Jaroslav Hájek

Асимптотическая эффективность одной последовательности тестов

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 6 (1956), No. 1, 26–30

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100176`

Чехословацкий математический журнал, т. 6 (81) 1956, Прага.

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ ОДНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ТЕСТОВ

ЯРОСЛАВ ГАЕК (JAROSLAV HÁJEK), Прага.

(Поступило в редакцию 8/III 1955 г.)

Обозначим через H_μ гипотезу, утверждающую, что случайные величины $D_1, D_2, \ldots, D_n$ независимо нормально распределены $(\mu\sigma, \sigma^2)$. Содержанием настоящей работы является утверждение, что тест гипотезы H_0 против альтернативной гипотезы H_μ $(\mu \neq 0)$, основанный на статистике (1.1), имеет в смысле определения 5.1 асимптотическую эффективность (5.2).

1. Статистика α_k. Пусть k — произвольное натуральное число, меньше n. Определим статистику

$$\alpha_k = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \varphi(D_{i_1}, \ldots, D_{i_k}) , \tag{1.1}$$

где функция $\varphi(d_1, \ldots, d_k)$ принимает значения

$$\begin{aligned} \varphi(d_1, \ldots, d_k) &= 1 \quad \text{если } d_1 + \ldots + d_k > 0 , \\ &= 0 \quad \text{в противном случае.} \end{aligned} \tag{1.2}$$

2. Средняя α_k. Если имеет место H_μ, то $D_1 + \ldots + D_k$ имеет нормальное распределение $(k\mu\sigma,\ k\sigma^2)$. Среднюю можно, следовательно, представить в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\alpha_k \mid H_\mu) = \binom{n}{k} \mathbf{E}[\varphi(D_1, \ldots, D_k) \mid H_\mu] = \binom{n}{k} P(D_1 + \ldots + D_k > 0 \mid H_\mu) = \\ = \binom{n}{k} \int_{-\infty}^{\mu\sqrt{k}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, \mathrm{d}x/\sqrt{2\pi}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

3. Дисперсия α_k. Из (1.1) и (1.2) следует, что[1])

$$\mathbf{D}^2(\alpha_k \mid H_\mu) = \binom{n}{k} \sum_{r=1}^{k} \binom{k}{r} \binom{n-k}{k-r} \operatorname{cov}[\varphi(D_1, \ldots, D_k),\ \varphi(D_{k-r+1}, \ldots, D_{2k-r}) \mid H_\mu] . \tag{3.1}$$

[1]) Подробности см. в [1].

Ковариации, выступающие в правой части, являются непрерывными функциями μ; следовательно, для любой последовательности $\{\mu_n\}$, $\mu_n \to 0$, будет

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{D}^2(\alpha_k \mid H_{\mu_n}) \frac{(k-1)!^2}{n^{2k-1}} = \operatorname{cov}\,[\varphi(D_1, \ldots, D_k), \varphi(D_k, \ldots, D_{2k-1}) \mid H_0] \quad (3.2)$$

Если имеет место H_0, то $D_1 + \ldots + D_k$, $D_k + \ldots + D_{2k-1}$ имеют нормальное распределение $(0, k\sigma^2)$, ковариация которого σ^2, так что

$$P(D_1 + \ldots + D_k > 0\,,\ D_k + \ldots + D_{2k-1} > 0 \mid H_0) =$$
$$= \iint\limits_{\substack{x>0\\ y>0}} e^{-\frac{x^2 - 2xy/k + y^2}{2k(1-1/k^2)\,\sigma^2}} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{2k\pi\sigma^2\sqrt{1-1/k^2}}\,.$$

Этот интеграл можно при помощи преобразования

$$x = u\sigma\sqrt{k}\,,$$
$$y - \frac{1}{k}\,x = v\sigma\sqrt{1-1/k^2}$$

привести к виду
$$\iint\limits_{\substack{u>0\\ u+v\sqrt{k^2-1}>0}} e^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)} \frac{\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v}{2\pi}\,,$$

