

Štefan Schwarz

Характеры бикомпактных полугрупп

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 5 (1955), No. 1, 24–28

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/100129>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1955

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ХАРАКТЕРЫ БИКОМПАКТНЫХ ПОЛУГРУПП

ШТЕФАН ШВАРЦ (Štefan Schwarz), Братислава,

(Поступило в редакцию 23/VIII 1954 г.)

Целью этой работы является исследование характеров бикомпактных полугрупп. Характером подразумеваем при этом (в отличие от работы [1]) непрерывную комплексную функцию $\chi(x)$, по абсолютной величине равную единице, которая удовлетворяет уравнению $\chi(ab) = \chi(a) \cdot \chi(b)$ для всех $a, b \in S$.

В работе [1] я обобщил классическую теорию характеров конечных абелевых групп на случай конечных абелевых полугрупп. Характером полугруппы $S = \{a, b, c, \dots\}$ мы при этом называли комплексную функцию $\chi(x)$, определенную на S , которая для каждой пары $a, b \in S$ удовлетворяет условию $\chi(ab) = \chi(a) \cdot \chi(b)$. Из этого условия следует, что функциональными значениями каждого характера будет или число 0, или некоторый корень из единицы.

То обстоятельство, что характер может принимать и значение 0, несколько видоизменило всю теорию по сравнению с теорией характеров конечных абелевых групп.

В работе [2] я рассматривал структуру хаусдорфовых бикомпактных полугрупп. Результаты этой работы позволяют произвести разработку теории характеров бикомпактных полугрупп сравнительно простым способом, т. е. свести ее к изучению характеров определенной замкнутой подгруппы из S . В отличие от конечного случая, рассматриваемого в работе [1], необходимо сделать некоторые ограничения, а именно: определить характер точно так же, как и в теории групп, т. е., как функцию, принимающую только те значения, абсолютная величина которых равна единице.

Мне до сих пор не удалось выяснить в достаточно общей форме, как бы выглядела такая теория характеров (или, лучше сказать, мультипликативных функционалов) бесконечных коммутативных бикомпактных полугрупп, которая включала бы в качестве частного случая результаты работы [1].

Определение. Пусть $S = \{a, b, c, \dots\}$ — хаусдорфова бикомпактная абелева полугруппа. Характером полугруппы S мы будем называть каждый

непрерывный гомоморфизм полугруппы S на группу комплексных чисел, абсолютная величина которых равна единице.

Вместо гомоморфизмов мы будем в дальнейшем говорить просто о комплексных функциях, определенных на S .

Множество характеров полугруппы S обозначим символом S^* . Если $\chi_i(x)$, $\chi_k(x)$ — два характера $\in S^*$, то мы определяем их произведение обычным способом: $\chi_i \chi_k(x) = \chi_i(x) \chi_k(x)$. Единичным характером мы называем функцию $\chi_1(x) = 1$ для каждого $x \in S$. Если χ — характер, то и $\bar{\chi}$ есть характер, причем $\chi \bar{\chi} = \chi_1$. При таком определении умножения характеры образуют группу, единичным элементом которой будет χ_1 . Нашей целью будет исследовать строение группы S^* .

В работе [2] мы доказали: каждую хаусдорфову бикompактную коммутативную полугруппу S можно записать в виде суммы дизъюнктивных максимальных полугрупп: $S = \sum_{\alpha \in A} P_\alpha$, где α пробегает некоторое множество индексов A . Каждое из слагаемых P_α содержит только один идемпотент e_α и является наибольшей частичной полугруппой из S , содержащей только один идемпотент e_α . Каждое P_α содержит, далее, одну единственную замкнутую максимальную группу $G_\alpha \subseteq P_\alpha$, которая характеризуется тем, что она является наибольшей частичной группой из S , содержащей e_α .

Пусть $E = \{e_\nu / \nu \in A\}$ — множество всех идемпотентов $\in S$. Определим в E частичное упорядочение так, что положим $e_\alpha \leq e_\beta$, если $e_\alpha e_\beta = e_\alpha$. Упорядоченное таким образом множество идемпотентов образует полуструктуру, т. е. частично упорядоченное множество, в котором для каждых двух элементов $e_\alpha, e_\beta \in E$ существует структурно-теоретическое пересечение, а именно: $e_\alpha \wedge e_\beta = e_\alpha e_\beta \in E$.

Теорема 1. *Идемпотенты хаусдорфовой бикompактной коммутативной полугруппы образуют полуструктуру, имеющую наименьший элемент.*

Доказательство. Пусть $E = \{e_\nu / \nu \in A\}$ — множество всех идемпотентов $\in S$. Каждое из множеств Se_ν является идеалом из S . Каждый идеал Se_ν будет бикompактным множеством, являясь непрерывным отображением S . Так как наше пространство хаусдорфово и Se_ν бикompактно, то Se_ν будет замкнутым в S .

Рассмотрим пересечение всех таких идеалов

$$\pi = \bigcap_{\nu \in A} Se_\nu. \quad (1)$$

Пусть $Se_\alpha, Se_\beta, \dots, Se_\mu$ конечное количество сомножителей пересечения (1).

