

Miloš Zlámal

Über die Differentialgleichung $\dot{y} + y = \ddot{y}^2$

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 7 (1957), No. 1, 26–40

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/100228>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1957

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ÜBER DIE DIFFERENTIALGLEICHUNG $\dot{y} + y = \dot{y}^2$

MILOŠ ZLÁMAL, Brno.

(Eingelangt 28/XI 1955.)

Es werden asymptotische Eigenschaften von Lösungen der oben eingeführten Differentialgleichung untersucht. Insbesondere wird bewiesen, dass es Lösungen gibt, welche eine asymptotische Entwicklung der Form $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{-nt}$ besitzen. Dabei konvergiert diese Reihe für kein t .

I

R. BELLMAN hat in Bull. of the Amer. Math. Soc. (vol. 61, 1955, S. 192) das Problem gestellt, dessen erste Hälfte lautet: Hat die Differentialgleichung

$$\dot{y} + y = \dot{y}^2 \quad \left(\cdot = \frac{d}{dt} \right) \quad (1)$$

eine Lösung, welche asymptotisch gleich e^{-t} bei $t \rightarrow \infty$ ist, wenn $y(0)$ hinreichend klein ist und wenn man $\dot{y}(0)$ passend wählt? Es soll diese Frage in positivem Sinne beantwortet werden. In Wirklichkeit wird mehr bewiesen, dass nämlich Lösungen von (1) existieren, welche eine asymptotische Entwicklung der Form $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{-nt}$ haben, d. h. für alle natürlichen n gilt

$$y(t) = \alpha_1 e^{-t} + \dots + \alpha_{n-1} e^{-(n-1)t} + \alpha_n e^{-nt} [1 + o(1)]. \quad (2)$$

Dabei konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{-nt}$ für kein t , erfüllt aber formal die Gleichung (1). Im letzten Abschnitt dieser Arbeit geben wir noch einen Überblick darüber, wie die übrigen Lösungen von (1) aussehen.

II

Suchen wir zuerst, ob die Gleichung (1) eine Lösung der Form $y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{-nt}$ hat. Durch Einsetzung in (1) erhalten wir

$$-\sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \alpha_n e^{-nt} = \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \alpha_n e^{-nt} \right]^2,$$

daraus durch Vergleichung der Koeffizienten

$$\alpha_n = -\frac{1}{n-1} [1^2(n-1)^2 \alpha_1 \alpha_{n-1} + 2^2(n-2)^2 \alpha_2 \alpha_{n-2} + \dots + (n-1)^2 1^2 \alpha_{n-1} \alpha_1]. \quad (3)$$

Wenn $\alpha_1 > 0$, so ist $\alpha_{2n} < 0$, $\alpha_{2n+1} > 0$ und wenn $\alpha_1 < 0$, so $\alpha_n < 0$. Darum gilt

$$|\alpha_n| = \frac{1}{n-1} [1^2(n-1)^2 |\alpha_1| |\alpha_{n-1}| + 2^2(n-2)^2 |\alpha_2| |\alpha_{n-2}| + \dots + (n-1)^2 \cdot 1^2 |\alpha_{n-1}| |\alpha_1|].$$

Daraus folgt $|\alpha_n| > (n-1) |\alpha_1| |\alpha_{n-1}|$, woraus

$$|\alpha_n| > (n-1)! |\alpha_1|^n,$$

so dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\alpha_n|} = \infty$ (mit Ausnahme von $\alpha_1 = 0$; in diesem Fall ist aber $\alpha_n = 0$ ($n = 2, 3, \dots$) und $y(t) \equiv 0$, so dass es sich um die triviale Lösung handelt) und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{-nt}$ als eine Potenzreihe in e^{-t} den Konvergenzradius gleich Null hat und für kein t konvergiert. Doch wird bewiesen werden, dass es Lösungen gibt, welche diese Reihe als eine asymptotische Entwicklung haben.