и, наконец, путем преобразования

$$u = \varrho\cos\omega, \quad v = \varrho\sin\omega$$

к виду

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\arcsin 1/k}^{\frac{1}{2}\pi} \mathrm{d}\omega \int\limits_0^\infty \varrho e^{-\frac{1}{2}\varrho^2}\mathrm{d}\varrho = \frac{1}{4} + \frac{\arcsin 1/k}{2\pi}\,.$$

Объединяя эти уравнения, получаем

$$\operatorname{cov}\,[\varphi(D_1, \ldots, D_k)\,,\ \varphi(D_k + \ldots + D_{2k-1}) \mid H_0)] =$$
$$= P(D_1 + \ldots + D_k > 0\,,\ D_k + \ldots + D_{2k-1} > 0 \mid H_0) - \frac{1}{4} =$$
$$= \frac{\arcsin 1/k}{2\pi}\,.$$

Подставляя в (3.2), получаем

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{D}^2(\alpha_k \mid H_{\mu_n}) \frac{(k-1)!^2}{n^{2k-1}} = \frac{\arcsin 1/k}{2\pi}\,, \quad (\mu_n \to 0)\,. \quad (3.3)$$

4. Предельное распределение α_k. Путем незначительной модификации[2])

[2]) Дело здесь главное в том, что вместо предельного распределения частичных сумм последовательности независимых, одинакового распределенных случайных величин, надо рассматривать предельное распределение сумм $\sum_{i=1}^{n} \xi_{in}$, где $\xi_{1n}, \ldots, \xi_{nn}$ имеют одинаковое но в общем случае для каждого n иное распределение. Это затруднение можно легко устранить, например, используя теорему 11 из главы 9 в книге Б. В. Гнеденко ,,Курс теории вероятностей'', Москва 1950.

общего метода, примененного в работе [1], можно было бы доказать, что распределение $(\alpha_k - \mathbf{E}\alpha_k)/\mathbf{D}\alpha_k$, обусловленное гипотезой H_{μ_n} является при $n \to \infty$ и $\mu_n \to 0$ асимптотически нормальным (0, 1).

5. Асимптотическая эффективность α_k-теста. T-тестом гипотезы H_0 назовем тест, основанный на статистике $T = T(D_1, \ldots, D_n)$ таким образом, что H_0 опровергнем, как только $T \leq T_1$, соотв. $T \geq T_2$, где T_1 и T_2 суть критические значения с данным уровнем значительности. Асимптотическую эффективность T-теста для нашего случая[3]) определим следующим образом:

Определение 5.1. Пусть распределение статистики $T = T(D_1, \ldots, D_n)$ обусловленное гипотезой H_{μ_n}, является при $n \to \infty$ и $\mu_n \to 0$ асимптотически нормальным. Тогда число

$$e = \lim_{n\to\infty} \frac{\left[\frac{\partial}{\partial\mu}\mathbf{E}(T|H_\mu)|_{\mu=0}\right]^2}{n\,\mathbf{D}^2(T|H_{\mu_n})} \quad (\mu_n \to 0)\,, \tag{5.1}$$

если оно существует, назовем асимптотической эффективностью T-теста гипотезы H_0 против альтернативной гипотезы H_μ $(\mu \neq 0)$.

Как показано в [2], весь смысл асимптотической эффективности e заключается в том, что относительно данного случая T-тест имеет при n наблюдениях приблизительно ту же мощность, как t-тест Стьюдента при ne наблюдениях, если только n достаточно велико и $|\mu|$ является достаточно малым.

