

Miloš Zlámal

Об одном критерии устойчивости Ляпунова

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 3 (1953), No. 3, 257–264

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/100085>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1953

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ЛЯПУНОВА

МИЛОШ ЗЛАМАЛ (Miloš Zlámal), Брно.

(Поступило в редакцию 22. XII. 1952 г.)

При изучении устойчивости движения *Ляпунов* исследовал между прочим дифференциальное уравнение $y'' + p(x)y = 0$, где $p(x)$ — периодическая функция, и установил достаточное условие для ограниченности всех решений этого уравнения. Содержанием настоящей работы являются две теоремы, представляющие обобщение критерий Ляпунова.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$y'' + p(x)y = 0, \tag{1}$$

где $p(x)$ — действительная непрерывная периодическая функция с периодом ω . В своей известной работе [1] Ляпунов доказал, что все решения уравнения (1) будут ограничены, если $p(x) \geq 0$, $p(x) \not\equiv 0$ и

$$\omega \int_0^\omega p(x) dx \leq 4.$$

Критерий Ляпунова был за последние годы несколько раз обобщен, напр. в [2], [3], [4]. Эти обобщения касались т. наз. первой зоны устойчивости. Недавно *Гусарова* в [5] установила критерий, касающийся дальнейших зон устойчивости. Ее достаточное условие имеет вид ($\omega = \pi$)

$$p(x) \geq n^2, \quad \pi \int_0^\pi p(x) dx \leq 4(n + 1) + n^2(\frac{1}{2}\pi^2 + 4), \quad n = 0, 1, 2, 3, 4.$$

В настоящей работе мы докажем две теоремы, справедливые для всех зон устойчивости; притом вторая из них существенно улучшает результат Гусаровой. По окончании работы автор, однако, узнал, что критерий Гусаровой был снова существенно улучшен *Крейном* [6], который установил следующее достаточное условие ограниченности всех решений:

$$\begin{aligned} p(x) \geq \frac{n^2\pi^2}{\omega^2}, \quad \int_0^\omega p(x) dx &< \frac{\pi^2}{\omega} n^2 + \frac{2\pi}{\omega} n(n + 1) \operatorname{tg} \frac{\pi}{2(n + 1)} = \\ &= \frac{1}{\omega} \left(\pi^2 n^2 + \pi^2 n + \frac{\pi^4 n}{12\omega(n + 1)^3} + \dots \right), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Хотя наша теорема в случае $p(x) \geq n^2$ дает худший результат, тем не менее она не содержится в критерии Крейна.

Теорема 1. Пусть $p(x)$ — действительная непрерывная периодическая функция с периодом π , причем

$$\int_0^\pi |p(x) - a^2| dx < 2a \min \left\{ \left| \sin \frac{a\pi}{2} \right|, \left| \cos \frac{a\pi}{2} \right| \right\}, \quad (2)$$

где

$$a > 0, \quad a \neq 1, 2, \dots \quad (3)$$

Тогда все решения уравнения (1) ограничены.

Доказательство. Положим $q(x) = p(x) - a^2$ и рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y'' + [a^2 + \lambda q(x)] y = 0. \quad (4)$$

При $\lambda = 1$ (4) перейдет в (1). Пусть $y_1(x, \lambda)$ и $y_2(x, \lambda)$ означают два решения уравнения (4) с начальными значениями

$$y_1(0, \lambda) = 1, \quad y_1'(0, \lambda) = 0; \quad y_2(0, \lambda) = 0, \quad y_2'(0, \lambda) = 1.$$

Если положить

$$A(\lambda) = \frac{1}{2}[y_1(\pi, \lambda) + y_2'(\pi, \lambda)],$$

то из теории Флоке вытекает, что, как только $|A(\lambda)| < 1$, все решения уравнения (4) ограничены, а в случае $|A(\lambda)| > 1$, существуют неограниченные решения. Граничный случай $A(\lambda) = \pm 1$ характеризуется тем, что для $A(\lambda^*) = 1$, λ^* будет собственным значением краевой задачи

$$y'' + [a^2 + \lambda q(x)] y = 0, \quad y(0) = y(\pi), \quad y'(0) = y'(\pi). \quad (5)$$

(уравнение (4) имеет поэтому периодическое решение с периодом π), а для $A(\lambda^{**}) = -1$, λ^{**} будет собственным значением краевой задачи

$$y'' + [a^2 + \lambda q(x)] y = 0, \quad y(0) = -y(\pi), \quad y'(0) = -y'(\pi) \quad (6)$$

(в этом случае уравнение (4) имеет полупериодическое решение $y(x)$, т. е. $y(x + \pi) = -y(x)$).