III

Setzen wir in (1) $\dot{y} = p$. Dann erhalten wir

$$p^2 \left(\frac{dp}{dy} \right)^2 = y + p. \quad (4)$$

Es sei $\varphi(y) \sim -y + \sum_{k=2}^{\infty} a_k y^k$ eine formale Lösung von (4) (es ist $a_2 = 1$, $a_3 = -6$, $a_4 = 61$, ...). Dann ist $\varphi(y)$ eine formale Lösung entweder von

$$\frac{dp}{dy} = \frac{\sqrt{y+p}}{p} \quad (5)$$

oder

$$\frac{dp}{dy} = -\frac{\sqrt{y+p}}{p}. \quad (6)$$

Leicht stellt man fest, dass für $y > 0$ $\frac{\sqrt{y+\varphi(y)}}{\varphi(y)} \sim -1 + \dots$ und für $y < 0$ $-\frac{\sqrt{y+\varphi(y)}}{\varphi(y)} \sim -1 + \dots$ gilt. Darum ist $\varphi(y)$ für $y > 0$ eine formale Lösung von (5) und für $y < 0$ von (6).

Wir wollen uns in diesem Abschnitt mit dem ersten Fall befassen. Es sei $\varphi(y) \sim -y + \sum_{k=2}^{\infty} b_k y^k$ eine formale Potenzreihe. Wir zeigen, dass wenn man den Ausdruck $\frac{\sqrt{y + \varphi(y)}}{\varphi(y)}$ formal in eine Potenzreihe entwickelt, der Koeffizient bei der zweiten bis $(n-3)$ -ten Potenz nur von den Koeffizienten b_2, \dots, b_{n-1} abhängt, während der Koeffizient bei der $(n-2)$ -ten Potenz gleich $A_{n-2} - \frac{b_n}{2\sqrt{b_2}}$ ist, wo A_{n-2} wieder nur von b_2, \dots, b_{n-1} abhängig ist. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{y + \varphi(y)}}{\varphi(y)} &\sim \frac{y \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} b_{k+2} y^k}}{-y [1 - \sum_{k=1}^{\infty} b_{k+1} y^k]} \sim - \frac{\sqrt{b_2 + \sum_{k=1}^{\infty} b_{k+2} y^k}}{1 - \sum_{k=1}^{\infty} b_{k+1} y^k} \sim \\ &\sim - \left[\sqrt{b_2} + B_1 y + \dots + B_{n-3} y^{n-3} + \left(B_{n-2} + \frac{b_n}{2\sqrt{b_2}} \right) y^{n-2} + \dots \right] \cdot \left[1 + C_1 y + \right. \\ &\quad \left. + \dots + C_{n-2} y^{n-2} + \dots \right], \end{aligned}$$

wo B_k und C_k ($k = 1, \dots, n-2$) nur von b_2, \dots, b_{n-1} abhängen, so dass

$$\frac{\sqrt{y + \varphi(y)}}{\varphi(y)} \sim -\sqrt{b_2} + A_1 y + \dots + A_{n-3} y^{n-3} + \left(A_{n-2} - \frac{b_n}{2\sqrt{b_2}} \right) y^{n-2} + \dots \quad (7)$$

Speziell gilt für $\varphi(y)$ $b_2 = a_2 = 1$ und $A_k = (k+1) a_{k+1}$, ($k = 1, \dots, n-3$), $A_{n-2} = \frac{1}{2} a_n + (n-1) a_{n-1}$, denn $\varphi(y)$ erfüllt formal die Gleichung (5).

Betrachten wir jetzt die Kurven $p = \varphi_n^*(y)$ und $p = \varphi_n^{**}(y)$ ($n = 2, 3, \dots$), wo

$$\begin{aligned} \varphi_n^*(y) &= -y + a_2 y^2 + \dots + a_{n-1} y^{n-1} + (a_n + \frac{1}{2}) y^n, \\ \varphi_n^{**}(y) &= -y + a_2 y^2 + \dots + a_{n-1} y^{n-1} + (a_n - \frac{1}{2}) y^n. \end{aligned} \quad (8)$$

