

Karel Winkelbauer

К теории обобщенных случайных процессов

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 6 (1956), No. 4, 517–521

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/100218>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1956

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

К ТЕОРИИ ОБОБЩЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

КАРЕЛ ВИНКЕЛЬБАУЭР (Karel Winkelbauer), Прага.

(Поступило в редакцию 23/IX 1955 г.)

И. М. Гельфанд ввел в статье [1] понятие обобщенного случайного процесса в смысле теории распределений Шварца (см. [2]) заданием вероятностей, для которых выполняются некоторые требования согласованности и непрерывности. В настоящей статье показано, что вероятностную меру, задающую обобщенный случайный процесс, можно характеризовать еще другим, также очень простым образом.

Пусть X — множество всех комплексных бесконечно дифференцируемых функций от k вещественных переменных, обладающих компактным суппортом. Обозначим через \tilde{X} множество всех распределений в X в смысле Шварца (ср. [2], гл. I, § 2). Пусть F — множество всех комплексных функций в X . Обозначим через \mathfrak{F} минимальную σ -алгебру подмножеств множества F , содержащую все множества вида:

$$\{f: \operatorname{Re} f(\varphi) < a, \operatorname{Im} f(\varphi) < b\}; \quad \varphi \in X; a, b — \text{вещественны.} \quad (1)$$

Если μ — вероятностная мера в \mathfrak{F} такова, что $\bar{\mu}(\tilde{X}) = 1$ ($\bar{\mu}$ — внешняя мера, индуцированная мерой μ), то пространство вероятностей (F, \mathfrak{F}, μ) назовем *обобщенным случайным процессом*.

Пусть P обозначает множество всех k -членных последовательностей неотрицательных целых чисел. Для $p \in P$, $p = (p_1, p_2, \dots, p_k)$, и для целого $r \geq 0$ мы положим:

$$d^p = \frac{\partial^{p_1 + p_2 + \dots + p_k}}{\partial t_1^{p_1} \partial t_2^{p_2} \dots \partial t_k^{p_k}}, \quad d^r = d^{(r, r, \dots, r)}. \quad (2)$$

Если $p \in P$, $q \in P$, $p = (p_1, p_2, \dots, p_k)$, $q = (q_1, q_2, \dots, q_k)$, то $p \leq q$ означает, что $p_i \leq q_i$, $i = 1, 2, \dots, k$. Через $\langle -m, m \rangle$ (m — вещественно) мы обозначим множество всех точек $t = (t_1, t_2, \dots, t_k)$ k -мерного евклидова пространства R^k , для которых $|t_i| \leq m$, $i = 1, 2, \dots, k$. Для любого вещественного m $X\langle -m, m \rangle$ будет обозначать множество всех $\varphi \in X$, суппорт которых содержится в множестве $\langle -m, m \rangle$. Для каждого $A \subset X$ мы положим

$A\langle -m, m \rangle = A \cap X\langle -m, m \rangle$. Когда $\varphi \in X$, полагаем $\|\varphi\| = \max |\varphi(t)|$, $t \in R^k$. — Следующая теорема дает необходимые и достаточные условия для того, чтобы пространство вероятностей (F, \mathfrak{F}, μ) было обобщенным случайным процессом.

Теорема. *Пространство вероятностей (F, \mathfrak{F}, μ) является обобщенным случайным процессом тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

[1] для каждой пары φ_1, φ_2 функций из X

$$\mu(\{f: f(\varphi_1 + \varphi_2) = f(\varphi_1) + f(\varphi_2)\}) = 1; \quad (I)$$

[2] для всякого натурального числа m и для всякого $\varepsilon > 0$ существует $N(m, \varepsilon)$ такое, что при всех $r \geq N(m, \varepsilon)$ (r — целое неотрицательное число) имеет место неравенство:

$$\mu\left(\bigcap_{\varphi \in S} \{f: |f(\varphi)| \leq r(2m)^{kr} \|d^r \varphi\|\}\right) \geq 1 - \varepsilon \quad (II)$$

для каждого конечного множества $S \subset X\langle -m, m \rangle$.

Для доказательства теоремы мы введем некоторые дальнейшие понятия. — Если $\varphi \in X$, $\varphi_n \in X$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), то по определению последовательность φ_n сходится к φ (мы пишем: $\varphi_n \rightarrow \varphi$), когда существует вещественное число m такое, что $\varphi \in X\langle -m, m \rangle$, $\varphi_n \in X\langle -m, m \rangle$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) и $\|d^p(\varphi_n - \varphi)\| \rightarrow 0$ при всяком $p \in P$.

