Štefan Schwarz

Характеры коммутативных полугрупп как функции классов

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 4 (1954), No. 4, 291–295

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100117

ЧЕХОСЛОВАЦКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
Математический институт Чехословацкой Академии наук
Т. 4 (79) ПРАГА 20. XII. 1954 Г. * No 4

ХАРАКТЕРЫ КОММУТАТИВНЫХ ПОЛУГРУПП КАК ФУНКЦИИ КЛАССОВ

ШТЕФАН ШВАРЦ, (Štefan Schwarz), Братислава

(Поступило в редакцию 7/IV 1954 г.)

Настоящая статья является продолжением исследований автора в области теории характеров конечных коммутативных полугрупп. Известно, что для каждых двух различных элементов конечной коммутативной группы существует характер, который принимает для этих элементов два различных значения. Нетрудно показать, что это утверждение не справедливо для полугрупп. Для каждой конечной коммутативной полугруппы автор дает разложение на классы такое, что каждый характер принимает одно и то же значение для всех элементов данного класса и что для любых двух элементов данной полугруппы, принадлежащих различным классам, существует характер, принимающий для них различные значения.

Эта заметка исходит из определения характеров полугрупп, данного в последней работе автора.[1]) В дальнейшем мы предполагаем, что читатель знаком с результатами этой работы.

Пусть $S = \{a, b, c, \dots\}$ — конечная коммутативная полугруппа. В работе **K** мы определили характер полугруппы S, как гомоморфное отображение полугруппы S в мультипликативную полугруппу комплексных чисел.

В теории коммутативных групп элемент группы однозначно определяется значениями всех характеров. В теории конечных некоммутативных групп характер представления можно считать функцией не элементов, а классов, определяемых обычным способом.

В работе **K** мы показали на примере мультипликативной полугруппы целых чисел (mod 12), что возможен случай, когда для двух *различных*

[1]) Теория характеров коммутативных полугрупп, Чехословацкий математический журнал, 4 (79), 1954, 219—247. Эту работу мы будем в дальнейшем цитировать знаком **K**.

элементов полугруппы S все характеры принимают одно и то же значение. Итак, элементы не определяются однозначно значениями характеров.

В настоящей заметке мы хотим показать, что в теории конечных коммутативных полугрупп можно ввести понятие *классов* таким образом, что 1. характеры являются функциями классов, 2. класс однозначно определяется значениями характеров.

Пусть

$$S = P_1 + P_2 + \ldots + P_s$$

есть разложение полугруппы на дизъюнктную сумму максимальных полугрупп (в смысле, определенном в работе **K**). Полугруппа P_i содержит единственный идемпотент e_i; соответствующую максимальную группу обозначим через G_i.

$$S_0 = G_1 + G_2 + \ldots + G_s$$

является регулярной частичной полугруппой полугруппы S.

Определение. *Пусть a_i — произвольный элемент, $a_i \in G_i$. Множество всех $x \in P_i$, для которых имеет место $xe_i = a_i$, обозначим через T_{a_i}. Назовем его классом элементов, сопряженных с элементом a_i.*

Множество T_{a_i} непусто, ибо в него входит элемент a_i. В то же время a_i — единственный элемент $\in G_i$, входящий в T_{a_i}.

Так как для каждого $x \in P_i$ имеет место $xe_i \in G_i$ (см. замечание за леммой 6**K**), то можно представить P_i в виде суммы непересекающихся классов:

$$P_i = T_{a_i} + T_{b_i} + T_{c_i} + \ldots$$

Очевидно, число классов в P_i равно числу регулярных элементов полугруппы P_i, т. е. числу элементов группы G_i.

Аналогично и вся полугруппа S является суммой непересекающихся классов

$$S = \sum_{i=1}^{s} (T_{a_i} + T_{b_i} + T_{c_i} + \ldots)$$

и число различных классов в S равно числу регулярных элементов полугруппы S.

Теорема 1. *Пусть χ — произвольный характер полугруппы S. Тогда χ принимает для всякого элемента фиксированного класса одно и то же значение.*

Доказательство. По лемме 3**K** и 9**K** каждый характер χ определяет на S разложение $S = J + (S - J)$, $J \cap S - J = \emptyset$, где J — простой идеал точно тех элементов $u \in S$, для которых имеет место $\chi(u) = 0$. Каждое из слагаемых J и $S - J$ является суммой некоторого числа максимальных полугрупп из S.

Пусть T_{a_i} — фиксированный класс сопряженных элементов из S. Если $T_{a_i} \subseteqq J$, $\chi(T_{a_i}) = 0$ и утверждение доказано.

Пусть поэтому $T_{a_i} \subseteqq S - J$. Тогда $T_{a_i} \subseteqq P_i$ и максимальная полугруппа P_i удовлетворяет соотношению $P_i \subseteqq S - J$.

По теореме **4K** характер χ можно образовать таким образом: Идемпотенты $\in S - J$ образуют полуструктуру, если для двух идемпотентов α, β мы определим $\alpha \leqq \beta$, когда $\alpha\beta = \alpha$. Пусть e — наименший идемпотент этой полуструктуры, G_e — соответствующая максимальная группа. Тогда для любого $x \in S - J$ будет $xe \in G_e$. Если $g(x)$ — надлежаще выбранный характер группы G_e, то для характера $\chi(x)$ имеет место

$$\chi(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \in J\,, \\ g(xe) & \text{для } x \in S - J\,. \end{cases}$$

По предположению имеем $T_{a_i} \subseteqq P_i$, т. е. $T_{a_i} \,.\, e_i = a_i \in G_i$. Далее (ввиду $e \leqq e_i$), будет

$$T_{a_i} \,.\, e = T_{a_i} \,.\, (ee_i) = (T_{a_i} e_i)\, e = a_i e\,.$$

Итак,

$$\chi(T_{a_i}) = g(T_{a_i} e) = g(a_i e)\,.$$

Это значит: для каждого характера χ каждый элемент $\in T_{a_i}$ дает значение характера, равное одному и тому же числу $g(a_i e)$, ч. т. д.