Теперь, очевидно, будет $A(0) = \cos a\pi$, так что, ввиду (3), будет $|A(0)| < 1$. Далее $A(\lambda)$ является непрерывной и даже целой аналитической функцией параметра λ . Следовательно, если нам удастся найти два таких числа R_1 и R_2 , что все собственные значения для краевой задачи (5) по абсолютной величине больше или равны R_1 , а для краевой задачи (6), больше или равны R_2 , то для $|\lambda| < \min(R_1, R_2)$ все решения ограничены.

Для отыскания R_1 приведем (5) к виду интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Если ввести на ближайшее время обозначение

$$\lambda q(x) y = F(x), \quad (7)$$

то получим

$$y'' + a^2 y = -F(x), \quad y(0) = y(\pi), \quad y'(0) = y'(\pi).$$

Поэтому

$$y = c_1 \cos ax + c_2 \sin ax - \frac{1}{a} \int_0^x F(t) \sin a(x-t) dt. \quad (8)$$

Притом постоянные c_1 и c_2 нужно определить так, чтобы были соблюдены граничные условия. Таким образом, мы получим уравнения

$$c_1 = c_1 \cos a\pi + c_2 \sin a\pi - \frac{1}{a} \int_0^\pi F(t) \sin a(\pi-t) dt$$

$$ac_2 = -ac_1 \sin a\pi + ac_2 \cos a\pi - \int_0^\pi F(t) \cos a(\pi-t) dt.$$

Определив из них c_1 и c_2 и подставив в (8), мы получим после простых преобразований результат

$$y(x) = \int_0^\pi K(x, t) F(t) dt,$$

где

$$K(x, t) = \begin{cases} -\frac{1}{2a \sin \frac{a\pi}{2}} \cos a(x-t-\frac{1}{2}\pi) & \text{для } t \leq x \\ -\frac{1}{2a \sin \frac{a\pi}{2}} \cos a(x-t+\frac{1}{2}\pi) & \text{для } t \geq x. \end{cases}$$

Подставив выражение для $F(x)$ из уравнения (7), мы видим, что краевая задача (5) перешла в интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$y(x) = \lambda \int_0^\pi K_1(x, t) y(t) dt,$$

где $K_1(x, t) = K(x, t) q(t)$ является непрерывным ядром и

$$|K_1(x, t)| \leq \frac{1}{2a \left| \sin \frac{a\pi}{2} \right|} |q(t)|.$$

Из критерия Вайнштейна [7] вытекает, что

$$R_1 = \frac{1}{\max_{x \in \langle 0, \pi \rangle} \int_0^\pi |K_1(x, t)| dt} \geq \frac{2a \left| \sin \frac{a\pi}{2} \right|}{\int_0^\pi |q(t)| dt} \quad 1)$$

1) Эта оценка справедлива и для целых нечетных a .

Аналогично можно показать, что краевая задача (6) равносильна интегральному уравнению

$$y(x) = \lambda \int_0^{\pi} \bar{K}_1(x, t) y(t) dt,$$

где $\bar{K}_1(x, t) = \bar{K}(x, t) q(t)$ и

$$\bar{K}(x, t) = \begin{cases} -\frac{1}{2a \cos \frac{a\pi}{2}} \sin a(x - t - \frac{1}{2}\pi) & \text{для } t \leq x \\ \frac{1}{2a \cos \frac{a\pi}{2}} \sin a(x - t + \frac{1}{2}\pi) & \text{для } t \geq x. \end{cases}$$

Отсюда вытекает

$$R_2 \geq \frac{2a \left| \cos \frac{a\pi}{2} \right|^2}{\int_0^{\pi} |q(t)| dt}$$

Итак, для

$$|\lambda| < \min \left\{ \frac{2a \left| \sin a \frac{a\pi}{2} \right|}{\int_0^{\pi} |q(t)| dt}, \frac{2a \left| \cos \frac{a\pi}{2} \right|}{\int_0^{\pi} |q(t)| dt} \right\}$$

все решения уравнения (4) ограничены. Положив $\lambda = 1$ и $q(x) = p(x) - a^2$, мы получим (2).