Es ist $\varphi_n^*(y) > \varphi_n^{**}(y)$ und für kleine (positive) y liegen die beiden Kurven im vierten Quadranten über der Geraden s ($s: y + p = 0$). Wir beweisen, dass es gerade eine (wirkliche) Lösung $p_0(y)$ von (5) gibt, welche im vierten Quadranten über der Geraden s liegt und in den Ursprung mündet. Dabei gilt

$$\varphi_n^{**}(y) < p_0(y) < \varphi_n^*(y) \quad (9)$$

für jedes $n \geq 2$ und für hinreichend kleine y . Daraus folgt

$$p_0(y) = -y + a_2 y^2 + \dots + a_{n-1} y^{n-1} + O(y^n), \quad (10)$$

so dass die Reihe $-y + \sum_{k=2}^{\infty} a_k y^k$ eine asymptotische Entwicklung von $p_0(y)$ ist (man spricht gewöhnlich über asymptotische Entwicklungen der Form

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{x^k}$; dabei $x \rightarrow \infty$. Setzt man $x = \frac{1}{y}$, so kann man über asymptotische Entwicklungen der Form $\sum_{k=0}^{\infty} c_k y^k$ sprechen; dabei muss $y \rightarrow 0$).

Entwickeln wir $\frac{\sqrt{y + \varphi_n^*(y)}}{\varphi_n^*(y)}$ in eine Potenzreihe. Weil $\varphi_n^*(y)$ bis zu der $(n-1)$ -ten Potenz dieselben Koeffizienten wie $\varphi(y)$ besitzt, sind die Koeffizienten A_k ($k = 1, \dots, n-2$) dieselben wie bei $\varphi(y)$, also

$$A_k = (k+1) a_{k+1} \quad (k = 1, \dots, n-3), \quad A_{n-2} = \frac{1}{2} a_n + (n-1) a_{n-1}.$$

Durch Einsetzung in (7), wobei $b_2 = a_2 = 1$, $b_n = a_n + \frac{1}{2}$, bekommen wir eine diesmal wirkliche Entwicklung

$$\frac{\sqrt{y + \varphi_n^*(y)}}{\varphi_n^*(y)} = -1 + 2a_2 y + \dots + (n-2) a_{n-2} y^{n-3} + \\ + \left[(n-1) a_{n-1} - \frac{1}{4} \right] y^{n-2} + \dots$$

Andererseits ist

$$\frac{d\varphi_n^*(y)}{dy} = -1 + 2a_2 y + \dots + (n-1) a_{n-1} y^{n-2} + \dots,$$

so dass bei kleinem y für das Richtungsfeld von (5)

$$\left. \frac{dp}{dy} \right|_{\varphi_n^*(y)} = \frac{\sqrt{y + \varphi_n^*(y)}}{\varphi_n^*(y)} < \frac{d\varphi_n^*(y)}{dy} \quad (11)$$

gilt. Ähnlich lässt sich

$$\frac{\sqrt{y + \varphi_n^{**}(y)}}{\varphi_n^{**}(y)} = -1 + 2a_2 y + \dots + (n-2) a_{n-2} y^{n-3} + \\ + \left[(n-1) a_{n-1} + \frac{1}{4} \right] y^{n-2} + \dots$$

und

$$\left. \frac{dp}{dy} \right|_{\varphi_n^{**}(y)} > \frac{d\varphi_n^{**}(y)}{dy} \quad (12)$$

beweisen.

Betrachten wir jetzt die von den Punkten der Strecke AB (siehe Abb. 1) ausgehenden Integralkurven. AB liege so nahe beim Ursprung, dass auf den Bögen OA und OB (11) und (12) gilt. Die von den dem Punkte A nahe liegenden Punkten ausgehenden Integralkurven gelangen unter die Kurve $p = \varphi_n^{**}(y)$ und verbleiben dort, während die von den dem B nahe liegenden Punkten ausgehenden Kurven über die Kurve $p = \varphi_n^*(y)$ gelangen und dort verbleiben. Aus Stetigkeitsgründen ist es klar, dass wenn y_0 die obere Grenze der Ordinaten von Punkten der ersten Art (oder die untere Grenze der Ordinaten von Punk-

ten der zweiten Art) ist, die Integralkurve, welche von dem Punkte der Strecke AB mit der Ordinate y_0 ausgeht, zwischen den Kurven $p = \varphi_n^*(y)$ und $p = \varphi_n^{**}(y)$ liegt und in den Ursprung mündet. Also gibt es zu jedem natürlichen n wenigstens eine Integralkurve, welche für kleine y zwischen der Geraden s und der Achse y liegt und in den Ursprung mündet. Dabei gilt (9) und also auch

