Václav Dupač

О стохастическом видоизменении одной проблемы из геометрии чисел

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 5 (1955), No. 4, 492–502

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100165

О СТОХАСТИЧЕСКОМ ВИДОИЗМЕНЕНИИ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЫ ИЗ ГЕОМЕТРИИ ЧИСЕЛ

ВАЦЛАВ ДУПАЧ (Václav Dupač), Прага.

(Поступило в редакцию 15/IV 1955 г.)

Пусть $\{J(x)\}_{0 \leqq x < \infty}$ — множество кривых, возникающих из замкнутой звездчатой кривой $J = J(1)$ преобразованием гомотетии в отношении $\sqrt{x} : 1$. Пусть в каждом квадрате целочисленной решетки случайно избрана одна точка, и пусть $A(x)$ обозначает число этих точек, лежащих внутри кривой $J(x)$.

В статье выведены порядковые оценки величины функции $A(x)$, справедливые с вероятностью единица.

Рассмотрим следующее стохастическое видоизменение проблемы целых точек:

Пусть

$$J = \underset{(r,\varphi)}{\mathrm{E}} \, [0 \leqq \varphi < 2\pi \,, \quad r = g(\varphi)] \tag{1}$$

— замкнутая звездчатая кривая на плоскости переменных

$$u = r \cos \varphi \,, \quad v = r \sin \varphi \,.$$

Относительно функции $g(\varphi)$ предположим, что она — положительная, периодическая (с периодом 2π) и удовлетворяющая условию

$$|g(\varphi_1) - g(\varphi_2)| \leqq \gamma |\varphi_1 - \varphi_2| \quad \text{для всех } \varphi_1, \varphi_2 \,, \tag{2}$$

где γ — постоянная.

Пусть существует дуга $B \subset J$, для которой

$$B = \underset{(u,v)}{\mathrm{E}} \, [u \in I \,, \quad v = f(u)] \,, \tag{3}$$

где I — невырожденный промежуток на оси u, и $f(u)$ есть такая функция, что

$$k_0 \leqq |f'(u)| \leqq k_1 \,; \quad |f''(u)| < k_2 \quad \text{для всех } u \in I \tag{4}$$

(k_0, k_1, k_2 — положительные постоянные).

Далее, пусть имеет место: если для всякого $\varepsilon > 0$ означает

$$B_\varepsilon = \underset{(u,v)}{\mathrm{E}} \left[u \in I \,, \quad 0 < |v - f(u)| < \varepsilon \right] , \tag{5}$$

то $B_{\varepsilon_1} J = \emptyset$ для некоторого $\varepsilon_1 > 0$.

Пусть L — длина кривой J, пусть P — площадь замкнутой области G, ограниченной кривою J.

Для $x \geqq 0$ определим

$$J(x) = \underset{(u\sqrt{x},\, v\sqrt{x})}{\mathrm{E}} \left[(u, v) \in J \right] ,$$

т. е. $J(x)$ возникнет из J преобразованием гомотетии в отношении $\sqrt{x} : 1$ относительно начала координат.

Очевидно, что $\sqrt{x}L$ есть длина кривой $J(x)$, а xP — площадь замкнутой области $G(x)$.

Квадратом решетки назовем всякий замкнутый квадрат единичной площади, все вершины которого — целые точки. Упорядочим все квадраты решетки в простую последовательность $Q_1, Q_2, \ldots, Q_i, \ldots$

Определим последовательность $Z_1, Z_2, \ldots, Z_i, \ldots$ двумерных случайных величин таким образом, что

1° для всякого $i = 1, 2, \ldots$ Z_i равномерно распределена в квадрате Q_i, т. е. $\mathsf{P}(Z_i \in M) = \mathrm{mes}(MQ_i)$ для всякого борелевского множества $M \subset E_2$.

2° случайные величины Z_i взаимно стохастически независимы — т. е. $\mathsf{P}(Z_{i_1} \in M_1, Z_{i_2} \in M_2, \ldots, Z_{i_n} \in M_n) = \mathsf{P}(Z_{i_1} \in M_1)\, \mathsf{P}(Z_{i_2} \in M_2) \ldots \mathsf{P}(Z_{i_n} \in M_n)$ для всякой конечной системы индексов $i_1, i_2, \ldots, i_n$ и для всех борелевских $M_1, M_2, \ldots, M_n$.

