

Ladislav Kosmák

Une note sur les fonctions convexes

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 6 (1956), No. 3, 420–425

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/100207>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1956

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

UNE NOTE SUR LES FONCTIONS CONVEXES

LADISLAV KOSMÁK, Praha.

(Reçu le 17 novembre 1955.)

On établit une propriété d'approximation caractérisant les fonctions convexes.

Étant donnée une fonction $f(x)$, définie et continue sur un segment quelconque $\langle a, b \rangle$ ($a < b$), désignons par $P_{\langle a, b \rangle}^{(n)}(x)$ le polynôme de degré n (au plus) représentant la meilleure approximation de la fonction $f(x)$ sur le segment $\langle a, b \rangle$. Posons ensuite

$$E_{\langle a, b \rangle}^{(n)} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - P_{\langle a, b \rangle}^{(n)}(x)|.$$

D'après le théorème classique de Tchebyscheff le polynôme $P_{\langle a, b \rangle}^{(n)}(x)$ jouit de la propriété caractéristique suivante: Il existe sur le segment $\langle a, b \rangle$ $n + 2$ points

$$x_1 < x_2 < \dots < x_{n+2}$$

tels que l'on a ou bien

$$f(x_i) - P_{\langle a, b \rangle}^{(n)}(x_i) = (-1)^i E_{\langle a, b \rangle}^{(n)}$$

ou bien

$$f(x_i) - P_{\langle a, b \rangle}^{(n)}(x_i) = (-1)^{i+1} E_{\langle a, b \rangle}^{(n)}$$

pour $i = 1, 2, \dots, n + 2$. Un tel point x_i sera appelé point d'écart maximum de sens positif ou négatif sur le segment $\langle a, b \rangle$ de la fonction $f(x)$ du polynôme $P_{\langle a, b \rangle}^{(n)}(x)$, suivant que

$$f(x_i) > P_{\langle a, b \rangle}^{(n)}(x_i)$$

ou

$$f(x_i) < P_{\langle a, b \rangle}^{(n)}(x_i)$$

respectivement.

Soit maintenant $n = 2$. Si $f(x) \equiv P_{\langle a, b \rangle}^{(2)}(x)$, désignons par $m_{\langle a, b \rangle}$ le nombre maximum de membres de la suite finie

$$\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_k,$$

où $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ sont les points d'écart maximum de la fonction $f(x)$ du polynôme $P_{\langle a, b \rangle}^{(2)}(x)$, avec des sens alternés; si ξ_1 ou ξ_k est un point d'écart maxi-

num de sens positif, il doit en plus être situé à l'intérieur du segment $\langle a, b \rangle$.*) Si $f(x) \equiv P_{\langle a, b \rangle}^{(2)}(x)$, mettons $m_{\langle a, b \rangle} = 3$. Maintenant nous pouvons énoncer notre résultat.

Théorème. *La fonction $f(x)$ définie et continue sur le segment $\langle a, b \rangle$ y est convexe si et seulement si pour tout segment $\langle \alpha, \beta \rangle \subset \langle a, b \rangle$, ($\alpha < \beta$), on a*

$$E_{\langle \alpha, \beta \rangle}^{(2)} \leq \frac{(\beta - \alpha)^2}{2(m_{\langle \alpha, \beta \rangle} - 1)^2} c_{\langle \alpha, \beta \rangle} \quad (1)$$

où $c_{\langle \alpha, \beta \rangle}$ est le coefficient du membre quadratique du polynôme $P_{\langle \alpha, \beta \rangle}^{(2)}(x)$.**)

Démonstration. I. Supposons que $f(x)$ soit une fonction convexe sur le segment $\langle a, b \rangle$. Nous pouvons supposer encore, pour la démonstration, que la fonction $f(x)$ et le segment $\langle a, b \rangle$ soient tels que

$$P_{\langle a, b \rangle}^{(2)}(x) = cx^2,$$

où $c \geq 0$; il suffit également de se borner à un seul segment, soit donc $\langle a, b \rangle$.