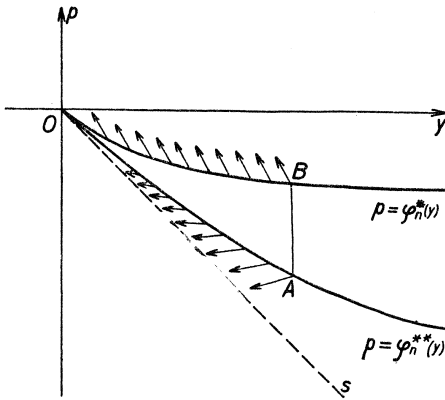


Abb. 1.

(10). Gleich zeigen wir aber, dass höchstens eine Integralkurve von (5) existiert, welche zwischen s und der Achse y liegt und in den Ursprung mündet. Aus dem vorher Gesagten folgt also, dass es gerade eine solche Integralkurve $p_0(y)$ gibt und dass (10) für jedes $n \geq 2$ gilt.

Sind nämlich $p_1(y)$ und $p_2(y)$ zwei solche Integralkurven, dass $-y < p_1(y) < 0$, $-y < p_2(y) < 0$, $\lim_{y \rightarrow 0^+} p_1(y) = 0$, $\lim_{y \rightarrow 0^+} p_2(y) = 0$, dann können sie sich aus Eindeutigkeitsgründen nicht schneiden, so dass man $p_1(y) > p_2(y)$ an-

nehmen kann. Nun ist $\frac{\sqrt{y+p}}{p}$ eine abnehmende Funktion mit Rücksicht auf p im Intervall $(-y, 0)$. Darum

$$\frac{dp_1}{dy} = \frac{\sqrt{y+p_1}}{p_1} < \frac{\sqrt{y+p_2}}{p_2} = \frac{dp_2(y)}{dy}.$$

Durch Integration der Ungleichung $\frac{dp_1(y)}{dy} < \frac{dp_2(y)}{dy}$ im Intervall $\langle \varepsilon, y \rangle$, $\varepsilon > 0$, erhalten wir $p_1(y) - p_1(\varepsilon) < p_2(y) - p_2(\varepsilon)$ und durch Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0^+$ $p_1(y) \leq p_2(y)$ und das ist ein Widerspruch.

Fügen wir noch hinzu, dass $p_0(y)$ für alle positiven y existiert und zwischen s und der Achse y liegt. Denn, wenn wir den Verlauf von $p_0(y)$ bei wachsendem y verfolgen, so sehen wir, dass $p_0(y)$ nicht auf s enden kann, weil auf s $\frac{dp_0}{dy} = 0$ gilt, und die Achse y nicht schneiden kann, weil im vierten Quadranten $\frac{dp_0}{dy}$ negativ ist.

Nun seien $y(t)$ die der charakteristischen Kurve $p_0(y)$ entsprechenden Lösungen von (1). Aus $p_0(y) > -y$, d. h. $\dot{y} > -y$ folgt $y(t) > y(0)e^{-t}$. Daraus

und aus $\lim_{y \rightarrow 0^+} p_0(y) = 0$ folgt $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{y}(t) = 0$. Weiter folgt aus (1) (a_2 ist nämlich gleich 1)

$$\ddot{y}^2 = y^2 + a_3 y^3 + \dots + a_{n-1} y^{n-1} + 0(y^n). \quad (13)$$

Weil

$$\frac{\sqrt{y + \varphi_n^*}}{\varphi_n^*} < \frac{dp_0}{dy} = \frac{\sqrt{y + p_0}}{p_0} < \frac{\sqrt{y + \varphi_n^{**}}}{\varphi_n^{**}},$$

so gilt

$$\frac{dp_0}{dy} = -1 + 2a_2 y + \dots + (n-2) a_{n-2} y^{n-3} + 0(y^{n-2}). \quad (14)$$