Множество X является относительно обычного определения сложения функций группой. Обозначим через \mathfrak{U} класс всех подгрупп группы X . Пусть \mathfrak{D} — класс всех счетных подгрупп $D \subset X$, обладающих следующим свойством:

для каждого натурального m и $\varphi \in X\langle -m, m \rangle$ существуют $\varphi_n \in D\langle -m, m \rangle$ такие, что $\varphi_n \rightarrow \varphi$. (3)

Лемма 1. *Класс \mathfrak{D} покрывает множество X .*

Доказательство. Пусть m — натуральное число и $p \in P$. Так как $X\langle -m, m \rangle$ относительно метрики ϱ_p , $\varrho_p(\varphi_1, \varphi_2) = \sum_{q \leq p} \|d^q(\varphi_1 - \varphi_2)\|$, сепарабельно, то существует счетное множество $D_{p,m}$, плотное в $X\langle -m, m \rangle$ относительно метрики ϱ_p . Пусть теперь D^* — минимальная подгруппа группы X , содержащая все множества $D_{p,m}$. Методом диагональной последовательности мы убедимся легко в том, что D^* обладает свойством (3). Видно, что D^* счетно и, следовательно, $D^* \in \mathfrak{D}$. Для каждого $\varphi \in X$ обозначим через D_φ подгруппу, образованную множеством $D^* \cup \{\varphi\}$. Ясно, что $D_\varphi \in \mathfrak{D}$. Отсюда легко вытекает утверждение леммы.

Лемма 2. *Каждое счетное соединение подгрупп из \mathfrak{D} содержится в некоторой подгруппе из \mathfrak{D} .*

Доказательство. Подгруппа, образованная счетным соединением подгрупп из \mathfrak{D} , счетна и, следовательно, лежит в \mathfrak{D} .

Если $A \in \mathfrak{A}$, то мы обозначим через $T(A)$ множество всех $f \in F$, выполняющих следующие требования:

$$f(\varphi_1 + \varphi_2) = f(\varphi_1) + f(\varphi_2) \text{ для всякой пары } \varphi_1, \varphi_2 \text{ из } A; \quad (4)$$

для каждого натурального числа m существует $p_m \in P$ и натуральное число s_m такое, что

$$|f(\varphi)| \leq s_m \|d^{p_m} \varphi\| \text{ для всякого } \varphi \in A \langle -m, m \rangle. \quad (5)$$

Отображение T класса \mathfrak{A} в класс всех подмножеств множества F обладает следующими свойствами:

$$\text{если } D \in \mathfrak{D}, g \in T(D), \text{ то } T(X) \cap \bigcap_{\varphi \in D} \{f: f(\varphi) = g(\varphi)\} \neq \emptyset; \quad (6)$$

$$\text{если } D \in \mathfrak{D}, \text{ то } T(D) \in \mathfrak{F}; \quad (7)$$

$$\text{если } A \in \mathfrak{A}, B \in \mathfrak{A}, A \subset B, \text{ то } T(B) \subset T(A); \quad (8)$$

$$T(X) = \tilde{X} \neq \emptyset. \quad (9)$$

Доказательство. Соотношение (9) легко следует из свойств распределений (см. [2], гл. III, § 6). Утверждение (8) очевидно. Свойство (7) вытекает из того, что для каждого $A \in \mathfrak{A}$

$$T(A) = \left[\bigcap_{\varphi_1, \varphi_2 \in A} \{f: f(\varphi_1 + \varphi_2) = f(\varphi_1) + f(\varphi_2)\} \right] \cap \left[\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{p \in P} \bigcup_{s=1}^{\infty} \bigcap_{\varphi \in A \langle -m, m \rangle} \{f: |f(\varphi)| \leq s \|d^p \varphi\|\} \right], \quad (10)$$

ибо $D \in \mathfrak{D}$ счетно. — Пусть $\varphi \in X$, $D \in \mathfrak{D}$, $g \in T(D)$. Тогда, согласно (3), найдем $\varphi_n \in D$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), $\varphi_n \rightarrow \varphi$. Следовательно, для некоторого натурального m $\varphi \in X \langle -m, m \rangle$, $\varphi_n \in X \langle -m, m \rangle$. Согласно (5), $|g(\varphi_n - \varphi_r)| \leq \leq s_m \|d^{p_m}(\varphi_n - \varphi_r)\|$ при любом n и r . Из (4) следует, что $g(\varphi_n - \varphi_r) = = g(\varphi_n) - g(\varphi_r)$. Так как $\|d^{p_m}(\varphi_n - \varphi_r)\| \rightarrow 0$ при $n, r \rightarrow \infty$, то существует $\lim g(\varphi_n)$. Когда $\varphi_n^* \rightarrow \varphi$, $\varphi_n^* \in D$, мы убедимся аналогичным методом в том, что $\lim g(\varphi_n^*) = \lim g(\varphi_n)$. Если мы положим для всякого $\varphi \in X$ $f(\varphi) = = \lim g(\varphi_n)$, где $\varphi_n \in D$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), $\varphi_n \rightarrow \varphi$, то f будет лежать в множестве, написанном в левой части неравенства (6).

