.

JIŘÍ NEDOMA, PRAHA.

(Received January 31th, 1952.)

Let P be an abstract space. A non-void system \mathbf{A} of its point sets will be called a σ -field in P , if the union of every countable subsystem and the difference of every two elements of \mathbf{A} belongs to \mathbf{A} again. By a measure we mean every non-negative finite and σ -additive function $\mu(A)$ defined on \mathbf{A} . A measure μ such that $\mu(A) \neq 0$ for at least one $A \in \mathbf{A}$, is called non atomic if for every $A \in \mathbf{A}$ such that $\mu(A) \neq 0$, there exists a set $B \subset A$, $B \in \mathbf{A}$ such that $0 < \mu(B) < \mu(A)$. There is a question (A. Špaček): Which is the necessary and sufficient condition for the uniform convergence $\mu_n(A) \rightarrow \mu(A)$ where μ_n and μ denote measures on \mathbf{A} ?

In the present article this problem is solved like this: Let \mathbf{A} be a σ -field in the abstract space P . Then the existence of the non-uniform convergence of the sequence $\{\mu_n\}$ of measures on \mathbf{A} to a measure μ on \mathbf{A} is equivalent to the existence of a non-atomic measure on \mathbf{A} .