Aus (10) haben wir $p_0(y) \leq -\frac{3}{2}y$ für kleine y , so dass $\dot{y} \leq -\frac{3}{2}y$, daraus $y(t) = 0(e^{-\frac{3}{2}t})$ und aus (13) für $n = 3$ $\dot{y}^2(t) = 0(e^{-\frac{3}{2}t})$. Darum $\int_0^\infty e^\tau \dot{y}^2(\tau) d\tau < \infty$. Lösen wir (1) als lineare Differentialgleichung erster Ordnung mit rechter Seite gleich \dot{y}^2 . Mit Rücksicht auf die Konvergenz von $\int_0^\infty e^\tau \dot{y}^2(\tau) d\tau$ können wir schreiben

$$y(t) = e^{-t}[y(0) + \int_0^t e^\tau \dot{y}^2(\tau) d\tau] = e^{-t}[y(0) + \int_0^\infty e^\tau \dot{y}^2(\tau) d\tau - \int_t^\infty e^\tau \dot{y}^2(\tau) d\tau],$$

also

$$y(t) = e^{-t}[c - \int_t^\infty e^\tau \dot{y}^2(\tau) d\tau]. \quad (15)$$

Aus (15) folgt vorerst

$$y(t) = ce^{-t}[1 + o(1)].$$

Wenn wir (13) für $n = 3$ benutzen, erhalten wir $\dot{y}^2(t) = c^2 e^{-2t}[1 + o(1)]$ und wenn wir in (15) einsetzen, haben wir

$$y(t) = ce^{-t} - c^2 e^{-2t}[1 + o(1)].$$

Wiederholen wir diesen Vorgang für $n = 4$, erhalten wir

$$y(t) = ce^{-t} - c^2 e^{-2t} + 4c^3 e^{-3t}[1 + o(1)].$$

Durch Induktion kann man leicht beweisen, dass für jedes ganze $n \geq 2$

$$y(t) = ce^{-t} + a_{2n} e^{-2t} + \dots + a_{n-1n} e^{-(n-1)t} + a_{nn} e^{-nt}[1 + o(1)].$$

Vergleichen wir nun die Koeffizienten, so bekommen wir

$$a_{in} = a_{im} \quad (n \neq m, i \leq n, m),$$

d. h. die Koeffizienten a_{in} hängen nicht von n ab. Das bedeutet, dass $y(t)$ eine asymptotische Entwicklung der Form $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^* e^{-kt}$ besitzt, also für alle $n \geq 1$ gilt

$$y(t) = \alpha_1^* e^{-t} + \dots + \alpha_{n-1}^* e^{-(n-1)t} + \alpha_n^* e^{-nt}[1 + o(1)].$$

Aus (10) beweist man leicht, dass auch $y(t)$ eine asymptotische Entwicklung besitzt. Dasselbe gilt von $\dot{y}(t)$, denn es ist $\dot{y} = p_0 \frac{dp_0}{dy}$ und gilt (14), sodass $p_0 \frac{dp_0}{dy}$ eine asymptotische Entwicklung der Form $\sum_{k=1}^{\infty} b_k y^k$ hat. Aus bekannten Sätzen über asymptotische Entwicklungen folgt dann, dass sich die asymptotischen Entwicklungen von $y(t)$ und $\dot{y}(t)$ durch gliedweise Differentiation der von $y(t)$ ergeben und diese formal der Gleichung (1) genügt. Es ist also $\alpha_k^* = \alpha_k$, so dass die formale Lösung $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e^{-kt}$ wirklich eine asymptotische Entwicklung der Lösungen $y(t)$ ist. Durch Verschiebung des Zeitanfangs kann man in diesem Fall, nämlich wenn $y(0) > 0$, $\alpha_1 = 1$ erreichen. Dann ist $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = 4$, $\alpha_4 = -\frac{88}{3}$ und man erhält das Endresultat

$$y(t) \sim e^{-t} - e^{-2t} + 4e^{-3t} - \frac{88}{3}e^{-4t} + \dots, \quad (16)$$

wo diesmal das Zeichen \sim „asymptotisch gleich“ bedeutet.