Notre théorème devient évident dans le cas où $f(x) \equiv P_{\langle a, b \rangle}^{(2)}(x)$; or, si ce n'est pas le cas, il existe, d'après le théorème de Tchebyscheff cité ci-dessus, sur le segment $\langle a, b \rangle$ au moins quatre points d'écart maximum dont un au moins est un point d'écart maximum de sens positif situé à l'intérieur de ce segment. Nous

allons montrer que tout autre point d'écart maximum est éloigné de $\sqrt{\frac{2E_{\langle a, b \rangle}^{(2)}}{c}}$

au moins du point en question. Soit donc $x_1 \in (a, b)$ ce point d'écart maximum de sens positif, soit x_2 le point d'écart maximum de sens négatif le plus proche de x_1 . Comme la fonction $f(x)$ est convexe, elle admet à l'intérieur de $\langle a, b \rangle$ une dérivée de gauche et une dérivée de droite; de là il résulte facilement qu'elle admet au point x_1 une dérivée

$$f'(x_1) = P_{\langle a, b \rangle}^{(2)'}(x).$$

Soit maintenant

$$t(x) = (x - x_1) f'(x_1) + f(x_1);$$

alors, pour tout $x \in \langle a, b \rangle$, on aura

$$f(x) \geq t(x)$$

de sorte qu'il existe un point x_2^* situé entre les points x_1 et x_2 tel que

$$t(x_2^*) = P_{\langle a, b \rangle}^{(2)}(x_2^*) - E_{\langle a, b \rangle}^{(2)}.$$

*) On se rend facilement compte que, dans les conditions citées, le nombre $m_{\langle a, b \rangle}$ est toujours défini; le théorème de Tchebyscheff implique d'ailleurs que $m_{\langle a, b \rangle} \geq 3$. — Sauf les cas où un malentendu serait possible nous dirons souvent tout simplement „point d'écart maximum“ au lieu de dire „point d'écart maximum de la fonction $f(x)$ du polynôme $P_{\langle a, b \rangle}^{(2)}(x)$ sur le segment $\langle a, b \rangle$ “.

**) D'après le théorème de Tchebyscheff, on a $c_{\langle \alpha, \beta \rangle} = 0$ si $f(x)$ est linéaire sur $\langle \alpha, \beta \rangle$; de même, on a $c_{\langle \alpha, \beta \rangle} > 0$ (ou $c_{\langle \alpha, \beta \rangle} < 0$) si la fonction $f(x)$ est convexe (ou concave).

En même temps

$$\begin{aligned} f'(x_1) &= 2cx_1, \\ f(x_1) &= cx_1^2 + E_{\langle a, b \rangle}^{(2)}, \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} cx_2^{*2} - E_{\langle a, b \rangle}^{(2)} &= t(x_2^*) = (x_2^* - x_1) 2cx_1 + cx_1^2 + E_{\langle a, b \rangle}^{(2)}, \\ cx_2^{*2} - 2cx_1x_2^* + cx_1^2 &= 2E_{\langle a, b \rangle}^{(2)}, \end{aligned}$$

$$|x_1 - x_2^*| = \sqrt{\frac{2E_{\langle a, b \rangle}^{(2)}}{c}} \leq |x_1 - x_2|.$$

De là résulte l'inégalité

$$\begin{aligned} \frac{(b-a)\sqrt{c}}{\sqrt{2E_{\langle a, b \rangle}^{(2)}}} &\geq m_{\langle a, b \rangle} - 1, \\ E_{\langle a, b \rangle}^{(2)} &\leq \frac{(b-a)^2}{2(m_{\langle a, b \rangle} - 1)^2} \cdot c. \end{aligned}$$

II. Supposons maintenant que la fonction continue $f(x)$ ne soit pas convexe sur tout le segment $\langle a, b \rangle$. Si $f(x)$ est concave on a $c_{\langle a, b \rangle} < 0$ et (1) ne peut pas être valable pour $\alpha = a, \beta = b$. Nous pouvons donc admettre que $f(x)$ ne soit ni convexe ni concave sur $\langle a, b \rangle$. Nous allons montrer qu'il existe alors un segment $\langle \alpha, \beta \rangle \subset \langle a, b \rangle$ tel que $f(x)$ n'est pas linéaire sur $\langle \alpha, \beta \rangle$ et que le polynôme de degré 2 au plus représentant sa meilleure approximation sur ce segment est de degré 1 au plus. La démonstration du théorème sera par là achevée, car alors $c_{\langle \alpha, \beta \rangle} = 0, E_{\langle \alpha, \beta \rangle}^{(2)} > 0$ et (1) ne pourra pas être vérifié.