Замечание 1. Правая часть неравенства (2) имеет наибольшее значение при $a = \frac{2n+1}{2}$, где $n = 0, 1, \dots$. Следовательно, мы получаем,

в частности, результат:

Если

$$\int_0^{\pi} \left| p(x) - \left(\frac{2n+1}{2} \right)^2 \right| dx < \sqrt{2} \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, \dots,$$

то все решения ограничены.

Предположим теперь, что $q(x) \geq 0$, и с помощью одной осцилляционной теоремы Биркгоффа [8] установим следующий критерий.

Теорема 2. Пусть $p(x) \geq a^2 > 0$ и

$$\int_0^{\pi} p(x) dx < \pi a^2 + 2a \left| \cos \frac{a\pi}{2} \right|,$$

²⁾ Эта оценка справедлива и для целых четных a .

если

$$2k \leq a < 2k + 1, \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (9)$$

или

$$\int_0^\pi p(x) dx < \pi a^2 + 2a \left| \sin \frac{a\pi}{2} \right|, \quad (10)$$

если

$$2k + 1 \leq a < 2k + 2.$$

Тогда все решения уравнения (1) ограничены.

Доказательство 1. Пусть $2k \leq a < 2k + 1$. Предположим временно, что

$$q(x) = p(x) - a^2 > 0.$$

Обозначим собственные значения краевой задачи (5) через λ_v , краевой задачи (6) через $\bar{\lambda}_v$. Ни одно из $\bar{\lambda}_v$ не равняется нулю, так как $2k \leq a < 2k + 1$. Пусть λ_{v_1} — собственное значение, лежащее ближе всего к нулю слева от него, так что

$$\lambda_{v_1} \leq 0 < \lambda_{v_1+1}.$$

Если $\lambda = 0$, то одним из решений уравнения (4) будет $\sin ax$, имеющее в интервале $(0, \pi) > 2k$ нулей. Отсюда, на основании теоремы сравнения Штурма, вытекает, что при $\lambda = \lambda_{v_1}$ решения уравнения (4) имеют не более $2k + 1$, а при $\lambda = \lambda_{v_1+1}$ не менее $2k$ нулей в $(0, \pi)$. Из осцилляционной теоремы Биркгоффа (см. [8] стр. 269) вытекает прежде всего, что для v_1 возможны три значения, а именно $2k - 2, 2k - 1, 2k$. Если $a = 2k$, то $\lambda_{2k-1} = \lambda_{2k} = 0$, так что $v_1 = 2k$. Если же $a > 2k$, то точно так же $v_1 = 2k$. Действительно, если бы было $v_1 = 2k - 2$ или $v_1 = 2k - 1$, то, согласно той же осцилляционной теореме Биркгоффа, собственная функция, принадлежащая к λ_{v_1+1} , имела бы в точности $2k$ нулей в $(0, \pi)$, а так как она периодическая функция с периодом π , то она имела бы в $(0, m\pi)$ точно $2mk$ нулей ($m = 1, 2, \dots$). Однако, функция $\sin ax$, являющаяся решением уравнения (4) при $\lambda = 0$, имеет в $(0, m\pi)$ всего $[ma]^1$ нулей, и для больших m имеет место

$$[ma] = 2km + [m(a - 2k)] > 2km + 2.$$

Это неравенство противоречит, однако, теореме сравнения Штурма. Поэтому должно быть

$$\lambda_{2k} \leq 0 < \lambda_{2k+1}. \quad (11)$$

Аналогично можно доказать

$$\bar{\lambda}_{2k-1} < 0 < \bar{\lambda}_{2k}. \quad (12)$$

Кроме того имеет еще место

$$\bar{\lambda}_{2k} < \lambda_{2k+1}. \quad (13)$$

¹⁾ $[x]$ означает наибольшее целое число, меньшее или равное x .

В самом деле, собственная функция, принадлежащая к λ_{2k+1} , имеет, согласно осцилляционной теореме Биркгоффа, $2k + 2$ нулей в $(0, \pi)$ и, в силу своей периодичности, $4k + 4$ нулей в $(0, 2\pi)$, а собственная функция, принадлежащая к $\bar{\lambda}_{2k}$, имеет $2k + 1$ нулей в $(0, \pi)$ и, в силу своей полупериодичности, $4k + 2$ в $(0, 2\pi)$.