IV

Nun ist es nötig, noch den Fall $y(0) < 0$ zu untersuchen. Die formale Lösung $\varphi(y)$ genügt dann der Gleichung (6) und darum müssen wir uns mit dieser Gleichung beschäftigen. Betrachten wir die Integralkurven $p(y)$, welche von den im zweiten Quadranten liegenden Punkten der Geraden s , also von Punkten $(-y_0, y_0)$ mit $y_0 > 0$, ausgehen. Es ist im zweiten Quadranten $p = \dot{y} > 0$ und so entspricht dem wachsenden t ein wachsendes y . In Punkten von s sind die Tangenten der Integralkurven parallel zu der Achse y . Darum gehen diese Kurven bei wachsendem y ins Innere des durch s und durch den positiven Teil der Achse p gebildeten Sektors. Auf die Gerade s gelangen sie nicht mehr zurück, denn dort wäre $\frac{dp}{dy} = 0$, während der Richtungskoeffizient von s gleich -1 ist. So lange sie im zweiten Quadranten liegen, ist $\frac{dp}{dy} < 0$. Darum: entweder liegen diese Integralkurven zwischen s und der Achse p und münden in den Ursprung oder schneiden den positiven Teil der Achse p . Es wird gezeigt werden, dass wenn y_0 hinreichend gross ist, der zweite Fall eintritt. Andererseits wird die Existenz einer in den Ursprung mündenden und zwischen s und der Achse p liegenden Lösung nachgewiesen werden. Weil diese Lösung unter den oben erwähnten liegen, geht sie von einem Punkte der Geraden s aus und offenbar münden alle Lösungen, welche von den näher dem Ursprung liegenden Punkten der Geraden s ausgehen, auch in den Ursprung.

Darum ist es leicht nachfolgenden Schluss zu beweisen: es gibt ein solches $y^* > 0$, dass alle Integralkurven, welche von den Punkten $(-y_0, y_0)$ mit $y_0 \leq y^*$ ausgehen, in den Ursprung münden und dabei zwischen s und der Achse p gehen, während die von den Punkten $(-y_0, y_0)$ mit $y_0 > y^*$ ausgehenden nicht in den Ursprung münden, sondern den positiven Teil der Achse p schneiden und in den ersten Quadranten eintreten.

Erstens sei $p = \omega(y)$ die durch die Punkte $(-8, 8)$, $(0, 4)$ gehende Gerade, also $\omega(y) = 4 - \frac{1}{2}y$. Es ist $\frac{d\omega}{dy} = -\frac{1}{2}$ und $\left. \frac{dp}{dy} \right|_{\omega(y)} = -\frac{\sqrt{y + \omega(y)}}{\omega(y)} = -\frac{\sqrt{\frac{1}{2}y + 4}}{4 - \frac{1}{2}y}$. Man sieht leicht, dass für $-4 \leq y < 0$ $\left. \frac{dp}{dy} \right|_{\omega(y)} > \frac{d\omega(y)}{dy}$ gilt. Darum bleibt jede Integralkurve, welche von den über der Geraden $p = \omega(y)$ liegenden Punkten ausgeht, über dieser Geraden und schneidet den positiven Teil der Achse p . Zweitens nehmen wir die Parabel $p \equiv \psi(y) = -y + 2y^2$. Es ist $\left. \frac{dp}{dy} \right|_{\psi(y)} = -\frac{\sqrt{2}}{1 - 2y}$ und $\frac{d\psi(y)}{dy} = -1 + 4y$, so dass für kleine y $\left. \frac{dp}{dy} \right|_{\psi(y)} < \frac{d\psi(y)}{dy}$ gilt und folglich die Integralkurven, welche von den in einer hinreichenden Nähe des Ursprungs und unter der Parabel $p = \psi(y)$ liegenden Punkten ausgehen, unter dieser Parabel zu liegen kommen, und deshalb in den Ursprung münden.

