Czechoslovak Mathematical Journal

Froim Marcus

Sur les surfaces de troisième espèce de Terracini

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 6 (1956), No. 4, 559–562

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100220

Чехословацкий математический журнал, т. 6 (81) 1956, Прага.

SUR LES SURFACES DE TROISIÈME ESPÈCE DE TERRACINI

F. MARCUS, Iassy.

(Reçu le 20 mars 1956.)

On démontre que la propriété des surfaces de la troisième espèce de Terracini de ne pas pouvoir être transformées en quadriques par des congruences de droites W, propriété trouvée par O. ROZET et N. LEGRAIN-PISSARD, résulte immédiatement de certains résultats connus, dus à FUBINI-ČECH, si l'on tient compte de la condition de O. MAYER afin qu'une surface soit minima projective.

Dans une note récente [1] O. ROZET et N. LEGRAIN-PISSARD étudient les congruences W de droites, ayant une nappe focale dont toutes les asymptotiques appartiennent à des complexes linéaires. Comme l'on sait c'est TERRACINI [2] qui a donné les équations en termes finis des surfaces non reglées, ainsi que leurs asymptotiques, appartiennent à des complexes linéaires. Ces surfaces se répartisent en trois espèces.

D'après Terracini, un surface non reglée est de la troisième espèce si toutes les lignes asymptotiques appartiennent à des complexes linéaires Γ et Γ', les deux systèmes linéaires l'un contenant les ∞^1 complexes Γ, et l'autre, les complexes Γ', sont deux réseaux en involution et qui ont comme base un même faisceau de droites doublement comptées [2].

En utilisant les coordonnées $x(u, v)$ normalisées au sens de WILCZYNSKI, les auteurs trouvent divers résultats intéressants, en ce qui concerne la seconde nappe focale de ces congruences. Entre autres ils démontrent le résultat suivant:

Une surface de troisième espèce de Terracini ne peut pas être transformée par une congruence de droites W, dans une quadrique.

Le but de cette Note est de faire voir que *ce résultat est une conséquence de deux résultats de Fubini-Čech* [2] *et de la condition de O. Mayer* [3] *afin qu'une surface soit minima projective.*

En effet selon Rozet et Legrain [1] les surfaces de troisième espèce de Terracini sont données en coordonnées normalisées au sens de Wilczynski par

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2\sqrt{\sigma}}(u+v)\,, \quad x_2 = \frac{h}{2\sqrt{\sigma}}(U^{10}-V^{01})\,, \\ x_3 &= \frac{1}{2\sqrt{\sigma}}\left[\tfrac{1}{2}(U^{10}-V^{01})(u-v)-(U+V)\right]\,, \quad x_4 = \frac{1}{\sqrt{\sigma}}\,, \\ \sigma &= U^{20}+V^{02} \quad \text{avec} \quad 2a = \frac{V^{03}}{\sigma}\,, \quad 2b = \frac{U^{30}}{\sigma}\,, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{\alpha} &= 2(\log a)^{20} + ((\log a)^{10})^2 + 4(b^{01}+c_1) = 0\,, \\ \bar{\beta} &= 2(\log b)^{02} + ((\log b)^{01})^2 + 4(a^{10}+c_2) = 0\,; \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

U, V fonctions arbitraires, respectivement de u et v, x_i ($i = 1, 2, 3, 4$) vérifiant le système

$$\left.\begin{aligned} x^{20} + 2bx^{01} + c_1 x = 0\,, \\ x^{02} + 2ax^{10} + c_2 x = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

(On a noté avec x^{jk}, la dérivée d'ordre j par rapport à u, et d'ordre k par rapport à v de x.)

Si l'on compare (3) avec le système et les notations déjà classiques de la théorie des surfaces — voir Fubini-Čech [2], il s'ensuit, étant donné que dans ce cas $\Theta = \text{const.}$

$$\left.\begin{aligned} L &= -\beta_v - 2p_{11} = 2b^{01} + 2c_1\,, \\ M &= -\gamma_u - 2p_{22} = 2a^{10} + 2c_2\,. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