La fonction $f(x)$ n'étant ni convexe ni concave sur $\langle a, b \rangle$, il existe un segment $\langle a_1, b_1 \rangle \subset \langle a, b \rangle$ et deux points a_2, b_2 situés sur ce segment-ci tels que

$$\begin{aligned} f(a_2) &> l(a_2), \\ f(b_2) &< l(b_2), \end{aligned}$$

où $l(x)$ est la fonction linéaire égale à $f(x)$ aux points a_1 et b_1 . Nous pouvons supposer $a_2 < b_2$; car si $a_2 > b_2$ il suffira de considérer la fonction $-f(x)$. Posons maintenant

$$a_3 = \sup_{x \in A} x,$$

où

$$A = \mathbb{E}_x [x \in \langle a_1, a_2 \rangle, l(x) = f(x)];$$

de la continuité de $f(x)$ s'ensuit l'existence d'une fonction linéaire

$$l_1(x) = p_1x + q_1$$

aux propriétés suivantes:

- (I₁) pour tout $x \in \langle a_3, b_1 \rangle$, on a $l_1(x) \leq f(x)$;
- (I₂) $l_1(a_3) = f(a_3)$ et il existe un point $y_1 \in (a_2, b_1)$ tel que $l_1(y_1) = f(y_1)$.

On a alors évidemment

$$l_1(y_1) < l(y_1) ;$$

posons maintenant

$$b_3 = \inf_{x \in B} x ,$$

où

$$B = \mathbb{E}_x [x \in \langle y_1, b_1 \rangle, l(x) = f(x)] .$$

De la continuité de $f(x)$ résulte qu'il existe une fonction linéaire

$$l_2(x) = p_2 x + q_2$$

vérifiant

(II₁) pour tout $x \in \langle a_3, b_3 \rangle$ on a $l_2(x) \geq f(x)$;

(II₂) $l_2(b_3) = f(b_3)$ et il existe un point $y_2 \in (a_3, y_1)$ pour lequel $l_2(x_2) = f(y_2)$.

Désignons

$$y_1^* = \inf_{y \in Y_1} y, \quad \text{où } Y_1 = \mathbb{E}_y [y \in (a_3, b_3), l_1(y) = f(y)] ,$$

$$y_2^* = \sup_{y \in Y_2} y, \quad \text{où } Y_2 = \mathbb{E}_y [y \in (a_3, b_3), l_2(y) = f(y)] .$$

Si $p_1 = p_2$, on a $q_1 \neq q_2$; dans ce cas-là on a évidemment

$$P_{\langle a_3, b_3 \rangle}^{(2)}(x) = p_1 x + \frac{1}{2}(q_1 + q_2)$$

de sorte que le segment $\langle \alpha, \beta \rangle$ cherché est justement le segment $\langle a_3, b_3 \rangle$.

Soit maintenant $p_1 < p_2$; il est aisé de voir que ce cas se présente si et seulement si

$$l_2(a_3) - l_1(a_3) < l_2(b_3) - l_1(b_3) . \quad (2)$$

Soit alors

$$l_3(x) = p_1 x + q_3$$

une fonction linéaire telle que

(III₁) pour tout $x \in \langle a_3, y_1^* \rangle$ on ait $l_3(x) \geq f(x)$;