Последовательность $\{Z_i\}$ назовем ,,случайно размещенной решеткой".

Положим теперь

$$A(x) = \sum_{Z_i \in G(x)} 1 \,; \quad R(x) = A(x) - xP \,,$$

т. е. $A(x)$ есть число точек ,,случайно размещенной решетки", лежащих внутри или на кривой $J(x)$, и $R(x)$ — разность этого числа и соответствующей площади.

Тогда справедлива

теорема А. 1° $\mathsf{M}A(x) = xP$ *для всех* $x \geqq 0$;

2° *существуют положительные постоянные* α, β *такие, что*

$$\alpha\sqrt{x} \leqq \mathsf{D}A(x) \leqq \beta\sqrt{x}\,^{*)}$$

для всех достаточно больших x;

---

*) Символом $\mathsf{M}A(x)$ обозначаем математическое ожидание случайной величины $A(x)$ и символом $\mathsf{D}A(x)$ — ее дисперсию.

$3°$ *если* $x \to \infty$, *то*

$$R(x) = \Omega(x^{\frac{1}{4}} \log^{\frac{1}{2}} x)$$

с вероятностью единица;

$4°$ *если* $x = x_n \to \infty$ *так, что* $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n^\varepsilon} > 0$ *для подходящего* $\varepsilon > 0$, *то*

$$R(x) = O(x^{\frac{1}{4}} \log^{\frac{1}{2}} x)$$

с вероятностью единица.

Для более общих фигур нетрудно доказать следующее утверждение:

Пусть S — простая, замкнутая, спрямляемая поверхность в E_r. (Поверхность $S \subset E_r$ называется *спрямляемой*, если S есть образом $(r-1)$-мерного куба, т. е. $S = \psi(C_{r-1})$, и если отображение ψ удовлетворяет условию

$$\|\psi(a) - \psi(b)\| \leqq \mu\|a - b\| \quad a \in C_{r-1},\, b \in C_{r-1}\,; \quad \mu \text{ — постоянная}) \,. \qquad (6)$$

Пусть V — объем тела M, ограниченного поверхностью S. Для $x \geqq 0$ определим

$$S(x) = \underset{(u_1\sqrt{x}, \ldots, u_r\sqrt{x})}{\mathrm{E}} [(u_1, \ldots, u_r) \in S]\,.$$

Очевидно, что $x^{\frac{r}{2}}V$ есть объем тела $M(x)$, ограниченного поверхностью $S(x)$.

Пусть Q'_i, $i = 1, 2, \ldots$ — все кубы решетки пространства E_r, упорядоченные в последовательность. Пусть Z'_i, $i = 1, 2, \ldots$ — взаимно независимые r-мерные случайные величины такие, что Z'_i равномерно распределена в Q'_i $(i = 1, 2, \ldots)$; пусть

$$A(x) = \sum_{Z'_i \in M(x)} 1\,; \quad R(x) = A(x) - x^{\frac{r}{2}}V\,.$$

Тогда имеет место

теорема Б. $1°$ $\mathsf{M}A(x) = x^{\frac{r}{2}}V$ *для всех* $x \geqq 0$;

$2°$ *существует постоянная* β' *такая, что*

$$\mathsf{D}A(x) \leqq \beta' x^{\frac{r-1}{2}}$$

для всех $x \geqq 0$;

$3°$ *если* $\lambda(x)$ — *положительная функция, для которой* $\lim\limits_{x\to\infty} \lambda(x) = \infty$, *то найдется последовательность* $x_n \to \infty$ (*зависящая от* λ) *такая, что* $R(x_n) = o(x_n^{\frac{r-1}{4}} \lambda(x_n))$ *с вероятностью единица.*

Интересно сравнить утверждения теоремы А с оценками, известными для *классической проблемы* о числе целых точек внутри концентрических кругов с центром в начале координат и с радиусами $\sqrt{x}$ $(x \geqq 0)$. Если $A(x)$

означает это число целых точек и $R(x) = A(x) - \pi x$, то нижняя оценка дается выражением

$$R(x) = \Omega(x^{\frac{1}{4}} \log^{\frac{1}{4}} x), \quad (\text{Hardy } 1915)$$

и верхняя оценка

$$R(x) = O(x^{\frac{13}{40}}) \quad (\text{Hua Loo Keng } 1942)$$

Что касается теоремы Б, то она имеет применение для приблизительного вычисления объемов многомерных тел, определенных сложными неявными взаимоотношениями между координатами. Это применение подробно разобрано в статье [2], § 3.

