Wacław Sierpiński

Sur quelques problèmes arithmétiques de la théorie des nombres ordinaux

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 6 (1956), No. 2, 161–163

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100188`

SUR QUELQUES PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES DE LA THÉORIE DES NOMBRES ORDINAUX

WACŁAW SIERPIŃSKI, Varsovie.

Conférence faite le 2 septembre 1955 au Congrès des mathématiciens tchécoslovaques à Prague.

Il se pose d'une façon tout à fait naturelle le problème si les théorèmes connus de la théorie des nombres subsistent pour les nombres ordinaux transfinis, respectivement comment ces théorèmes doivent être modifiés. Pour certains théorèmes les réponses à ces problèmes sont bien connues, pour plusieurs autres l'étude est facile, mais il y en a pour lesquels l'étude est difficile et même la réponse est inconnue. Je donnerai ici quelques exemples. On sait bien lesquels parmi les nombres ordinaux transfinis sont premiers, c'est-à-dire ne sont pas produits de deux nombres ordinaux plus petits que eux-mêmes (ce sont, et seulement, les nombres $\omega^\xi + 1$ et ω^{ω^ξ}, ou ξ est un nombre ordinal quelconque > 0 pour les nombres de 1re espèce et $\geqslant 0$ pour les nombres de seconde espèce), et on sait que tout nombre ordinal transfini est un produit d'un nombres fini de nombres premiers, ce développement n'étant pas d'ailleurs en général unique (puisque, par exemple, $\omega\omega = \omega \,.\, 2 \,.\, \omega = \omega \,.\, 2 \,.\, 5 \,.\, \omega = (\omega + 1)\, \omega$). On sait aussi sous quelques conditions (imposées à la succession des facteurs) le développement de nombres ordinaux en facteurs premiers est unique.

Il existe parmi les nombres ordinaux transfinis une infinité de paires de nombres successifs qui sont premiers : ce sont (et seulement) les paires des nombres ω^{ω^ξ} et $\omega^{\omega^\xi} + 1$, où ξ est un nombre ordinal quelconque $\geqslant 0$.

Il existe une infinité de nombres ordinaux transfinis qui ne sont pas de sommes d'un nombre fini de nombres ordinaux premiers: le plus petit d'entre eux est le nombre ω^2.

Le postulat de Bertrand (théorème de Tchébycheff) ne subsiste pas pour les nombres ordinaux transfinis: par exemple entre les nombres $\omega + 1$ et $2(\omega + 1) = \omega + 2$, ni entre les nombres $\omega + 1$ et $(\omega + 1) \,.\, 2 = \omega \,.\, 2 + 1$ ne se trouve aucun nombre ordinal premier. On démontre sans peine que pour qu'un nombre ordinal soit premier, il faut et il suffit qu'il a deux et seulement deux diviseurs droits. Pour les nombres ordinaux de 1re espèce on peut y remplacer les diviseurs droits par les diviseurs gauches. Or, tout nombre ordinal de seconde espèce a une infinité de diviseurs gauches. Il n'est pas difficile de trouver tous les nombres ordinaux transfinis ayant précisément trois diviseurs gauches: ce sont, et seulement, les nombres de 1re espèce qui sont produits de deux facteurs premiers (distincts ou non) dont un peut être fini. Plus compliquée est la condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre ordinal transfini ait précisément trois diviseurs droits. C'est la condition que ce nombre soit produit de deux facteurs premiers où ou bien le second facteur est un nombre de 1re espèce (fini ou transfini), ou bien tous les deux facteurs sont de seconde espèce et le premier facteur n'est pas plus petit que le deuxième.

On démontre sans peine que tout nombre ordinal de 1re espèce a au plus un diviseur gauche qui est un nombre premier transfini. (Pour les nombres de seconde espèce ce n'est pas vrai: par exemple le nombre premier ω^ω a une infinité de diviseurs gauches qui sont des nombres premiers transfinis, notamment les nombres ω et $\omega^n + 1$, où $n = 1, 2, \ldots$) On prouve facilement que si α est un nombre ordinal transfini, le nombre $\alpha + \alpha$ n'est pas divisible à droite par α.

On démontre sans peine que pour qu'un nombre ordinal transfini de la forme $2^\alpha + 1$ soit premier, il faut et il suffit que α soit un nombre ordinal de seconde espèce. Il en résulte facilement que tous les nombres de Fermat $F_\alpha = 2^{2^\alpha} + 1$, dont l'indice α est un nombre ordinal transfini, sont premiers. (Comme on sait, pour les entiers α tels que $0 \leq \alpha \leq 4$ les nombres F_α sont premiers et on ne connait aucun autre nombre F_α fini premier; pour $5 \leq \alpha \leq 12$ les nombres F_α sont reconnus composés; quant au nombres F_{13} et F_{14}, on ne sait pas s'ils sont premiers ou non; les nombres F_{15} et F_{16} sont composés. Les plus grand nombre F_α fini dont on sait qu'il est composé est F_{73}.)

