Jaroslav Kurzweil

Об обращении второй теоремы Ляпунова об устойчивости движения

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 5 (1955), No. 3, 435–(438)

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100158

ОБ ОБРАЩЕНИИ ВТОРОЙ ТЕОРЕМЫ ЛЯПУНОВА ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ

ЯРОСЛАВ КУРЦВЕЙЛЬ (Jaroslav Kurzweil), Прага.

(Поступило в редакцию 12/VI 1955 г.)

В настояшей заметке дается краткое изложение работы, которая будет опубликована позднее.

Предположим, что G — открытое множество $0 \in G \subset E_n$, обозначим через F дополнение множества G и положим

$$\omega(x) = \max\left(\varrho(x, 0), \frac{1}{\varrho(x, F)} - \alpha\right),$$

где α — постоянное, $\alpha > \dfrac{2}{\varrho(0, F)}$, $(\omega(x) = \varrho(x, 0)$, если $G = E_n)$.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = f_i(x_1, \ldots, x_n, t) \quad i = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{1}$$

Мы предполагаем, что функции $f_i(x_1, \ldots, x_n, t)$ определены и непрерывны для $(x_1, \ldots, x_n) = x \in G$, $t \geq 0$.

Предположим, что существуют функции $V(x, t)$, $U_1(x)$, $U_2(x)$, $U_3(x)$ такие, что выполняются следующие условия:

(I) Функция $V(x, t) = V(x_1, \ldots, x_n, t)$ определена и непрерывна для $x \in G$, $t \geq 0$, причем частные производные $\dfrac{\partial V}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial V}{\partial t}$ также непрерывны.

(II) Функции $U_1(x)$, $U_2(x)$, $U_3(x)$ непрерывны в G, $U_1(0) = U_2(0) = U_3(0) = 0$, $U_1(x) > 0$, $U_2(x) > 0$, $U_3(x) > 0$ если $x \neq 0$, $U_2(x) \to \infty$ для $\omega(x) \to \infty$.

(III) $U_2(x) \leq V(x, t) \leq U_1(x)$, $x \in G$, $t \geq 0$.

(IV) $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial V}{\partial x_i} f_i + \dfrac{\partial V}{\partial t} \leq -U_3(x), \quad x \in G\,, \quad t \geq 0\,.$

Нетрудно доказать, что при этих условиях существуют функции $\varphi(t)$, $\Lambda(\eta)$, выполняющие следующие условия:

(V) Функция $\varphi(t)$ определена и непрерывна для $-\infty < t < +\infty$, убывает и

$$\varphi(t) \to 0 \quad \text{если} \quad t \to \infty ,$$
$$\varphi(t) \to \infty \quad \text{если} \quad t \to -\infty .$$

(VI) Функция $\Lambda(\eta)$ определена и непрерывна для $\eta > 0$, убывает и

$$\Lambda(\eta) \to \infty \quad \text{если} \quad \eta \to 0 ,$$
$$\Lambda(\eta) \to -\infty \quad \text{если} \quad \eta \to \infty .$$

(VII) Если $y(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t))$ является решением системы (1), определенным для $0 \leq t_0 \leq t \leq t_1 \leq \infty$, то существует решение $x(t) = (x_1(t), \ldots, \ldots, x_n(t))$ системы (1), определенное для $t \geq t_0$ и удовлетворяющее условиям

$$x(t) = y(t) , \quad t_0 \leq t \leq t_1 ,$$
$$\omega(x(t)) \leq \varphi(t - t_0 - \Lambda(\omega(y(0)))) .$$

Это есть очевидное обобщение второй теоремы Ляпунова об устойчивости движения. Главным результатом настоящей работы является следующая теорема:

Теорема. *Пусть существуют функции $\varphi(t)$, $\Lambda(\eta)$, удовлетворяюшие условият* (V), (VI), (VII). *Тогда существует функция $V(x, t)$, удовлетворяюшая условиям* (I), (II), (III), (IV). *Функция $V(x, t)$ обладает непрерывными производными любого порябка относительно переменных $x_1, \ldots, x_n, t$.*

Для доказательства этой теоремы можно ограничиться предположением о непрерывности функций $f_i(x_1, \ldots, x_n, t)$ и нет необходимости предполагать, что интеграл системы (1) однозначно определяется начальными значениями. Эта теорема является обобщением результатов, полученных Малкиным, Барбашиным и Красовским, Зубовым.

Summary

ON THE REVERSIBILITY OF THE SECOND THEOREM OF LYAPUNOV CONCERNING THE STABILITY OF MOTION

JAROSLAV KURZWEIL, Praha.