Доказательство теоремы А. I. Для $x \geqq 0$ определим случайные величины $Y_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots$, следующим образом:

$$Y_i(x) = \begin{matrix} 1, & \text{если } Z_i \in G(x)\,, \\ 0, & \text{если } Z_i \text{ non}\in G(x)\,. \end{matrix}$$

Очевидно, $Y_i(x)$ ($i = 1, 2, \ldots$) независимы, и

$$\mathsf{P}(Y_i(x) = 1) = \mathsf{P}(Z_i \in G(x)) = \text{mes}\,(G(x)\,Q_i)$$

— обозначим эту вероятность через $p_i(x)$;

$$\mathsf{P}(Y_i(x) = 0) = 1 - p_i(x)\,.$$

Так как $A(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} Y_i(x)$, то

$$\mathsf{M}A(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{M}Y_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i(x) = \text{mes}\,(G(x)) = xP\,;$$

$$\mathsf{D}A(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{D}Y_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i(x)(1 - p_i(x))\,,$$

где все ряды бесконечны только формально. Число отличных от нуля слагаемых в последнем ряду не превосходит числа квадратов решетки, через которые проходит кривая $J(x)$. Но их не больше, чем $4L\sqrt{x} + 4$. (Кривую $J(x)$ можно разбить на $[L\sqrt{x}] + 1$ дуг, длина каждой из которых < 1; ни одна из этих дуг не может проходить через больше чем четыре квадрата решетки, так как между всякими пятью квадратами имеются два, находящиеся на расстоянии $\geqq 1$.)

Из неравенства $p(1 - p) \leqq \frac{1}{4}$ (для $0 \leqq p \leqq 1$) вытекает

$$\mathsf{D}A(x) \leqq L\sqrt{x} + 1 \quad \text{для всех } x \geqq 0\,,$$

II. С целью выведения нижней оценки для $\mathsf{D}A(x)$, воспользуемся предположениями (3), (4) и (5).

Вместе с переходом от J к $J(x)$, промежуток I перейдет в промежуток $I(x)$, и дуга B перейдет в дугу

$$B(x) = \underset{(u,\,v)}{\mathrm{E}}\left[u \in I(x)\,, \quad v = \sqrt{x}\,f\left(\frac{u}{\sqrt{x}}\right)\right]\,.$$

Для $u \in I(x)$, $u + h \in I(x)$, имеем

$$v_{u+h} = \sqrt{x}\, f\left(\frac{u+h}{\sqrt{x}}\right) = \sqrt{x}\, f\left(\frac{u}{\sqrt{x}}\right) + h f'\left(\frac{u}{\sqrt{x}}\right) + \frac{h^2}{2\sqrt{x}} f''\left(\frac{u+\Theta h}{\sqrt{x}}\right) =$$
$$= \hat{v}_{u+h} + \frac{h^2}{2\sqrt{x}} f''\left(\frac{u+\Theta h}{\sqrt{x}}\right), \quad 0 \leqq \Theta \leqq 1\,,$$

где $\hat{v}_{u+h}$ — ордината касательной к $B(x)$ [с точкой касания (u, v)] в точке $u + h$, и v_{u+h} — ордината дуги $B(x)$ в точке $u + h$.

Из (4) вытекает

$$\operatorname*{Max}_{0 \leqq h \leqq 1} |v_{u+h} - \hat{v}_{u+h}| \leqq \frac{k_2}{2\sqrt{x}} \quad \text{для всех } u \in I(x) \text{ таких, что } u + 1 \in I(x)\,. \tag{7}$$

Пусть u_0 — наименьшее, и $u_0 + t$ — наибольшее целое число из $I(x)$; обозначим $u_j = u_0 + j$, и через v_j обозначим ординату дуги $B(x)$ в точке u_j.

