

Andrzej Schinzel

Sur un problème concernant la fonction  $\varphi(n)$

*Czechoslovak Mathematical Journal*, Vol. 6 (1956), No. 2, 164–165

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/100189>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1956

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

SUR UN PROBLÈME CONCERNANT LA FONCTION  $\varphi(n)$

ANDRÉ SCHINZEL, Varsovie.

Communication présentée le 2 septembre 1955 au Congrès des mathématiciens tchécoslovaques à Prague par M. W. SIERPIŃSKI.

Récemment M. W. SIERPIŃSKI m'a posé le problème suivant: *k étant un nombre naturel quelconque, existe-t-il toujours un nombre naturel m tel que l'équation  $\varphi(x) = m$  ait plus que k solutions (en nombre naturels x)?*

( $\varphi(n)$  désigne ici le nombre de nombres naturels  $\leq n$  et premiers avec n).

Le but de cette communication est de démontrer que *la réponse à ce problème est positive.*

Soit  $k$  un nombre naturel donné,  $p_i$  — le  $i$ -ème nombre premier. Posons

$$m = (p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_k - 1), \quad (1)$$

$$x_i = p_1 p_2 \dots p_{i-1} (p_i - 1) p_{i+1} \dots p_k \text{ pour } i = 1, 2, \dots, k, \quad (2)$$

$$x_{k+1} = p_1 p_2 \dots p_k. \quad (3)$$

Les nombres  $x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}$  sont évidemment naturels et distincts deux à deux.

Soit maintenant  $i$  un des nombres  $1, 2, \dots, k$ . Le nombre  $p_i - 1$  évidemment n'est pas divisible par aucun nombre premier  $> p_{i-1}$ :

$$p_i - 1 = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \dots p_{i-1}^{\gamma_{i-1}} \quad (4)$$

où  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{i-1}$  sont des entiers  $\geq 0$ . D'après (2) on a donc

$$x_i = p_1^{\gamma_1+1} p_2^{\gamma_2+1} \dots p_{i-1}^{\gamma_{i-1}+1} p_{i+1} p_{i+2} \dots p_k,$$

d'où

$$\varphi(x_i) = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \dots p_{i-1}^{\gamma_{i-1}} (p_i - 1) \dots (p_{i-1} - 1) (p_{i+1} - 1) \dots (p_k - 1)$$

et, d'après (4) et (1) on trouve  $\varphi(x_i) = m$ .

Or, d'après (3) et (1) on a évidemment  $\varphi(x_{k+1}) = m$ .

Les  $k + 1$  nombres naturels distincts  $x_1, x_2, \dots, x_{k+1}$  satisfont donc à l'équation  $\varphi(x) = m$  et notre assertion se trouve démontrée.

En ce qui concerne l'équation  $\varphi(x) = m$  il est encore à remarquer que R. D. CARMICHAEL suppose qu'il n'existe aucun nombre naturel  $m$  pour lequel

elle ait précisément une solution<sup>1)</sup>); comme l'a démontré V. L. KLEE Jr., cela est vrai pour  $m \leq 10^{400}$ .<sup>2)</sup> Or, M. W. SIERPIŃSKI a récemment démontré qu'il existe une infinité de nombres naturels  $m$  pour lesquels l'équation  $\varphi(x) = m$  a précisément deux solutions: tels sont, par exemple, les nombres  $m = 2 \cdot 3^{6k+1}$ , où  $k = 1, 2, \dots$  (Ces deux solutions sont ici  $x = 3^{6k+2}$  et  $x = 2 \cdot 3^{6k+2}$ ).

Après avoir pri connaissance avec la communication de A. SCHINZEL, M. P. ERDÖS a remarqué que S. PILLAI a prouvé que le nombre des entiers  $m \leq x$  pour lesquels l'équation  $\varphi(y) = m$  a des solutions est d'ordre  $o(x)$ .

En 1935 P. Erdős a démontré (dans le *Quarterly Journal of Mathematics*) l'existence d'une suite infinie croissante d'entiers  $n_k (k = 1, 2, \dots)$  telle que le nombre de solutions de l'équation  $\varphi(y) = n_k$  est plus grand que  $n_k^c$  où  $c$  est un nombre fixe positif, et il énonce l'hypothèse que pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe un tel  $c > 1 - \varepsilon$ .

Quant à la démonstration de A. Schinzel, M. P. Erdős la considère comme la plus simple de toutes qui lui sont connues.

---

<sup>1)</sup> Bull. Amer. Math. Soc. 28 (1922), p. 109—110.

<sup>2)</sup> Bull. Amer. Math. Soc. 53 (1947), p. 1183.

## Резюме

### ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ, КАСАЮЩЕЙСЯ ФУНКЦИИ $\varphi(n)$

АНДРЕЙ ШИНЦЕЛЬ (André Schinzel), Варшава.

Сообщение, представленное В. Серпинским на IV съезде чехословацких математиков в Праге 2 сентября 1955 г.

В сообщении дается простое доказательство следующей теоремы:

*Для каждого натурального числа  $k$  существует натуральное число  $m$  так, что уравнение  $\varphi(x) = m$  имеет больше, чем  $k$  решений (в множестве натуральных чисел). (Притом  $\varphi(n)$  обозначает число натуральных чисел  $\leq n$ , взаимно простых с  $n$ .)*