

Ján Jakubík

Об аксиомах теории мультиструктур

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 6 (1956), No. 3, 426–430

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/100208>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1956

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ОБ АКСИОМАХ ТЕОРИИ МУЛЬТИСТРУКТУР

ЯН ЯКУБИК (Ján Jakubík) Кошице.

(Поступило в редакцию 21/XI 1955 г.)

В заметке дано решение двух проблем, предложенных М. Бернадо в недавно опубликованной работе [2].

Пусть \mathfrak{M} — непустое множество. Предположим, что каждой упорядоченной паре (a, b) , $a, b \in \mathfrak{M}$ поставлены в соответствие два подмножества множества \mathfrak{M} (они могут быть и пустыми), которые мы обозначим следующим образом:

$$a \vee b, \quad a \wedge b. \tag{1}$$

Если $A, B \subset \mathfrak{M}$, $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$, то положим

$$A \vee B = \bigcup_{a \in A, b \in B} (a \vee b), \quad A \wedge B = \bigcup_{a \in A, b \in B} (a \wedge b);$$

если какое-либо из множеств A, B пусто, то положим $A \vee B = A \wedge B = \emptyset$. Для $a \in \mathfrak{M}$ обозначим буквой a также множество, содержащее только элемент a . Если p, p' — высказывания, описывающие свойства операций (1) на множестве \mathfrak{M} , и если высказывание p' возникает из высказывания p так, что в высказывании p мы заменяем знак \vee знаком \wedge и наоборот, то мы говорим, что высказывания p, p' двойственны друг другу (см. [1]). Множество \mathfrak{M} с операциями \vee, \wedge называем мультиструктурой (см. [2]), если выполнены следующие условия $\mathfrak{M} I$ — $\mathfrak{M} VI$ (по сравнению с [2] словесная формулировка здесь несколько изменена; a, b, c — произвольные элементы множества \mathfrak{M}):

$\mathfrak{M} I$. Справедливо $a \vee b = b \vee a$, и двойственно (коммутативность).

$\mathfrak{M} II$. Если $M \in (a \vee b) \vee c$, то существует $M' \in a \vee (b \vee c)$ так, что $M \vee M' = M$; и двойственно (частичная ассоциативность).

$\mathfrak{M} III$. Если $a \vee b \neq \emptyset$, то $a \wedge (a \vee b) = a$; и двойственно (закон поглощения).

$\mathfrak{M} IV$. $a \vee a \neq \emptyset$; и двойственно.

$\mathfrak{M} V$. Если $a = b$, то $a \vee c = b \vee c$; и двойственно.

$\mathfrak{M VI}$. Если $M, M' \in a \vee b, M^* \in M \vee M', M \neq M',$ то $M \neq M^* \neq M';$ и двойственно.

В работе [2] М. Бенадо поставил следующие вопросы:

Проблема 1. Является ли аксиома $\mathfrak{M VI}$ независимой от аксиом $\mathfrak{M I} - \mathfrak{M V}$?

Проблема 2. Существуют ли ассоциативные мультиструктуры, не являющиеся структурами? (Ассоциативной называется такая структура, в которой для любых $a, b, c \in \mathfrak{M}$ имеет место $(y \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c),$ и двойственно.)

1. Докажем, что ответ на первый вопрос положителен. Заметим при этом, что аксиома $\mathfrak{M V}$ нетривиальна лишь в том случае, если знак $=$ на множестве \mathfrak{M} выражает некоторое отношение эквивалентности, а не обычное „тождественное“ равенство. Далее, если для любых $a, b, c \in \mathfrak{M}$ справедливы равенства

$$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c), \quad (2)$$

$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) \quad (3)$$

то, очевидно, выполняется и $\mathfrak{M II}$.