(Received June 12, 1955.)

This is a brief account of a paper to be published later.

Let us suppose that G is an open set $0 \in G \subset E_n$, let us denote by F the complement of the set G and let us put

$$\omega(x) = \max \left(\varrho(x, 0), \frac{1}{\varrho(x, F)} - \alpha\right),$$

where α is a constant,

$$\alpha > \frac{2}{\varrho(0, F)},$$

$$(\omega(x) = \varrho(x, 0) \ \text{if} \ G = E_n).$$

Let us consider the system of differential equations

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n, t) \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{1}$$

We suppose that the function $f_i(x_1, \dots, x_n, t)$ are defined and continuous for $(x_1, \dots, x_n) = x \in G, t \geq 0$.

Let us suppose that there are functions $V(x, t)$, $U_1(x)$, $U_2(x)$, $U_3(x)$ such that the following conditions an fulfilled:

(I) The function $V(x, t) = V(x_1, \dots, x_n, t)$ is defined and continuous for $x \in G$, , $t \geq 0$, the partial derivatives $\frac{\partial V}{\partial x_i}$, $\frac{\partial V}{\partial t}$ being continuous.

(II) The functions $U_1(x)$, $U_2(x)$, $U_3(x)$ are continuous in G, $U_1(0) = U_2(0) = U_3(0) = 0$, $U_1(x) > 0$, $U_2(x) > 0$, $U_3(x) > 0$ if $x \neq 0$, $U_2(x) \to \infty$ for $\omega(x) \to \infty$.

(III) $U_2(x) \leq V(x, t) \leq U_1(x)$, $x \in G$, $t \geq 0$.

(IV) $\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i + \frac{\partial V}{\partial t} \leq - U_3(x)$, $x \in G$, $t \geq 0$.

It is easy to prove thet under these conditions there exist functions $\varphi(t)$, $\Lambda(\eta)$ fulfilling the following conditions:

(V) The function $\varphi(t)$ is defined and continuous for $-\infty < t < \infty$, decreasing and

$$\varphi(t) \to 0 \quad \text{if} \quad t \to \infty,$$

$$\varphi(t) \to \infty \quad \text{if} \quad t \to -\infty.$$

(VI) The function $\Lambda(\eta)$ is defined and continuous for $\eta > 0$, decreasing and

$$\Lambda(\eta) \to \infty \quad \text{if} \quad \eta \to 0,$$

$$\Lambda(\eta) \to -\infty \quad \text{if} \quad \eta \to \infty.$$

(VII) If $y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$ is a solution of the system (1) defined for $0 \leq t_0 \leq t \leq t_2 \leq \infty$, then there is a solution $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ of the system (1) defined for $t \geq t_0$ and satisfying the conditions

$$x(t) = y(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1,$$

$$\omega(x(t)) \leq \varphi(t - t_0 - \Lambda(\omega(y(0)))).$$

This is an obvious generalisation of the Lyapunov's second theorem on the stability of motion. The main result of the present paper is the following theorem:

Theorem. *Let us suppose that are functions $\varphi(t)$, $\Lambda(\eta)$, which fulfil the conditions* (V), (VI), (VII). *Then there exists a function $V(x, t)$ fulfilling the conditions* (I), (II), (III), (IV). *The function $V(x, t)$ has continuous derivatives of all orders with respect to the variables $x_1, \ldots, x_n, t$.*

In order to prove this theorem we may suppose only that the functions $f_i(x_2, \ldots, x_n, t)$ are continuous and we need not suppose that the integral of the system (1) is uniquely defined by the initial values. This theorem is a generalisation of results due to MALKIN, BARBAŠIN and KRASOVSKIJ, ZUBOV.

Redakce: Matematický ústav Československé akademie věd Praha II, Žitná 25, tel. 241193. — Administrace: Nakladatelství Československé akademie věd, Praha II, Vodičkova 40, telefon 2462-41. — Vychází čtvrtletně. — Roční předplatné Kčs 48,—, cena jednotlivého sešitu Kčs 12,—. Účet Státní banky československé č. 38-161-0087, číslo směrovací 0152-1. Novinové výplatné povoleno Okrskovým poštovním úřadem Praha 022: j. zn. 309-38-Ře-52. — Dohlédací poštovní úřad Praha 022. — Tisknou a expedují Pražské tiskárny n. p., provozovna 05 (Prometheus), Praha VIII, Tř. Rudé armády 171. — Vyšlo 30. IX. 1955. D - 00583