Доказательство теоремы. Из свойств (6), (7), (8), (9) преобразования T и лемм 1, 2 вытекает согласно теореме, приведенной в работе А. Шпачка [3], что для того, чтобы $\bar{\mu}(T(X)) = 1$, необходимо и достаточно, чтобы $\mu(T(D)) = 1$ для всякого $D \in \mathfrak{D}$. В достаточности условий [1] и [2] теоремы мы убедимся, сравнивая их с видом (10) множества $T(A)$; очевидно, из

условий [1] и [2] следует, что $\mu(T(D)) = 1$ для каждого $D \in \mathfrak{D}$. Обратно, если $\bar{\mu}(T(X)) = 1$, то условие [1] выполнено и для всякого натурального m

$$\bar{\mu}\left(\bigcup_{r=1}^{\infty} \bigcap_{\varphi \in X\langle -m, m \rangle} \{f: |f(\varphi)| \leq r(2m)^{kr} \|d^r\varphi\|\}\right) = 1,$$

так как $\|d^q\varphi\| \leq (2m)^{\sum_{i=1}^k (p_i - q_i)} \|d^p\varphi\|$ для всякого $\varphi \in X\langle -m, m \rangle$, $p \in P$, $q \in P$, $q \leq p$, $p = (p_1, p_2, \dots, p_k)$, $q = (q_1, q_2, \dots, q_k)$. Из свойства непрерывности внешней меры для монотонно возрастающих последовательностей множеств вытекает непосредственно необходимость условия [2]. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] И. М. Гельфанд: Обобщенные случайные процессы. Докл. Акад. наук СССР, том 100 (1955), № 5, 853—856.
 [2] L. Schwartz: Théorie des distributions, t. I. Paris, 1950.
 [3] A. Špaček: Regularity properties of random transforms. Czechosl. Mathem. Journ., vol. 5 (1955), 143—151.

Résumé

SUR LA THÉORIE DES DISTRIBUTIONS ALÉATOIRES DE SCHWARTZ

KAREL WINKELBAUER, Praha.

(Reçu le 23 septembre 1955.)

Soit X l'ensemble de toutes les fonctions complexes de k variables réelles, indéfiniment dérivables et à support compact. Désignons par \tilde{X} l'ensemble de toutes les distributions sur X au sens de Schwartz (voir [2], ch. I, § 2). Soit F l'ensemble de toutes les fonctions complexes sur X . Nous appellerons \mathfrak{F} la σ -algèbre minimale des sous-ensembles de l'ensemble F contenant tous les ensembles de la forme (1) (voir le texte russe). Si μ est une mesure de probabilité sur \mathfrak{F} telle, que $\bar{\mu}(\tilde{X}) = 1$ ($\bar{\mu}$ est la mesure extérieure induite par la mesure μ), alors l'espace de probabilité (F, \mathfrak{F}, μ) est appelé *distribution aléatoire*.

Soit P l'ensemble de toutes les suites de nombres entiers non négatifs contenant k membres. Pour $p \in P$, $p = (p_1, p_2, \dots, p_k)$, r naturel ou zéro, nous définissons d^p et d^r suivant les formules (2); $p \leq q$, $p \in P$, $q \in P$, signifie $p_i \leq q_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$). Nous désignerons par $\langle -m, m \rangle$ (m réel) l'ensemble de tous les points $t = (t_1, t_2, \dots, t_k)$ de l'espace euclidien à k dimensions R^k , pour lesquels $|t_i| \leq m$, $i = 1, 2, \dots, k$. Pour tout nombre réel m , nous désignerons par

$X\langle -m, m \rangle$ l'ensemble de tous les $\varphi \in X$ à support contenu dans l'ensemble $\langle -m, m \rangle$. Le théorème suivant donne des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'espace de probabilité (F, \mathfrak{F}, μ) soit une distribution aléatoire.

Théorème. *L'espace de probabilité (F, \mathfrak{F}, μ) est une distribution aléatoire, si et seulement si les conditions suivantes sont remplies:*

- [1] *pour chaque paire φ_1, φ_2 de fonctions de X est valable (I);*
- [2] *pour tout nombre naturel m et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N(m, \varepsilon)$ tel, que pour tous les $r \geq N(m, \varepsilon)$ (r un nombre entier non négatif) l'inégalité (II) a lieu pour tout ensemble fini $S \subset X \langle -m, m \rangle$.*

La méthode de la démonstration est basée sur le théorème 1 contenu dans le travail [3]. La classe des ensembles correspondant à \mathfrak{D} dans [3] est la classe de tous les sous-groupes dénombrables, qui, dans un certain sens, sont denses dans X .