Пример 1. Пусть множество $\mathfrak{M} = \{p, q, u, v\}$ частично упорядочено, см. рис. 1, пусть знак \leq означает частичное упорядочение в множестве \mathfrak{M} . Для каждой пары элементов $x, y \in \mathfrak{M}$, для которых $x \leq y$, положим

$$x \vee y = y \vee x = y, \quad x \wedge y = y \wedge x = x. \quad (4)$$

Далее положим $p \vee q = q \vee p = \{u, v\}, p \wedge q = q \wedge p = \emptyset$. Исследуем справедливость аксиом $\mathfrak{M I} - \mathfrak{M VI}$ для введенных таким образом операций \vee, \wedge на \mathfrak{M} . (Знак $=$ на \mathfrak{M} означает тождественное равенство.) Аксиомы $\mathfrak{M I}, \mathfrak{M III}, \mathfrak{M IV}, \mathfrak{M V}$, очевидно, справедливы. Аксиома $\mathfrak{M VI}$ не справедлива, так как $u, v \in p \vee q, u \neq v, u \vee v = v$. Докажем, что выполняется и аксиома $\mathfrak{M II}$. Если все элементы $a, b, c \in \mathfrak{M}$ сравнимы, то справедливы равенства (2), (3), так как операции \vee, \wedge совпадают с соответствующими теоретико-структурными операциями в цепи, образованной элементами a, b, c . Итак, достаточно исследовать случай, когда два из элементов a, b, c несравнимы. Так как имеет место закон коммутативности, можно без ограничения общности предположить, что или 1. $a = p, b = q$ или 2. $a = p, c = q$. Нетрудно проверить, что в случае 2. справедливы равенства (2), (3). В случае же 1., если элемент c равен какому-либо из элементов p, q, v , то справедливы равенства (2), (3); если же $c = u$, то имеет место равенство (3), и выражение в правой (левой) части равенства (2) равно $u(\{u, v\})$, так

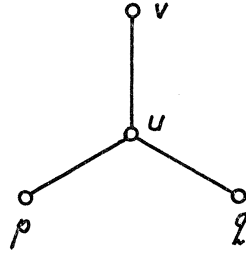


Рис. 1.

что равенство (2) не имеет места, но условие, высказанное в $\mathfrak{M} II$, выполняется. Таким образом мы доказали, что справедлива

Теорема 1. *Аксиома $\mathfrak{M} VI$ независима от аксиом $\mathfrak{M} I - \mathfrak{M} V$.*

2. Ответ на вопрос 2 также положителен. Простейшим примером является мультиструктура $\mathfrak{M}_1 = \{a, b\}$, в которой $a \vee a = a \wedge a = a$,

$$b \vee b = b \wedge b = b, \quad a \vee b = b \vee a = a \wedge b =$$

$$= b \wedge a = \emptyset. \text{ Закон ассоциативности в мультиструктуре } \mathfrak{M}_1, \text{ очевидно, выполняется. Менее тривиальными}$$

являются пример мультиструктуры \mathfrak{M}_2 , образованной частично упорядоченным множеством на рис. 2, в которой для любых $x, y \in \mathfrak{M}_2, x \leq y$ справедливо (4); далее, положим

$$a \vee b = b \vee a = \emptyset, \quad a \wedge b = b \wedge a = \{c, d\},$$

$$c \vee d = d \vee c = \{a, b\}, \quad c \wedge d = d \wedge c = \emptyset.$$

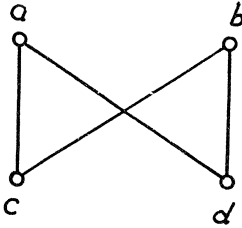


Рис. 2.

Для проверки ассоциативности, очевидно, доста-

точно проверить уравнение $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$.

Лемма 1. *Каждую мультиструктуру \mathfrak{M} , в которой для всех пар $x, y \in \mathfrak{M}$ $x \vee y \neq \emptyset \neq x \wedge y$, можно считать частично упорядоченным множеством, в котором*

1. $a \leq b \Leftrightarrow a \vee b = b$ и одновременно $a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b = a$.
2. Если $a \vee b \neq \emptyset, c \geq a, c \geq b$, то существует $c_1 \in a \vee b, c_1 \leq c$; и двойственно.

См. [2], теорема 1 и 2 (раздел 2.2). (См. также [3].)