Теперь мы имеем $|A(0)| < 1$, если $2k < a < 2k + 1$ и $A(0) = 1$, если $a = 2k$. Поэтому из (11), (12) и (13) следует, что для $0 \leq \lambda < \bar{\lambda}_{2k}$, а тем более для $0 \leq \lambda < R_2$ все решения уравнения (4) ограничены. Теорема (2) для случая $q(x) > 0$ доказана. Если имеет место только $p(x) \geq a^2$, следовательно $q(x) \geq 0$, положим $\bar{q}(x) = q(x) + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, и рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y'' + [a^2 + \lambda\bar{q}(x)]y = 0. \quad (14)$$

Тогда характеристическая постоянная A будет непрерывной функцией λ и ε , $A(\lambda, \varepsilon)$. Если справедливо (9), то для достаточно малых ε

$$\int_0^\pi \bar{q}(x) dx < 2a \left| \cos \frac{a\pi}{2} \right|,$$

так что все решения уравнения (14) для $0 \leq \lambda < R_2$ и достаточно малых ε будут ограниченными, откуда следует

$$|A(\lambda, \varepsilon)| \leq 1$$

а также, ввиду непрерывности,

$$|A(\lambda, 0)| \leq 1 \quad \text{для} \quad 0 \leq \lambda < R_2$$

Это неравенство означает, что все решения уравнения (4) для $0 \leq \lambda < R_2$ ограничены, так как, если даже $|A(\lambda, 0)| = 1$, то эти λ являются двукратными собственными значениями, и уравнение (4) имеет в этом случае два периодических или полупериодических линейно независимых решения.

2. В случае $2k + 1 \leq a < 2k + 2$ доказательство протекает аналогично. Здесь имеет место

$$\lambda_{2k} < 0 < \lambda_{2k+1}, \quad \bar{\lambda}_{2k+1} \leq 0 < \bar{\lambda}_{2k+2}, \quad \lambda_{2k+1} < \bar{\lambda}_{2k+2},$$

так что для $0 \leq \lambda < \lambda_{2k+1}$, а тем более для $0 \leq \lambda < R_1$, все решения ограничены.

Замечание 2. Из теоремы (2) вытекает: Если

$$p(x) \geq n^2, \quad \int_0^\pi p(x) dx < \pi n^2 + 2n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

то все решения уравнения (4) ограничены. Этот результат, однако, слабее результата Крейна.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ляпунов Л. М.*: Общая задача об устойчивости движения.
 [2] *Borg G.*: On a Liapounoff criterion (Amer. Journ. of Math., 1949).
 [3] *Ерugin Н. П.*: Обобщение одной теоремы Ляпунова (Прикл. Мат. и Мех., т. XII, 1949, 633—638).
 [4] *Гусарова Р. С.*: Об ограниченности решений линейного дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами (ПММ, XIII, 1949, 241—243).
 [5] *Гусарова Р. С.*: Об ограниченности решений линейного дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами (ПММ, XIV, 1950, 313—314).
 [6] *Крейн М. Г.*: О некоторых задачах на максимум и минимум для характеристических чисел и о ляпуновских зонах устойчивости (ПММ, XV, 1951, 323—348).
 [7] *Weinstein A.*: Ein einfaches Kriterium für die Konvergenz der Neumannschen Reihe (S.-B. Berliner Math. Ges., 26, 168—170), 1927.
 [8] *Birkhoff F. D.*: Existence and oscillation theorem for a certain boundary value problem (Transaction of the Amer. Math. Soc., 10, 259—270, 1909).

Zusammenfassung.

ÜBER EIN KRITERIUM DER STABILITÄT VON LIAPOUNOFF

MILOŠ ZLÁMAL, Brno.

(Eingelangt 22. XII. 1952.)

Es sei die lineare Differentialgleichung

$$y'' + p(x)y = 0. \quad (1)$$

gegeben, wo $p(x)$ eine reelle, stetige, periodische Funktion mit der Periode π ist. Liapounoff hat in seiner bekannter Arbeit [1]¹⁾ gezeigt, dass alle Lösungen von (1) beschränkt sind, wenn $p(x) \geq 0$, $p(x) \not\equiv 0$ und $\int_0^\pi p(x) dx \leq \frac{4}{\pi}$. In dieser Arbeit beweisen wir zwei Sätze, woraus der zweite das Liapounoffsche Kriterium wesentlich verallgemeinert.