On démontre que m et n étant des nombres naturels et α et β les nombres ordinaux, l'égalité $\alpha\beta = \beta\alpha$ équivaut à l'égalité $\alpha^m\beta^n = \beta^n\alpha^m$. (Pour les types ordinaux l'égalité $\alpha\beta = \beta\alpha$ entraine l'égalité $\alpha^2\beta^2 = \beta^2\alpha^2$, mais je ne sais pas s'il en est aussi inversement).

Le grand théorème de Fermat est faux pour les nombres ordinaux transfinis: en effet, vu qu'on a pour tout nombre ordinal λ de seconde espèce et pour k et n naturels, $(\lambda k)^n = \lambda^n k$, on a pour tout nombre ordinal λ de seconde espèce $\lambda^n + (\lambda \cdot 2)^n = (\lambda \cdot 3)^n$. Il existe donc trois nombres ordinaux distincts α, β, γ aussi grand que l'on veut et tels que $\alpha^n + \beta^n = \gamma^n$ pour $n = 1, 2, \ldots$[1]). On démontre aussi sans peine qu'il existe trois nombres ordinaux distincts aussi grand que l'on veut α, β et γ, tels que chaque somme $\alpha^2 + \beta^2$, $\alpha^2 + \gamma^2$, $\beta^2 + \gamma^2$ et $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ est un carré: tels sont, par exemple, les nombres $\alpha = \lambda$, $\beta = \lambda \cdot 2$, $\gamma = \lambda \cdot 3$: on a ici $\alpha^2 + \beta^2 = (\lambda \cdot 3)^2$, $\alpha^2 + \gamma^2 = (\lambda \cdot 4)^2$, $\beta^2 + \gamma^2 = (\lambda \cdot 5)^2$, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\lambda \cdot 6)^2$.

[1]) Cf. ma note parue dans Fundamenta Mathematicae *37* (1950), p. 201—205, où je m'occupe aussi du grand théorème de Fermat pour les exposants transfinis.

D'aprés un théorème de D. Pompeiu, pour qu'un nombre naturel n soit composé, il faut et il suffit que n soit une somme de 4 nombres naturels, $n = a + b + c + d$, où $ad = bc$. Ce théorème n'est pas vrai pour les nombres ordinaux transfinis. J'ai montré comment ce théorème devrait être modifié pour les nombres ordinaux transfinis.[2])

On démontre sans peine que tous les systèmes de nombres ordinaux positifs ξ et η tels que $\xi^2 . 2 = \eta^2$ sont $\xi = \lambda$, $\eta = \lambda . 2$, où λ est un nombre ordinal de seconde espèce quelconque.

En utilisant les formes canoniques des nombres ordinaux on peut démontrer que l'équation $\xi^2 = \eta^3 + 1$ n'a pas de solutions en nombres transfinis ξ et η. Or, l'équation $\xi^2 = 1 + \eta^3$ a une infinité de solutions en nombres transfinis ξ et η: outre les solutions triviales $\xi = \tau^3$, $\eta = \tau^2$, où τ est un nombre ordinal transfini quelconque, elle a, par exemple les solutions

$$\xi = \omega^{3n} + \omega^{n+1}\,, \qquad \eta = \omega^{2n} + \omega$$

où $n = 1, 2, \ldots$, ainsi que les solutions

$$\xi = \omega^{3n} + \omega^{2n} . 2 + \omega^n . 2 + 2\,, \qquad \eta = \omega^{2n} + \omega^n . 2 + 2\,.$$

Pour les nombres transfinis ξ et η l'équation $\xi^2 = 1 + \eta^3$ équivaut à l'équation

$$\xi^2 = \eta^3\,.$$

En tant que je sais, on ne connait pas toutes les solutions de cette équation en nombres transfini ξ et η. Il ne serait pas difficile de trouver toutes les solutions de cette équation en nombres transfinis ξ et η de seconde espèce, mais le problème de trouver toutes les solutions de cette équation en nombres transfinis de premiere espèce me semble difficile.

[2]) Voir ma communication parue dans les Comptes rendus des séances de la Classe III de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, Année *XLIII* (séance du 24 février 1950).

Резюме

О НЕКОТОРЫХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ПРОБЛЕМАХ ТЕОРИИ ПОРЯДКОВЫХ ЧИСЕЛ

ВАЦЛАВ СЕРПИНСКИЙ, (Wacław Sierpiński), Варшава.

Прочитано на IV съезде чехословацких математиков в Праге, 2 сентября 1955/г.

В сообщении приводится несколько примеров, в которых исследуется справедливость или несправедливость некоторых теорем, известных из теории чисел и сформулированных для трансфинитных порядковых чисел. Разбираются вопросы разложения на простые числа, существования делителей, распределения простых чисел, исследуются большая теорема Ферма, теорема Помпейу и др.