Пусть η — положительное число. Тогда, если x достаточно велико, будет:

1° $t \geqq 1$;

2° во всяком промежутке $\langle u_j, u_{j+1} \rangle$, $j = 0, 1, \ldots, t-1$, дуга $B(x)$ и касательная с точкой касания (u_j, v_j) отличаются на меньше чем η [в смысле (7)];

3° те квадраты решетки, через которые проходит дуга $B(x)$ и которые несодержат точек с абсциссами u_{-1} или u_{t+1}, не содержат уже никаких других точек кривой $J(x)$. $\Bigl($Для этой цели — ввиду (4) и (5) — достаточно взять $x > \dfrac{(1+k_1)^2}{\varepsilon_1^2}$.$\Bigr)$

Положим $\delta = \operatorname{Min}\left(k_0, \dfrac{1}{k_1}\right)$. Фиксируем целое число j, $0 \leqq j \leqq t - 1$. Обозначим $\hat{B}(x)$ касательную к $B(x)$ с точкой касания (u_j, v_j); предположим — не ограничивая общности —, что $f'\left(\dfrac{u_j}{\sqrt{x}}\right) > 0$. Через Q_* обозначим квадрат решетки, левой нижней вершиной которого является точка $(u_j, [v_j])$. $\hat{B}(x)$ разделяет квадрат Q_* на две части. Если точка $(u_{j+\frac{1}{2}}, v_{j+\frac{1}{2}}) \in Q_*$, то площадь каждой из обеих частей не меньше $\frac{1}{8}\delta$. (Равенство имеет место в том случае, когда точка $(u_{j+\frac{1}{2}}, v_{j+\frac{1}{2}})$ лежит на границе Q_* и угловой коэффициент $\hat{B}(x)$ равен δ.)

Если $(u_{j+\frac{1}{2}}, v_{j+\frac{1}{2}})$ non $\in Q_*$, то площадь каждой из обеих частей квадрата решетки Q^*, левой нижней вершиной которого является точка $(u_j, [v_j] + 1)$, не меньше $\frac{1}{8}\delta$.

Дуга $B(x)$ тоже разделает Q_* на две части. Если $\eta < \frac{1}{36}\delta$, то в силу 2° каждая из обеих частей квадрата Q_* (или Q^*) имеет площадь $> \frac{1}{8}\delta - \frac{1}{2}\eta > \frac{1}{9}\delta$.

Следовательно, в сумме $\mathsf{D}A(x) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i(x)(1 - p_i(x))$ не меньше чем t слагаемых, больших чем $\frac{1}{9}\delta(1 - \frac{1}{9}\delta)$ (так как функция $p(1 - p)$ возрастает в промежутке $\langle 0, \frac{1}{2}\rangle$). Пусть δ_1 — длина промежутка I; тогда $\delta_1\sqrt{x}$ — длина промежутка $I(x)$ и

$$t > [\delta_1\sqrt{x}] - 2 > \tfrac{8}{8}\tfrac{1}{2}\delta_1\sqrt{x}$$

для достаточно больших x.

В итоге мы получаем

$$\mathsf{D}A(x) > \frac{\delta(9 - \delta)\,\delta_1}{82}\sqrt{x}$$

для всех x, больших чем некоторое x_0.

III. Для фиксированного $x > x_0$ пусть $i_1, i_2, \ldots, i_m$ означает все те номера i, для которых $0 \neq p_i(x) \neq 1$. Положим

$$W_k = Y_{i_k}(x) - p_{i_k}(x) \quad k = 1, 2, \ldots, m\,. \tag{8}$$

Очевидно, что $|W_k| < 1, k = 1, 2, \ldots, m$; далее, $R(x) = \sum_{k=1}^{m} W_k$, так как $R(x) = A(x) - xP = \sum_{i=1}^{\infty} (Y_i(x) - p_i(x))$, а в последней сумме отличны от нуля только слагаемые номеров $i_1, i_2, \ldots, i_m$. Обозначим

$$s^2 = \sum_{k=1}^{m} \mathsf{D}W_k\,.$$

Из того, что $s^2 = \mathsf{D}R(x) = \mathsf{D}A(x)$, следует

$$ax^{\frac{1}{4}} < s < bx^{\frac{1}{4}}\,,$$

где a, b — положительные постоянные, независящие от x.