Jetzt kehren wir unser Augenmerk zu den Lösungen, die in den Ursprung münden. Das der Gleichung (16) analogische Resultat wäre, dass eine Lösung existiert, welche die asymptotische Entwicklung der Form

$$y(t) \sim -[e^{-t} + e^{-2t} + 4e^{-3t} + \frac{8}{3}e^{-4t} + \dots]$$

besitzt (diese Entwicklung erhalten wir nämlich aus der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e^{-kt}$, wo α_k (3) erfüllen, wenn wir $\alpha_1 = -1$ setzen). Eine solche Behauptung zu beweisen ist mir nicht gelungen. Ich werde nur beweisen, dass zu jedem natürlichen k eine Lösung $y_k(t)$ von $\ddot{y} = -\sqrt{y + \dot{y}}$, also auch von (1), gibt, welche die asymptotische Form

$$y_k(t) = -e^{-t} + \alpha_2 e^{-2t} + \dots + \alpha_{k-1} e^{-(k-1)t} + \alpha_k e^{-kt} [1 + O(e^{-t})] \quad (17)$$

besitzt, wo $\alpha_2, \alpha_3, \dots$ wieder durch (3) bestimmt sind, wobei $\alpha_1 = -1$. Den Beweis werde ich nur skizzieren, denn die Grundidee ist dieselbe wie im vorhergehenden Fall.

Es sei für gerade n die Bedeutung von $\varphi_n^*(y)$ und $\varphi_n^{**}(y)$ dieselbe wie früher [siehe (8)] und für ungerade n sei $\varphi_n^*(y)$ durch die zweite und $\varphi_n^{**}(y)$ durch die erste der Gleichungen (8) gegeben. Dann gilt für alle n $\varphi_n^*(y) > \varphi_n^{**}(y)$ und für negative und im absoluten Werte kleine y liegen die Kurven $p = \varphi_n^*(y)$,

$p = \varphi_n^{**}(y)$ im zweiten Quadranten zwischen s und dem positiven Teil der Achse p . Gleich wie (11) und (12) kann man für kleine y die Ungleichungen

$$\frac{dp}{dy} \Big|_{\varphi_n^{**}(y)} < \frac{d\varphi_n^{**}(y)}{dy}, \quad \frac{dp}{dy} \Big|_{\varphi_n^{**}(y)} > \frac{d\varphi_n^{**}(y)}{dy}$$

beweisen. Wenn wir uns die geometrische Bedeutung dieser Ungleichungen vorstellen, ist es ersichtlich, dass jede Integralkurve $p_k(y)$, welche von den zwischen den Kurven $p = \varphi_{k+3}^*(y)$ und $p = \varphi_{k+3}^{**}(y)$ liegenden Punkten ausgeht (vorausgesetzt, dass diese sich in hinreichender Nähe des Ursprungs befinden), in den Ursprung mündet und dabei gilt

$$p_k(y) = -y + a_2 y^2 + \dots + a_k y^k + O(y^{k+1}). \quad (18)$$

Es seien $y_k(t)$ die der charakteristischen Kurve $p_k(y)$ entsprechenden Lösungen von (1). Aus $p_k(y) > -y$ folgt in gleicher Weise wie vorher $\lim_{t \rightarrow \infty} y_k(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{y}_k(t) = 0$. Weiter erhalten wir aus (1)

$$\ddot{y}_k^2(t) = a_2 y_k^2 + \dots + a_k y_k^k + O(y_k^{k+1}). \quad (19)$$

Ausserdem, weil für $-y < p < -2y$ der Quotient $-\frac{\sqrt{y+p}}{p}$ eine abnehmende Funktion mit Rücksicht auf p ist, gilt für kleine y

$$-\frac{\sqrt{y + \varphi_{k+3}^*(y)}}{\varphi_{k+3}^*(y)} < \frac{dp_k}{dy} = -\frac{\sqrt{y + p_{k+3}(y)}}{p_{k+3}(y)} < -\frac{\sqrt{y + \varphi_{k+3}^{**}(y)}}{\varphi_{k+3}^{**}(y)},$$

sodass

$$\frac{dp_k}{dy} = -1 + 2a_2 y + \dots + (k+1) a_{k+1} y^k + O(y^{k+1}). \quad (20)$$

Ähnlich wie im vorhergehenden Falle kann man jetzt unter Benützung von (15), wo wir $c = -1$ setzen, und von (19) beweisen, dass $y_k(t)$ die asymptotische Form

$$y_k(t) = -e^{-t} + A_2 e^{-t} + \dots + A_{k-1} e^{-(k-1)t} + A_k e^{-kt} [1 + O(e^{-t})]$$

besitzt. Aus (18) und (20) lässt sich dann leicht feststellen, dass auch $\dot{y}_k(t)$ und $\ddot{y}_k(t)$ dieselbe asymptotische Form hat, woraus leicht folgt, dass die Koeffizienten A_ν (3) erfüllen, d. h. $A_\nu = \alpha_\nu$.