Тогда, очевидно, будет,

$$e_\alpha e_\beta \dots e_\mu \in Se_\alpha \cdot Se_\beta \dots Se_\mu \subseteq Se_\alpha \cap Se_\beta \cap \dots \cap Se_\mu.$$

Следовательно, пересечение конечного числа произвольных сомножителей из (1) непусто. Так как в пересечении (1) фигурируют только замкнутые множества, то $\mathfrak{n} \neq \emptyset$. Множество \mathfrak{n} является кроме того замкнутой и, следовательно, бикompактной частичной полугруппой полугруппы S . Одновременно \mathfrak{n} является идеалом в S .

Докажем, что \mathfrak{n} является минимальным идеалом в S . Известно, что полугруппа не может иметь более одного минимального идеала. Пусть $a \in \mathfrak{n}$. Тогда имеем $Sa \subseteq \mathfrak{n}$. Полугруппа (идеал) Sa замкнута и бикompактна. Следовательно, она имеет хоть один идемпотент e . Так как e входит в идеал Sa , то $Se \subseteq Sa \subseteq \mathfrak{n}$. С другой стороны $\mathfrak{n} = \bigcap_{v \in I} Se_v \subseteq Se$. Из соотношения $Se \subseteq Sa \subseteq \mathfrak{n} \subseteq Se$ следует, что $Sa = Se = \mathfrak{n}$. Соотношение $Sa = \mathfrak{n}$, имеющее место для любого $a \in \mathfrak{n}$, показывает, что \mathfrak{n} не содержит ни одного подидеала полугруппы S , отличного от \mathfrak{n} . Следовательно, \mathfrak{n} будет минимальным идеалом из S .

Из только что выведенных соотношений вытекает, что $\mathfrak{n}S = \mathfrak{n}$.

Далее, для каждого $a \in \mathfrak{n}$, $a\mathfrak{n}$ будет идеалом из S . Для любого $a \in \mathfrak{n}$ будет, следовательно, $a\mathfrak{n} = \mathfrak{n}$. Это уравнение показывает, что для любых $a, b \in \mathfrak{n}$ уравнение $ax = b$ имеет решение $x \in \mathfrak{n}$. Следовательно, \mathfrak{n} является группой.

Пусть e^* — единственный существующий идемпотент из \mathfrak{n} . Мы утверждаем, что e^* есть наименьший идемпотент полуструктуры идемпотентов E , т. е. для каждого $e' \in E$ будет $e'e^* = e^*$. Пусть e' — произвольный идемпотент $\in S$. Множество $\mathfrak{n}e'$ есть идеал из S , следовательно, $\mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{n}e' \subseteq \mathfrak{n}S = \mathfrak{n}$, т. е. $\mathfrak{n}e' = \mathfrak{n}$. Множество $\mathfrak{n}e'$ содержит идемпотент e^*e' . Но так как \mathfrak{n} имеет один единственный идемпотент e^* , то неизбежно $e^*e' = e^*$. Этим теорема 1 полностью доказана.

Лемма 1. Пусть e^* — наименьший идемпотент полугруппы S . Пусть G — максимальная группа, принадлежащая к e^* . Тогда $G = \mathfrak{n}$, где \mathfrak{n} — минимальный идеал полугруппы S .

Доказательство. Так как $e^* \in \mathfrak{n}$, а \mathfrak{n} есть группа, то, очевидно, $\mathfrak{n} \subseteq G$. Если идемпотент e^* принадлежит к какому-либо идеалу, то к нему принадлежит и вся группа G , так как $S \cdot e^* = \{G + \dots\} \cdot e^* \supseteq G$. Так как множество \mathfrak{n} есть идеал, то $G \subseteq \mathfrak{n}$. Поэтому $G = \mathfrak{n}$.

Лемма 2. Пусть e^* и \mathfrak{n} имеют то же значение, как и в лемме 1. Тогда для каждого $a \in S$ будет $ae^* \in \mathfrak{n}$.

Доказательство. Вытекает из соотношения $a \cdot e^* \in S \cdot \mathfrak{n} = \mathfrak{n}$.

Пусть χ — произвольный характер полугруппы S . Для каждого идемпотента $e_x \in S$ имеет место $\chi(e_x^2) = \chi(e_x)$, т. е. $\chi(e_x)[\chi(e_x) - 1] = 0$, $\chi(e_x) = 1$.

Теперь докажем теорему, которая сводит изучение характеров полугруппы S к изучению характеров замкнутой подгруппы \mathfrak{n} .

Теорема 2. Пусть \mathfrak{n} — минимальный идеал хаусдорфовой бикомпактной коммутативной полугруппы S . Тогда множество S^* характеров полугруппы S изоморфно группе характеров группы \mathfrak{n} .

Доказательство. Пусть $\mathfrak{n} = \{u_\nu / \nu \in T\}$ — минимальный идеал из S . Обозначим символом A_ν множество всех элементов $x \in S$, для которых $x \cdot e^* = u_\nu$. Множество A_ν непусто, так как к нему принадлежит по крайней мере элемент u_ν . Следовательно, по лемме 2, S разложится в сумму дизъюнктивных слагаемых $S = \sum_{\nu \in T} A_\nu$.

