Чехословацкий математический журнал, т. 3 (78) 1953

О ПОЛНОТЕ ПОЛИНОМОВ ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПУАСОНА

ВАЦЛАВ АЛДА (Václav Alda), Прага.

(Поступило в редакцию 12/VIII 1952 г.)

В этой заметке изложено короткое доказательство полноты полиномов в пространстве $l^{(2)}$, принадлежащем к распределению Пуасона. Доказательство можно также получить с помощью преобразования Фуриера, но изложенное здесь доказательство совершенно простое.

Лемма 1. Пусть $\lambda > 0$ и далее

$$\alpha_n = (n!)^{-2}(n+1)^{2n}\lambda^{n+1}[(n+1)!]^{-1}.$$

Потом $\Sigma_n\alpha_n < +\infty$.

Доказательство.

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \left(\frac{n!}{(n+1)!}\right)^2 \cdot \frac{(n+2)^{2n+2}}{(n+1)^{2n}} \cdot \lambda \cdot \frac{(n+1)!}{(n+2)!}$$

$$= (n+1)^{-2}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{2n}(n+2)^2\lambda(n+2)^{-1}$$

$$\leqq e^2\lambda(n+1)^{-2}(n+2) \to 0 \quad \text{дла } n \to \infty$$

и по известному критерию $\Sigma_n\alpha_n < \infty$.

Лемма 2. Пусть $\lambda > 0$ и

$$\sigma_n = (n!)^{-2}\sum_{x>n} x^{2n}\lambda^x(x!)^{-1}.$$

Существует $C = C(\lambda) < \infty$, так что $\sigma_n \leqq C$ для всякого n.

Доказательство. Обозначим $N = [2e^2\lambda] + 1$ и $C = \operatorname*{Max}_{n\leqq N}\sigma_n + \Sigma_n\alpha_n$. По лемме 1 — $C < \infty$.

Для $n \leqq N$ мы имеем

$$\sigma_n \leqq \operatorname*{Max}_{n\leqq N}\sigma_n + \sum_{p\leqq n}\alpha_p. \tag{1}$$

Докажем, что (1) справедливо также для $n > N$.

Пишем

$$\sigma_{n-1} = \sum_{j=1}^{\infty}u_j, \quad \sigma_n = \alpha_n + \sum_{j=1}^{\infty}v_j,$$

где

$$u_j = ((n-1)!)^{-2}\,(n-1+j)^{2n-2}\,\lambda^{n-1+j}\,((n-1+j)!)^{-1}$$

$$v_j = (n!)^{-2}\,(n+1+j)^{2n}\,\lambda^{n+1+j}((n+1+j)!)^{-1},$$

и поэтому

$$\frac{v_j}{u_j} = n^{-2}\left(1+\frac{2}{n-1+j}\right)^{2n-2}(n+1+j)^2\,\lambda^2(n+j)^{-1}\,(n+1+j)^{-1}$$

$$\leqq 4e^4\lambda^2 n^{-2} \leqq 1.$$

Тогда

$$\sigma_n \leqq \alpha_n + \sigma_{n-1} \leqq \operatorname*{Max}_{k\leqq N}\sigma_k + \sum_{p\leqq n-1}\alpha_p + \alpha_n.$$

Лемма доказана.

Теорема. Пусть $\lambda > 0$ и последовательность $\{a_x\}_{x=0}^{\infty}$ такая, что

$$\sum_{x=0}^{\infty}|a_x|^2\,\lambda^x(x!)^{-1} < \infty. \tag{2}$$

Если для $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\textstyle\sum_x a_x x^n \lambda^x (x!)^{-1} = 0,^{*)} \tag{3}$$

то $a_x = 0$ для всякого x.

Доказательство. Пусть уже доказано, что $a_x = 0$ для $x < p$ $(p \geqq 0)$. Положим $s_n(x) = (n!)^{-1}\,(x-(p+1))\,\ldots\,(x-(p+n))$.

Из этого следует, что

1° $s_n(x) = 0$ для $p < x \leqq p+n$,

2° $s_n(p) = (-1)^n$,

3° $0 \leqq s_n(x) \leqq (n!)^{-1}\,x^n$ для $x > p+n \geqq n$.

Из (3) вытекает

$$S = \Sigma_x a_x s_n(x)\,\lambda^x(x!)^{-1} = 0 \tag{4}$$

и в силу 1°, 2° и предположения $a_x = 0$ для $x < p$,

$$S = \pm\, a_p\,\frac{\lambda^p}{p!} + \sum_{x>n+p} a_x s_n(x)\,\lambda^x(x!)^{-1}. \tag{5}$$

По неравенству Шварца и 3°

$$\Big|\sum_{x>n+p} a_x s_n(x)\,\lambda^x(x!)^{-1}\Big| \leqq \sum_{x>n}|a_x|(n!)^{-1}\,x^n\lambda^x(x!)^{-1} \leqq$$

$$\leqq \sqrt{\sum_{x>n}|a_x|^2\,\lambda^x(x!)^{-1}}\;.\;\sqrt{(n!)^{-2}\sum_{x>n}x^{2n}\lambda^x(x!)^{-1}}.$$

Но это

$$\leqq \sqrt{C}\;.\;\sqrt{\sum_{x>n}|a_x|^2\,\lambda^x(x!)^{-1}}.$$

---

*) $x^n = 1$ для $x = n = 0$.

Так как это выражение сходится к 0 для $n \to \infty$ (это вытекает из (2)), сравнением (4) и (5) мы получим $a_p = 0$.

Так как предположение доказательства выполняется именно для $p = 0$, то в силу полной индукции, теорема доказана.

COMPLETENESS OF POLYNOMIALS FOR POISSON'S DISTRIBUTION

VÁCLAV ALDA, Praha.

(Received August 12, 1952.)

Let λ be a positive number. The space $l^{(2)}$ consists of all sequences $\{a_x\}_{x=0}^{\infty}$ for which $\sum |a_x|^2 \lambda^x (x!)^{-1} < \infty$. An elementary proof for completeness of polynomials in this space is given, viz.

if for $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\sum a_x x^n \lambda^x (x!)^{-1} = 0,$$

then $a_x = 0$ *for all* x.

The proof is based on two lemmas:

L. 1. *Let* $\lambda > 0$ *and*

$$\alpha_n = (n!)^{-2} (n + 1)^{2n} \lambda^{n+1} [(n + 1)!]^{-1};$$

then $\sum_n \alpha_n < \infty$.

L. 2. *Let* $\lambda > 0$ *and*

$$\sigma_n = (n!)^{-2} \sum_{x > n} x^{2n} \lambda^x (x!)^{-1}.$$

Then there exists a $C = C(\lambda) < \infty$, *so that* $\sigma_n \leqq C$ *for all* n.

For the prof of this lemma we write $\sigma_{n-1} = \sum_{j=1}^{\infty} u_j$ and $\sigma_n = \alpha_n + \sum_{j=1}^{\infty} v_j$ and we have $v_j / u_j \leqq 1$ for $n > N = [2e^2 \lambda] + 1$, hence $\sigma_n \leqq \alpha_n + \sigma_{n-1}$.

The proof of the theorem is given by induction. We introduce the polynomial $s_n(x) = (n!)^{-1} \prod_{k=1}^{n} (x - (p + k))$, if $a_x = 0$ for $x < p$. Then we have (4) and (5) and following Schwarz's inequality and lemma 2 we obtain $a_p = 0$.