Вычислим теперь асимптотическую эффективность e_k α_k-теста. Ввиду (2.1)

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\mathbf{E}(\alpha_k|H_\mu)\Big|_{\mu=0} = \binom{n}{k}\frac{\partial}{\partial\mu}\int_{-\infty}^{\mu\sqrt{k}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x/\sqrt{2\pi}\Big|_{\mu=0} = \binom{n}{k}\sqrt{\frac{k}{2\pi}}\,.$$

Подставляя этот результат в (5.1), получем с учетом (3.3)

$$e_k = \frac{1}{k \arcsin 1/k}\,, \qquad k = 1,\ 2,\ \ldots \tag{5.2}$$

6. Приложения. Статистика α_1 равна количеству случаев, когда $D_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, так что α_1-тест и известный ,,знаковый" тест тождественны. Ввиду (5.2) асимптотическая эффективность этого теста будет

$$e_1 = \tfrac{1}{2}\pi \doteq 0{,}637\,. \tag{6.1}$$

Значительно более эффективным является α_2-тест

$$e_2 = \tfrac{1}{3}\pi \doteq 0{,}955\,. \tag{6.2}$$

---

[3]) Более общее определение не приводим, потому что оно кажется, в литературе еще не установилось.

Но для приложений всего важнее является α-тест, основанынй на статистике $\alpha = \alpha_2 + \alpha_1$, который вводится в работе [3]. Он вычисляется таким образом, что наблюдения $d_1, d_2, \ldots, d_n$ случайных величин $D_1, D_2, \ldots, D_n$ упорядочим по абсолютной величине

$$|d^{(1)}| < |d^{(2)}| < \ldots < |d^{(n)}| ,$$

и сложим верхние порядковые индексы положительных (отрицательных) наблюдений. Так как $\lim \alpha_1/\mathbf{D}\alpha_2 = 0$, то асимптотическая эффективность α-теста равна асимптотической эффективности α_2-теста (6.2).

Сравнивая (6.1) и (6.2), видим, что увеличение вычислительной работы при использовании α-теста вместо „знакового" теста вполне оплачивается значительным увеличением асимптотической эффективности. Кроме того, устанавливая тест более общей нулевой гипотезы, можно воспользоваться не только α_1-тестом, но и α-тестом. α-тестом можно, например, воспользоваться в случае нулевой гипотезы, утверждающей, что случайные величины $D_1, D_2, \ldots, D_n$, независимы и что все они имеют относительно нуля симметричное распределение. Это наступает, например, тогда, если $D_i = X_i - Y_i$ причем векторы (X_i, Y_i), имеют то же распределение, как и векторы (Y_i, X_i), $i = 1, \ldots, n$.

Из (4.2) далее следует, что асимптотическая эффективность α_k-теста возрастает вместе с k, причем

$$\lim_{k \to \infty} e_k = 1 . \tag{6.3}$$

Но на практике α_k-тесты ($k > 2$) не очень пригодны, потому что они менее эффективны и при том требуют более сложной вычислительной работы, чем t-тест Стьюдента. Кроме того, аналогично t-тесту они зависят от специфической формы распределения $D_1, D_2, \ldots, D_n$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *W. Hoeffding:* A class of statistics with asymptotically normal distributions, Ann. Math. Stat. *XIX* (1948), 293—325.

[2] *G. E. Noether:* „On a theorem of Pitman", Ann. Math. Stat. XXVI (1955), 64—68.

[3] *Я. Гаек:* Некоторые порядковые распределения и их применение, (*J. Hájek:* Některá pořadová rozdělení a jejich použití), Časopis pro pěstování matematiky, *80* (1955), 17—31.

Summary

THE ASYMPTOTIC EFFICIENCY OF SOME SEQUENCE OF TESTS

JAROSLAV HÁJEK, Praha.

(Received March 8, 1955.)

Let H_μ be a hypothesis, that random variables $D_1, D_2, \ldots, D_n$ are independent and normal $(\mu\sigma, \sigma^2)$. Test of the null hypothesis H_0 against the alternative H_μ $(\mu \neq 0)$ based on statistic (1.1) has in the sense of the definition 5.1 asymptotic efficiency (5.2).