В дальнейшем мы воспользуемся результатом Феллера, касающимся вопросов о т. наз. вероятностях больших отклонений. (См. [1], теорема I. и формула 2.10.) Приведенная теорема гласит:

Пусть $W_1, W_2, \ldots, W_m$ — *независимые случайные величины, пусть* $\mathsf{M}W_k = 0$, $\mathsf{D}W_k < \infty$, $k = 1, 2, \ldots, m$.

Обозначим $s^2 = \sum_{k=1}^{m} \mathsf{D}W_k$. *Пусть для некоторых* λ, z *имеют место неравенства* $|W_k| < \lambda s$, $k = 1, 2, \ldots, m$; $0 < \lambda z < \frac{1}{12}$.

Тогда

$$\mathsf{P}\Big(\sum_{k=1}^{m} W_k > zs\Big) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} z^{-1} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}z^2(1+Q(z))}\left(1 - \frac{\vartheta}{z^2} + (2\pi)^{\frac{1}{2}}\,\Theta\lambda z\right),$$

где $0 < \vartheta < 1$, $|\Theta| < 9$,

$$Q(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} q_\nu z^\nu\,, \quad |q_\nu| < \tfrac{1}{7}(12\lambda)^\nu\,.$$

Ясно, что определенные по формуле (8) случайные величины подчиняются требованиям теоремы Феллера, вместе с числами

$$\lambda = \frac{1}{ax^{\frac{1}{4}}}, \quad 0 < z < \frac{ax^{\frac{1}{4}}}{12}.$$

Пусть c — положительная постоянная; тогда, в силу $\frac{s}{bx^{\frac{1}{4}}} < 1$, будет

$$\mathsf{P}\left(\frac{R(x)}{x^{\frac{1}{4}}\log^{\frac{1}{2}} x} > c\right) \leqq \mathsf{P}\left(\frac{R(x)}{x^{\frac{1}{4}}\log^{\frac{1}{2}} x} > \frac{cs}{bx^{\frac{1}{4}}}\right) = \mathsf{P}\,(\sum_{k=1}^{m} W_k > zs),$$

где $z = \frac{c}{b}\log^{\frac{1}{2}} x \left(\text{и, следовательно, } \lambda z = \frac{c\log^{\frac{1}{2}} x}{abx^{\frac{1}{4}}}\right)$.

Если теперь c фиксировано и если $x \to \infty$, то

$$z \to \infty \quad \text{и} \quad |Q(z)| \leqq \sum_{\nu=1}^{\infty} |q_\nu|\, z^\nu < \frac{1}{7}\cdot\frac{12\lambda z}{1-12\lambda z} \to 0.$$

Таким образом, для любых $1 > \eta_1 > 0$, $\eta_2 > 0$ и для всякого $x > x^*(\eta_1, \eta_2)$

$$\mathsf{P}\left(\frac{R(x)}{x^{\frac{1}{4}}\log^{\frac{1}{2}} x} > c\right) \leqq \mathsf{P}\,(\sum_{k=1}^{m} W_k > zs) <$$

$$< \frac{1}{\sqrt{2\pi z}}\, e^{-\frac{1}{2}z^2(1-\eta_1)}\,(1+\eta_2) = \frac{b(1+\eta_2)}{c\sqrt{2\pi}\log^{\frac{1}{2}} x}\, e^{-\frac{c^2(1-\eta_1)}{2b^2}\log x} < x^{-\frac{c^2(1-\eta_1)}{2b^2}}.$$

Так как все предыдущие утверждения, касающиеся случайных величин W_k, справедливы и для величин $-W_k$, то последнее неравенство останется справедливым и для вероятности $\mathsf{P}\left(\frac{R(x)}{x^{\frac{1}{4}}\log^{\frac{1}{2}} x} < -c\right)$ и, следовательно, (с удвоенной правой частью) тоже для вероятности $\mathsf{P}\left(\frac{|R(x)|}{x^{\frac{1}{4}}\log^{\frac{1}{2}} x} > c\right)$.