Пусть χ — какой-либо характер полугруппы S . Тогда для каждого $a_\nu \in A_\nu$

$$\begin{aligned} a_\nu e^* &= u_\nu, \\ \chi(a_\nu) \cdot \chi(e^*) &= \chi(u_\nu), \end{aligned}$$

т. е.

$$\chi(a_\nu) = \chi(u_\nu).$$

Каждый характер $\chi \in S^*$ принимает, следовательно, на всем множестве A_ν одно и то же значение, а именно значение $\chi(u_\nu)$.

Каждый характер $\chi \in S^*$ индуцирует на группе \mathfrak{n} какой-то характер $\psi(x)$ группы \mathfrak{n} . По только что доказанному два характера $\in S^*$, которые принимают одинаковые значения на \mathfrak{n} , принимают одинаковые значения на всем S , т. е. они тождественны. Следовательно, два различных характера $\chi_1, \chi_2 \in S^*$ индуцируют на \mathfrak{n} два различных характера ψ_1, ψ_2 . Произведение $\chi_1 \cdot \chi_2$ индуцирует на группе \mathfrak{n} , очевидно, произведение характеров $\psi_1 \cdot \psi_2$ группы \mathfrak{n} .

Пусть, наоборот, ψ — некоторый характер группы \mathfrak{n} . Определим комплексную функцию $\chi(a)$ на S следующим образом:

для $a \in S$ пусть будет

$$\chi(a) = \psi(ae^*). \quad (2)$$

Функция $\chi(x)$ имеет следующее свойство: для $a, b \in S$ имеет место

$$\chi(a) \cdot \chi(b) = \psi(ae^*) \cdot \psi(be^*) = \psi(abe^*) = \chi(ab).$$

Для того, чтобы доказать, что χ является характером, необходимо еще доказать, что построенная таким образом функция χ непрерывна на S . Зададимся некоторым $\varepsilon > 0$; следует показать, что для данного $a \in S$ существует окрестность $U(a)$ такая, что для каждого $b \in U(a)$ $|\chi(a) - \chi(b)| < \varepsilon$. Так как ψ (как характер группы \mathfrak{n}) является на \mathfrak{n} непрерывной функцией, то для данного $\varepsilon > 0$ существует такое $U(ae^*)$, что для каждого $v \in U(ae^*) \cap \mathfrak{n}$ будет $|\psi(ae^*) - \psi(v)| < \varepsilon$. Так как операция умножения на S непрерывна, то существует окрестность $U(a)$ такая, что $U(a) \cdot e^* \subseteq U(ae^*)$. Это $U(a)$ имеет искомого свойства. Ибо, если $b \in U(a)$, то $be^* \in U(ae^*)$; одновременно $be^* \in \mathfrak{n}$, т. е. $be^* \in U(ae^*) \cap \mathfrak{n}$. Следовательно, $|\chi(a) - \chi(b)| =$

$= |\psi(ae^*) - \psi(be^*)| < \varepsilon$. Функция χ , определяемая соотношением (2), является, следовательно, характером полугруппы S .

Для двух различных характеров ψ_1, ψ_2 группы π мы получаем таким образом, очевидно, два различных характера χ_1, χ_2 полугруппы S . Произведению характеров $\psi_1\psi_2$ группы π соответствует характер

$$\Phi(a) = \psi_1\psi_2(ae^*) = \psi_1(ae^*) \cdot \psi_2(ae^*) = \chi_1(a) \cdot \chi_2(a),$$

то есть, произведение характеров χ_1, χ_2 полугруппы S .

Из этого следует, что $\chi \longleftrightarrow \psi$ есть изоморфизм, и теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Schwarz Št., Теория характеров коммутативных полугрупп, Чехословацкий математический журнал, т. 4 (79), 1954, 219 – 247.
- [2] Schwarz Št.: К теории хаусдорфовых бикompактных полугрупп, Чехословацкий математический журнал, т. 5 (80), 1955, 1 — 23.

Summary

CHARACTERS OF BICOMPACT SEMIGROUPS

ŠTEFAN SCHWARZ, Bratislava.

(Received August 23, 1954.)

Let S be a commutative Hausdorff bicom pact semigroup. By a character we mean a continuous complex-valued function χ defined on S with values of absolute value unity and satisfying the relation $\chi(a) \cdot \chi(b) = \chi(ab)$ for every $a, b \in S$.

If we define the multiplication of characters in the usual manner, then the set of all characters forms a group S^* . The purpose of this paper is to find the structure of S^* .

The set of all idempotents of a commutative semigroup S can be partially ordered in an obvious manner. The idempotents $\epsilon \in S$ form then a semi-lattice. It is essential for our purposes that if S is a Hausdorff bicom pact semigroup, this semi-lattice has a unique least idempotent e .

Let π be the maximal subgroup of S with e as its unit element. The main result of the paper is: S^* is isomorphic to the group of characters of the group π .