En conséquence, les expressions invariantes notées par GODEAUX [4] par $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$,¹) sont respectivement

$$\left.\begin{aligned} \bar{\alpha} &= \frac{2\gamma\gamma_{uu} - \gamma_u^2 + 2L\gamma^2}{\gamma^2} = \frac{\Delta'^2}{\gamma^2}\,, \\ \bar{\beta} &= \frac{2\beta\beta_{vv} - \beta_v^2 + 2M\beta^2}{\beta^2} = \frac{\Delta^2}{\beta^2}\,. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Dans le cas des surfaces de troisième espèce de Terracini, comme il résulte d'après [1], $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ sont égales à zéro. Donc $\Delta = \Delta' = 0$. Mais selon un résultat de O. Mayer [3] il en résulte que ces surfaces sont des surfaces minima projectives. Comme de [1] il résulte que pour les surfaces de première et deuxième espèce de Terracini, $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ ne peuvent pas être égales à zéro, il en résulte le

Théorème. *Parmi les surfaces de Terracini, seulement les surfaces de la troisième espèce sont minima projectives.*

Montrons maintenant que ces surfaces coïncident avec les surfaces qui appartiennent au cas limite TZITZEICA-WILCZYNSKI [2].

---

¹) Nous les indiquons par $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ pour ne pas être confondues avec les notations de Fubini-Čech.

En effet, si les deux familles de lignes asymptotiques d'une surface appartiennent à des complexes linéaires, alors [2], p. 115—116

$$\frac{\partial^2 \log \beta}{\partial u\, \partial v} = \beta^2 \quad (\beta = \gamma)$$

avec

$$L = -\frac{\partial^2 \log \beta}{\partial u^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \log \beta}{\partial u}\right)^2 + U_1\,,$$

$$M = -\frac{\partial^2 \log \beta}{\partial v^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \log \beta}{\partial v}\right)^2 + V_1$$

où

$$U_1 = \frac{kU^2 + (l - h)\,U + p}{U'}\,; \quad V_1 = \frac{kV^2 + (h - l)\,V + p}{V'}$$

($h, k, l, p =$ const., $U = U(u)$; $V = V(v)$, U, V — fonctions arbitraires). Si l'on cherche les surfaces minima projectives qui appartiennent à cette classe de surfaces, il faut déterminer L, M, de sorte que soit satisfaite la condition de O. Mayer [3]. On trouve que cette condition est satisfaite, seulement pour $U_1 = V_1 = 0$.

Donc

$$k = p = l - h = 0 \tag{6}$$

ce qui démontre [2] que ces surfaces appartiennent au cas limite de Tzitzeica-Wilczynski.

Mais selon un résultat de Fubini-Čech [2], p. 275, les surfaces qui appartiennent au cas limite de Tzitzeica-Wilczynski, ne peuvent pas être transformées par des congruences de droites W, en quadriques. Comme elles coïncident avec les surfaces de troisième espèce de Terracini, il en résulte que *ces dernières ne peuvent pas être transformées par congruences de droites W, en quadriques*. Ce que devait être démontré.

BIBLIOGRAPHIE

[1] *O. Rozet* et *N. Legrain-Pissard*: Sur les congruences dont une des nappes focales est une surface ayant ses asymptotiques de deux familles dans des complexes linéaires. Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, No. 9—10, pag. 280—296, 1954.

[2] *G. Fubini — E. Čech*: Geometria proiettiva differenziale, Bologna 1926. Tomo I, N. Zanichelli.

[3] *O. Mayer*: Contribution à l'étude des surfaces minima projectives, Bulletin des Sciences Mathématiques 1932, 2-e série, t. LVI.

[4] *L. Godeaux*: La théorie des surfaces et l'espace réglé. Actualités scientifiques et industrielles, No. 138. Paris 1934.

Резюме

О ПОВЕРХНОСТЯХ ТРЕТЬЕГО ТИПА ТЕРРАЧИНИ

Ф. МАРКУС (F. Marcus), Яссы.

(Поступило в редакцию 20/III 1956 г.)

Указывается, что среди поверхностей Террачини только поверхности третьего типа являются минимум-проективными. Следовательно, они совпадают [2] с краевыми поверхностями Цицейки-Вильчинского. По теореме Фубини-Чеха [2] они не могут быть преобразованы в поверхности второго порядка при помощи конгруэнции прямых W. Таким образом доказывается, что результат, найденный Розет-Легрэном [1], а именно, что поверхности третьего типа Террачини не могут быть преобразованы в поверхности второго порядка конгруенцией прямых W, вытекает непосредственно из известного результата Фубини-Чеха, если принимается во внимание условие Томсена-Майера для того, чтобы поверхность была минимум-проективной.