Пусть теперь $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — последовательность положительных чисел такая, что $x_n \to \infty$, $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n^\varepsilon} = \alpha_1 > 0$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Тогда $x_n > \frac{1}{2}\alpha_1 n^\varepsilon$ для $n > N$; это значит, что

$$x_n^{-\frac{c^2(1-\eta_1)}{2b^2}} < \text{const.}\, n^{-\frac{c^2\varepsilon(1-\eta_1)}{2b^2}}.$$

Следовательно, существует $c > 0$ (зависящее только от ε) так, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{c^2\varepsilon(1-\eta_1)}{2b^2}}$ служит сходящимся мажорантным рядом для

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}\left(\frac{|R(x_n)|}{x_n^{\frac{1}{4}}\log^{\frac{1}{2}} x_n} > c\right).$$

Из первой леммы Бореля-Кантелли вытекает результат

$$\mathsf{P}\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{|R(x_n)|}{x_n^{\frac{1}{4}}\log^{\frac{1}{2}}x_n}\leqq c\right)=1\,.$$

IV. Пусть $d>0$; тогда

$$\mathsf{P}\left(\frac{R(x)}{x^{\frac{1}{4}}\log^{\frac{1}{2}}x}>d\right)\geqq \mathsf{P}\left(\frac{R(x)}{x^{\frac{1}{4}}\log^{\frac{1}{2}}x}>\frac{sd}{ax^{\frac{1}{4}}}\right)=\mathsf{P}\left(\sum_{k=1}^{m}W_k>z's\right),$$

где $z'=\dfrac{d}{a}\log^{\frac{1}{2}}x$.

Для любых $\eta_1'>0$, $1>\eta_2'>0$ и для $x>x_*(\eta_1'\eta_2')$ имеет место

$$\mathsf{P}\left(\sum_{k=1}^{m}W_k>z's\right)>\frac{1}{\sqrt{2\pi}z'}\,e^{-\frac{1}{2}z'^2(1+\eta_1')}\,(1-\eta_2')=$$

$$=\frac{a(1-\eta_2')}{d\sqrt{2\pi}\log^{\frac{1}{2}}x}\,e^{-\frac{d^2(1+\eta_1')}{2a^2}\log x}=\mathrm{const}\,.\,x^{-\frac{d^2(1+\eta_1')}{2a^2}}\log^{-\frac{1}{2}}x\,,$$

и то же самое неравенство справедливо и для $\mathsf{P}\left(\dfrac{R(x)}{x^{\frac{1}{4}}\log^{\frac{1}{2}}x}<-d\right)$.

Доказательство следующего вспомогательного утверждения опирается на предположения (1) и (2).

Обозначим $\varrho=\min\limits_{(r,\varphi)\in J}r$. *Пусть для* x', x'' *выполняется неравенство*

$$\frac{2\sqrt{2}}{\varrho}<\sqrt{x'}<\sqrt{x''}-\frac{\sqrt{2}(2\gamma+\varrho)}{\varrho^2}\,. \tag{9}$$

(Значение постоянной γ — смотри (2)!) *Тогда не существует ни одного квадрата решетки, через который проходили бы одновременно кривые* $J(x')$ *и* $J(x'')$.

Предположим противное: пусть имеются точки $z_1=(r_1,\varphi_1)\in J$, $z_2=(r_2,\varphi_2)\in J$ и квадрат решетки Q_a так, что $z_1\sqrt{x'}\in Q_a$, $z_2\sqrt{x''}\in Q_a$. Тогда должно быть

$$|\varphi_1-\varphi_2+2k\pi|<\frac{2\sqrt{2}}{\varrho\sqrt{x'}}\quad\text{для одного из}\quad k=-1,0,1\,. \tag{10}$$

(Квадрат Q_a находится вне окружности K с центром в начале координат и с радиусом $\dfrac{\varrho\sqrt{x'}}{2}$, ибо

$$r_1\sqrt{x'}-\sqrt{2}\geqq\varrho\sqrt{x'}-\sqrt{2}>\frac{\varrho\sqrt{x'}}{2}\,.$$

Если бы выполнялось $|\varphi_1-\varphi_2+2k\pi|\geqq\dfrac{2\sqrt{2}}{\varrho\sqrt{x'}}$ для всех $k=-1,0,1$, то каждый отрезок, лежащий целиком вне K и соединяющий лучи O_{φ_1}, O_{φ_2}, имел бы длину

$$\geqq \varrho\sqrt{x'}\,.\,\mathrm{tg}\,\frac{\sqrt{2}}{\varrho\sqrt{x'}} > \sqrt{2}\,,$$

т. е. O_{φ_1} и O_{φ_2} не могли бы проходить через квадрат Q_a одновременно.)