(III₂) il existe un point $y_3 \in \langle a_3, y_1^* \rangle$ tel que $l_3(y_3) = f(y_3)$,

une telle fonction existant certainement. Maintenant on voit déjà aisément qu'on peut poser

$$\alpha = a_3, \quad \beta = \inf_{x \in B^*} x ,$$

où

$$B^* = \mathbb{E}_x [x \in \langle y_1^*, b_3 \rangle, l_3(x) = f(x)]$$

(il s'ensuit de (2) que $B^* \neq \emptyset$), et que

$$P_{\langle \alpha, \beta \rangle}^{(2)}(x) = p_1 x + \frac{1}{2}(q_1 + q_3) .$$

On peut établir d'une manière analogue que $p_1 > p_2$ si et seulement si

$$l_2(a_3) - l_1(a_3) > l_2(b_3) - l_1(b_3)$$

et l'on peut vérifier qu'il existe alors une fonction linéaire

$$l_4(x) = p_2x + q_4$$

aux propriétés

(IV₁) pour tout $x \in \langle y_2^*, b_3 \rangle$, on a $l_4(x) \leq f(x)$;

(IV₂) il existe sur le segment $\langle y_2^*, b_3 \rangle$ un point y_4 tel que $l_4(y_4) = f(y_4)$.

Nous pouvons poser alors

$$\beta = b_3, \quad \alpha = \sup_{x \in A^*} x,$$

où

$$A^* = \mathbb{E}_x [x \in \langle a_3, y_2^* \rangle, l_4(x) = f(x)],$$

et nous aurons

$$P_{\langle \alpha, \beta \rangle}^{(2)}(x) = p_2x + \frac{1}{2}(q_2 + q_4).$$

La démonstration de notre théorème se trouve ainsi terminée.

Remarque. L'estimation (1) est la meilleure possible dans le sens que des fonctions existent pour lesquelles l'égalité a lieu, telle par exemple la fonction

$$f(x) = 2\sqrt{|x|}$$

considérée sur le segment $\langle -2\sqrt{2}, 2\sqrt{2} \rangle$.

Signalons enfin encore que pour une fonction convexe on a toujours

$$E_{\langle a, b \rangle}^2 \leq \frac{(b-a)^2}{8} c.$$

Резюме

ЗАМЕТКА О ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЯХ

ЛАДИСЛАВ КОСМАК (Ladislav Kosmák), Прага.

(Поступило в редакцию 17/XI 1955 г.)

Пусть $f(x)$ — действительная непрерывная на отрезке $a \leq x \leq b$ функция, пусть $P_{\langle a, b \rangle}(x) = c_{\langle a, b \rangle}x^2 + \dots$ — ее полином наилучшей аппроксимации степени ≤ 2 для отрезка $\langle a, b \rangle$ и пусть, наконец,

$$E_{\langle a, b \rangle} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - P_{\langle a, b \rangle}(x)|.$$

Определим $m_{\langle a, b \rangle}$ так: если $E_{\langle a, b \rangle} = 0$, то пусть $m_{\langle a, b \rangle} = 3$; если же $E_{\langle a, b \rangle} > 0$, то пусть $m_{\langle a, b \rangle}$ равно наибольшему числу k , для которого существует последовательность

$$a \leq \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_k \leq b$$

так, что разности $(-1)^i (f(\xi_i) - P_{\langle a, b \rangle}(\xi_i))$ все равны одному и тому же числу $\pm E_{\langle a, b \rangle}$. При этом нужно исключить случай $\xi_1 = a, f(a) > P_{\langle a, b \rangle}(a)$, а также случай $\xi_k = b, f(b) > P_{\langle a, b \rangle}(b)$. В работе доказана теорема:

Функция $f(x)$, непрерывная в $\langle a, b \rangle$, выпукла в $\langle a, b \rangle$ тогда и только тогда, если для любого отрезка $\langle \alpha, \beta \rangle$ ($a \leq \alpha < \beta \leq b$) справедливо

$$E_{\langle \alpha, \beta \rangle} \leq \frac{(\beta - \alpha)^2}{(2m_{\langle \alpha, \beta \rangle} - 1)^2} e_{\langle \alpha, \beta \rangle}.$$

Для $\beta = -\alpha = 2\sqrt{2}$, $f(x) = \beta|x|$ имеет место знак равенства.