Следующая теорема определяет понятие класса исчерпывающим образом.

Теорема 2. *Пусть $a \neq b$ — два элемента полугруппы S, не принадлежащие одному и тому же классу. Тогда существует такой характер χ полугруппы S, для которого имеет место $\chi(a) \neq \chi(b)$.*

Доказательство. **А.** Пусть элементы a, b лежат в одной и той же максимальной полугруппе P_i. Тогда можно написать

$$P_i = T_{a_i} + T_{b_i} + \ldots, \quad a \in T_{a_i}, b \in T_{b_i}\,,$$

где, однако, по предположению $ae_i \neq be_i$.

Пусть E — множество всех идемпотентов $\beta \in S$, для которых $\beta e_i \neq e_i$. По лемме 15**K** теоретико-множественная сумма максимальных полугрупп, принадлежащих к идемпотентам из E, образует простой идеал J из S. Множество $S - J$ есть полугруппа, наименьшим идемпотентом которой является e_i. В дальнейшем мы будем говорить (в согласии с терминологией из **K**), что построенный таким образом простой идеал J принадлежит к идемпотенту e_i. (Если $E = \emptyset$, то $J = \emptyset$ и $S - J = S$.)

Из теоремы **4K** мы знаем, что множество характеров, равных нулю точно на J, изоморфно группе всех (ненулевых) характеров группы G_i. Если $g(x)$ — произвольный характер группы G_i, то (как и выше) комплексная функция

$$\chi(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \in J\,, \\ g(xe_i) & \text{для } x \in S - J\,, \end{cases} \tag{1}$$

является характером полугруппы S.

Элементы ae_i и be_i входят в G_i и отличны друг от друга. Выберем характер $g(x)$ так, чтобы было $g(ae_i) \neq g(be_i)$. Из теории характеров абелевых групп известно, что это возможно. Тогда для характера (1), построенного при помощи этой функции $g(x)$, имеет место

$$\chi(a) = g(ae_i)\,, \quad \chi(b) = g(be_i)\,,$$

т. е. $\chi(a) \neq \chi(b)$, ч. т. д.

Б. Пусть элементы a, b лежат в двух различных максимальных полугруппах, $a \in P_i$, $b \in P_k$, $i \neq k$. Пусть соответствующие идемпотенты будут $e_i \neq e_k$. Возможны три случая: α) или $e_i < e_k$, β) или $e_k < e_i$, γ) или элементы e_i, e_k несравнимы.

α) Пусть $e_i < e_k$. Найдем простой идеал J, принадлежащий к идемпотенту e_k. Тогда будет обязательно $e_i \in J$ (а значит $J \neq \emptyset$), ибо каждый идемпотент $\in S - J$ будет $\geqq e_k$. Выберем произвольный характер χ, равный нулю точно на J. Тогда будет $\chi(e_i) = 0$, а следовательно (см. лемму 8**K**) и $\chi(a) = 0$. Однако, $\chi(e_k) \neq 0$, значит и $\chi(b) \neq 0$. Поэтому $\chi(a) \neq \chi(b)$, ч. т. д.

β) Случай $e_k < e_i$ решается аналогично.

γ) Пусть идемпотенты e_i, e_k несравнимы. Выберем любой из них, напр. e_i. Простой идеал, принадлежащий к этому идемпотенту, обозначим через J. Идемпотент e_i является наименьшим из идемпотентов в $S - J$. Идемпотент e_k не может быть в $S - J$, ибо в противном случае было бы $e_i \leqq e_k$, и идемпотенты были бы сравнимы. Итак, $e_k \in J$. Возьмем произвольный характер χ, равный нулю точно на J. Тогда $\chi(e_k) = 0$ и, следовательно, $\chi(b) = 0$. Далее имеем, однако, $\chi(e_i) \neq 0$, значит и $\chi(a) \neq 0$. Поэтому $\chi(a) \neq \chi(b)$, что и требовалось доказать.

Этим завершается доказательство теоремы 2.

Summary

CHARACTERS OF COMMUTATIVE SEMIGROUPS AS CLASS FUNCTIONS

ŠTEFAN SCHWARZ, Bratislava.

(Received April 7, 1954.)

The notions of this note are the same as in the paper mentioned in the footnote[1]).

Let S be a finite commutative semigroup. A new notion of a class of conjugate elements is introduced.

Let P_i be a maximal semigroup of S belonging to the idempotent e_i, G_i the corresponding maximal group. Let be $a_i \in G_i$. The totality T_{a_i} of all elements $x \in P_i$ satisfying $xe_i = a_i$ is called a class of conjugate elements of S. The semigroup S is a sum of disjoint classes.

The following two theorems are proved:

Theorem 1. *Let χ be a character of S. Then χ assumes the same value for every element of a fixed class.*

Theorem 2. *Let $a \neq b$ be two elements $\in S$ belonging to two different classes. Then there exists a character χ for which $\chi(a) \neq \chi(b)$ holds.*