В силу второго из неравенств (9), имеем

$$r_1\sqrt{x'} - r_2\sqrt{x'} > r_1\sqrt{x'} - r_2\sqrt{x''} + r_2\,\frac{\sqrt{2}(2\gamma+\varrho)}{\varrho^2} \geqq$$

$$\geqq r_1\sqrt{x'} - r_2\sqrt{x''} + \frac{2\sqrt{2}\gamma}{\varrho} + \sqrt{2} \geqq \frac{2\sqrt{2}\gamma}{\varrho}$$

(ибо $z_1\sqrt{x'}$ и $z_2\sqrt{x''}$ лежат в одном и том же квадрате решетки).

С другой стороны, из (10) и (2) следует

$$|g(\varphi_1) - g(\varphi_2)| \leqq \frac{2\sqrt{2}\gamma}{\varrho\sqrt{x'}}, \quad \text{т. е.} \quad r_1\sqrt{x'} - r_2\sqrt{x'} \leqq \frac{2\sqrt{2}\gamma}{\varrho}\,,$$

что и есть противоречие.

Если теперь $\left(\frac{2\sqrt{2}}{\varrho} <\right) x_1 < x_2 < \ldots$ — последовательность такая, что $\sqrt{x_n} < \sqrt{x_{n+1}} - \frac{\sqrt{2}(2\gamma+\varrho)}{\varrho^2}$ для всех n, то случайные величины $R(x_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, стохастически независимы, как следует из только что доказанного утверждения. Если кроме того $x_n = O(n^k)$ для некоторого $k(\geqq 2)$, то найдется $\beta_1 > 0$ такое, что $x_n < \beta_1 n^k$ для всех $n > N'$, т. е.

$$x_n^{-\frac{d^2(1+\eta_1')}{2a^2}} \log^{-\frac{1}{2}} x_n > \text{const.}\; n^{-\frac{kd^2(1+\eta_1')}{2a^2}} (\log\beta_1 + k\log n)^{-\frac{1}{2}}\,.$$

Таким образом, имеется $d > 0$ (зависящее от k) такое, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{k\,d^2(1+\eta_1')}{2a^2}} (\log\beta_1 + k\log n)^{-\frac{1}{2}}$ расходится и, следовательно, тоже мажорантный для него ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}\left(\frac{|R(x_n)|}{x_n^{\frac{1}{4}}\log^{\frac{1}{2}} x_n} > d\right)$ расходится. Вторая лемма Бореля-Кантелли (для независимых событий) дает результат:

$$\mathsf{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{|R(x_n)|}{x_n^{\frac{1}{4}}\log^{\frac{1}{2}} x_n} \geqq d > 0\right) = 1\,.$$

Таким образом, все утверждения 1°—4° теоремы А доказаны.

V. Доказательство теоремы Б нетрудно. Если $Y_i(x)$, $p_i(x)$ имеют аналогичное, как в доказательстве теоремы А, значение, то $A(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} Y_i(x)$ и, следовательно,

$$\mathsf{M}A(x) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i(x) = x^{\frac{r}{2}} V \ ,$$

$$\mathsf{D}A(x) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i(x)(1 - p_i(x)) \leqq \tfrac{1}{4} m(x) \ ,$$

где $m(x)$ — число кубов решетки, через которые проходит поверхность $S(x)$. Докажем, что $m(x) \leqq \text{const}.\ x^{\frac{r-1}{2}}$ для $x \geqq 1$.