Лемма 2. *Пусть мультиструктура \mathfrak{M} не является структурой и пусть для любых $a, b \in \mathfrak{M}$ множества $a \vee b, a \wedge b$ непусты. Тогда в множестве \mathfrak{M} (в частичном упорядочении, согласно лемме 1), существует подмножество, частично упорядоченное, как на рис. 3; при этом $a, b \in c \vee d, c, d \in a \wedge b, 0 \in c \wedge d$.*

Доказательство. Пусть выполнены условия леммы. Если бы для любых $a, b \in \mathfrak{M}$ каждое из множеств $a \vee b, a \wedge b$ содержало только один элемент, то, как нетрудно обнаружить по $\mathfrak{M} I - \mathfrak{M} VI$, \mathfrak{M} было бы структурой. Следовательно, должны существовать элементы $a_1, b_1 \in \mathfrak{M}$ такие, что или $a_1 \vee b_1$ или $a_1 \wedge b_1$ содержит более одного элемента. Предположим, например, что $c, d \in a_1 \wedge b_1, c \neq d$ (в противном случае рассуждаем двойственно). По лемме 1 и $\mathfrak{M} VI$ элементы c, d несравнимы; далее, по лемме 1 существуют элементы $a, b \in \mathfrak{M}$ так, что $a, b \in c \vee d, a \leq a_1, b \leq b_1$.¹⁾ Если бы элемент c не принадлежал множеству $a \wedge b$, то по лемме 1 существовал бы элемент $c_1 \in a \wedge b, c_1 > c, c_1 \leq a, c_1 \leq b$. Согласно лемме 1, существовал

¹⁾ См. также лемму 4, стр. 322, [2]. Легко обнаружить, что $a \neq b$.

бы, далее, элемент $c_2 \geq c_1$, $c_2 \in a_1 \wedge b_1$. Тогда имело бы место $c_2 > c$, $c_2 \wedge \wedge c = c$, $c, c_2 \in a_1 \wedge b_1$, что противоречит аксиоме $\mathfrak{M}VI$. Итак, $c \in a \wedge b$ и аналогично $d \in a \wedge b$. Подберем элементы $0, 1$ так, чтобы $0 \in c \wedge d$, $1 \in \in a \vee b$. Элементы $0, 1, a, b, c, d$ упорядочены в частично упорядоченном множестве \mathfrak{M} так, как на рис. 3, чем и доказывается утверждение леммы.

Теорема 2. *Существуют ассоциативные мультиструктуры, не являющиеся структурами. Если мультиструктура \mathfrak{M} ассоциативна и если для любых $a, b \in \mathfrak{M}$ множества $a \vee b, a \wedge b$ непусты, то \mathfrak{M} есть структура.*

Доказательство. Первое утверждение было доказано на примерах перед леммой 1; докажем второе утверждение. Пусть выполняются условия теоремы. Если бы \mathfrak{M} не была структурой, то по лемме 2 она содержала бы подмножество, частично упорядоченное, как на рис. 3. Однако, для соответствующих элементов справедливо

$$(c \wedge a) \wedge b = c \wedge b = c$$

и одновременно $c \wedge (a \wedge b) \supset c \wedge \{c, d\} \supset \{c, 0\}$, так что ассоциативный закон не имел бы места, что противоречит предположению.

Замечание. Все предыдущие рассуждения остаются в силе, если аксиоме $\mathfrak{M}III$ заменить следующей более сильной аксиомой:

$\mathfrak{M}III^*$. *Если $M \in a \vee b$, то $M \wedge a = a$; и двойственно.*

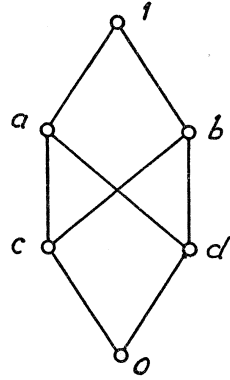


Рис. 3.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *G. Birkhoff: Lattice theory, New York 1948.*
- [2] *M. Benado: Les ensembles partiellement ordonnées et le théorème de raffinement de Schreier, II, Чехосл. мат. журнал 5 (80), 308–344.*
- [3] *M. Benado: Rectification à mon travail „Les ensembles partiellement ordonnées ...”, Чехосл. мат. журнал 6 (81), 1956, 287-288.*

Résumé

SUR LES AXIOMES DES MULTISTRUCTURES

JÁN JAKUBÍK, Košice.

(Reçu le 21 novembre 1955.)

Dans le mémoire [2] M. MINAIL BENADO a posé deux questions concernant l'axiomatique des multistructures. La solution de ces problèmes est suivante:

1. L'axiome $\mathfrak{N} 6$ est indépendant de $\mathfrak{N} I$ — $\mathfrak{N} V$.
2. Il y a des multistrukture associatives qui ne sont pas des structures; mais, si S est une multistrukture qui est en même temps un ensemble filtrant, alors, S est une structure.