Satz 1. *Es sei $p(x)$ eine reelle, stetige, periodische Funktion mit der Periode π und dabei*

$$\int_0^\pi |p(x) - a^2| dx < 2a \min \{ |\sin \frac{1}{2}a\pi|, |\cos \frac{1}{2}a\pi| \}, \quad a > 0, a \neq 1, 2, \dots$$

Dann sind alle Lösungen von (1) beschränkt.

Satz 2. *Es sei $p(x) \geq a^2 > 0$ und*

$$\int_0^\pi p(x) dx < \pi a^2 + 2a |\cos \frac{1}{2}a\pi|, \quad \text{wenn } 2k \leq a < 2k + 1 \quad (k = 0, 1, \dots),$$

¹⁾ Siehe Literaturverzeichnis.

oder

$$\int_0^{\pi} p(x) dx < \pi a^2 + 2a |\sin \frac{1}{2} a \pi|, \quad \text{wenn } 2k + 1 \leq a < 2k + 2.$$

Dann sind alle Lösungen von (1) beschränkt.

Aus dem Satz 2 folgt: Wenn

$$p(x) \geq n^2, \quad \int_0^{\pi} p(x) dx < \pi n^2 + 2n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

dann sind alle Lösungen von (1) beschränkt. Dieses Resultat ist aber schwächer als das kürzlich von Krein [6] bewiesene.

Der Hauptgedanke des Beweises des Satzes 1 ist der folgende: Wir setzen $p(x) - a^2 = q(x)$ und betrachten die Differentialgleichung

$$y'' + [a^2 + \lambda q(x)] y = 0. \quad (2)$$

Für $\lambda = 1$ geht (2) in (1) über. Es seien $y_1(x, \lambda)$ und $y_2(x, \lambda)$ die Lösungen von (2), welche die Anfangswerte $y_1(0, \lambda) = 1, y_1'(0, \lambda) = 0, y_2(0, \lambda) = 0, y_2'(0, \lambda) = 1$ annehmen. Wenn wir $A(\lambda) = \frac{1}{2}[y_1(\pi, \lambda) + y_2'(\pi, \lambda)]$ setzen, dann ist aus der Floquetschen Theorie bekannt, dass, soweit $|A(\lambda)| < 1$, alle Lösungen von (2) beschränkt sind und wenn $|A(\lambda)| > 1$, unbeschränkte Lösungen existieren. Der Grenzfall $A(\lambda) = \pm 1$ ist dadurch charakterisiert, dass für $A(\lambda^*) = 1$ λ^* ein Eigenwert der Eigenwertaufgabe

$$y'' + [a^2 + \lambda q(x)] y = 0, \quad y(0) = y(\pi), \quad y'(0) = y'(\pi) \quad (3)$$

und für $A(\lambda^{**}) = -1$ λ^{**} ein Eigenwert der Eigenwertaufgabe

$$y'' + [a^2 + \lambda q(x)] y = 0, \quad y(0) = -y(\pi), \quad y'(0) = -y'(\pi) \quad (4)$$

ist. Jetzt haben wir offenbar $A(0) = \cos a\pi$, also mit Rücksicht auf $a \neq 1, 2, \dots$ $|A(0)| < 1$. Weiter ist $A(\lambda)$ eine stetige, sogar ganze analytische Funktion des Parameters λ . Wenn es uns also gelingt zwei solche Zahlen R_1 und R_2 zu finden, dass der im absoluten Betrage kleinste Eigenwert von (3) grösser oder gleich R_1 und der von (4) grösser oder gleich R_2 ist, dann sind für $|\lambda| < \min(R_1, R_2)$ alle Lösungen von (2) beschränkt. Um R_1 und R_2 zu finden, überführen wir (3) und (4) in eine Fredholmsche Integralgleichung zweiter Art und benützen das Weinsteinsche Kriterium über die Konvergenz der Neumannschen Reihe.

Wenn wir $q(x) \geq 0$, d. h. $p(x) \geq a^2$, voraussetzen, bekommen wir mit Hilfe eines Birkhoff'schen Oszillationssatzes (siehe [8] S. 269) ein besseres Resultat, nämlich den Satz 2.