Пусть q^{r-1} — объем куба C_{r-1}; предположим для удобства, что $2\mu q(r-1)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} = \tau x^{\frac{1}{2}}$ — целое число. (Случай, когда это предположение не выполняется, требует только более сложного записывания.) Разделим C_{r-1} на $\tau^{r-1} x^{\frac{r-1}{2}}$ кубов K_j, $j = 1, \ldots, \tau^{r-1} x^{\frac{r-1}{2}}$, ребро каждого из которых имеет длину $(2\mu)^{-1}\ (r-1)^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}}$. Если $a \in K_j$, $b \in K_j$, то

$$\|a - b\|_{r-1} \leqq (2\mu)^{-1} x^{-\frac{1}{2}} \quad \text{и} \quad \|x^{\frac{1}{2}}\psi(a) - x^{\frac{1}{2}}\psi(b)\|_r \leqq \tfrac{1}{2} < 1 \ .$$

Таким образом, разделению C_{r-1} на $\tau^{r-1} x^{\frac{r-1}{2}}$ кубов K_j отвечает разделение $S(x)$ на то же самое число поверхностей $S_j = x^{\frac{1}{2}}\psi(K_j)$, диаметры которых без исключения меньше единицы. Никакая из поверхностей S_j не может проходить через более чем 2^r кубов решетки, так как между любыми $2^r + 1$ кубами решетки найдутся два на расстоянии не меньше единицы. Следовательно,

$$m(x) \leqq 2^r \tau^{r-1} x^{\frac{r-1}{2}} \ .$$

Пусть функция $\lambda(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Б. Из неравенства Чебышева вытекает

$$\mathsf{P}\left(\frac{|R(x)|}{x^{\frac{r-1}{4}} \lambda(x)} \geqq \varepsilon \right) \leqq \frac{\mathsf{D}A(x)}{\varepsilon^2 x^{\frac{r-1}{2}} \lambda^2(x)} \leqq \frac{\text{const}}{\varepsilon^2 \lambda^2(x)} \to 0$$

при $x \to \infty$ для всякого $\varepsilon > 0$.

Следовательно,

1° $\dfrac{R(x)}{x^{\frac{r-1}{4}} \lambda(x)} \to 0$ по вероятности, при $x \to \infty$;

2° если $x_n \to \infty$ и $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^2(x_n)} < \infty$, то

$\dfrac{R(x_n)}{x_n^{\frac{r-1}{4}} \lambda(x_n)} \to 0$ с вероятностью единица.

Утверждение 2° вытекает опять из первой леммы Бореля-Кантелли.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *W. Feller*: Generalization of a probability limit theorem of Cramér. Trans. Amer. Math. Soc. *54* (1943), p. 361—372.

[2] *V. Dupač*: Stochastické početní methody. (Стохастические численные методы.) Čas. pěst. mat. *81* (1956), № 1.

Summary

ON A STOCHASTIC MODIFICATION OF A PROBLEM IN GEOMETRY OF NUMBERS

VÁCLAV DUPAČ, Praha.

(Received April 15, 1955.)

Let $\{J(x)\}_{0 \leqq x < \infty}$ be a system of plane curves which are all similar (with the scale factors $\sqrt{x} : 1$) to the closed asterisk-curve $J = J(1)$, satisfying some additional conditions.

Let $Q_1, Q_2, \ldots, Q_i, \ldots$ be all lattice-squares, arranged into a simple sequence. Let $Z_1, Z_2, \ldots, Z_i, \ldots$ be independent two-dimensional random vectors, such that Z_i is uniformly distributed in Q_i, let $A(x)$ be the number of those Z_i, which lie inside the curve $J(x)$; finally let be $R(x) = A(x) - xP$, where P is the area of the interior of J.

The main result is contained in the points 3°, 4° of the theorem A:

A3° $R(x) = \Omega(x^{\frac{1}{4}} \log x^{\frac{1}{2}})$ *with probability one*;

A4° *if* $x = x_n \to \infty$, *so that* $\liminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{n^\varepsilon} > 0$ *for a suitable* $\varepsilon > 0$, *then* $R(x) = O(x^{\frac{1}{4}} \log^{\frac{1}{2}} x)$ *with probability one.*

The theorem B is a weaker analogon to the theorem A in the case of more general geometrical figures.