V

Im letzten Abschnitt wollen wir uns mit den übrigen Lösungen von (1) beschäftigen. Zu diesem Ziel werden wir den Verlauf aller Integralkurven der Gleichung (5) und (6) untersuchen und damit einen Übersicht bekommen, wie die Lösungen von

$$\ddot{y} = \sqrt{y + \dot{y}} \quad (21)$$

und

$$\dot{y} = -\sqrt{y + \bar{y}} \quad (22)$$

aussehen. Zusammen bilden diese Lösungen alle Lösungen von (1), denn, wie wir am Ende beweisen werden, gibt es keine Lösung von (1), welche z. B. für $t < t_0$ die Gleichung (21) und für $t > t_0$ die Gleichung (22) erfüllen würde oder umgekehrt.

Was (5) betrifft, wurde bereits festgestellt, dass die Situation im vierten Quadranten folgenderweise aussieht: Es gibt gerade eine zwischen s und der Achse y liegende Integralkurve $p_0(y)$, welche in den Ursprung mündet. Die unter $p_0(y)$ liegenden Integralkurven enden auf s . Das bedeutet, dass die zugehörige Lösung $y(t)$ von (21) nicht im ganzen $\langle 0, \infty$ existiert, sondern in einem gewissen t_1 endet. Die Integralkurven, welche von den im vierten Quadranten über $p_0(y)$ liegenden Punkten ausgehen, schneiden offenbar die Achse y und kommen in den ersten Quadranten, welche sie nicht mehr verlassen,

denn dort gilt $\frac{dp}{dy} > 0$. Die asymptotische Form dieser Kurven soll jetzt untersucht werden. Überzeugen wir uns aber noch, dass in den ersten Quadranten auch alle Integralkurven $p(y)$ kommen, welche von Punkten des zweiten Quadranten (die selbstverständlich über s liegen) ausgehen. Weil im zweiten Quadranten $\frac{dp}{dy} > 0$ gilt, genügt es zu zeigen, dass $p(y)$ beschränkt ist. Es gilt aber $p(y) \geq p_0$ ((y_0, p_0) bedeutet den Ausgangspunkt) und $\sqrt{y + \bar{p}} \leq \sqrt{\bar{p}}$ für $y_0 \leq y \leq 0$, so dass $\frac{dp}{dy} \leq \frac{\sqrt{\bar{p}}}{p_0}$ und

$$p(y) \leq \frac{1}{4} \left[\frac{y - y_0}{p_0} + 2\sqrt{\bar{p}_0} \right]^2 \leq \frac{1}{4} \left[\frac{|y_0|}{p_0} + 2\sqrt{\bar{p}_0} \right]^2.$$

Es gehe jetzt $p(y)$ von dem Punkte (y_0, p_0) mit $y_0 > 0$, $p_0 > 0$ aus. Wir zeigen zuerst, dass $p(y)$ zwischen der Achse y und der Kurve $\psi(y) = ky^{\frac{3}{4}}$ liegt, wenn k passend gewählt wird. Daraus folgt auch, dass $p(y)$ für alle positiven y existiert.

Es sei k so gross, dass $\psi(y_0) = ky_0^{\frac{3}{4}} > p_0$ und

$$\frac{1}{k} y^{-\frac{1}{4}} \sqrt{1 + ky^{-\frac{1}{4}}} < \frac{3}{4} ky^{-\frac{1}{4}} \quad \text{für } y \geq y_0$$

gilt, d. h.

$$\frac{4}{3} \sqrt{1 + ky^{-\frac{1}{4}}} < k^2 \quad \text{für } y \geq y_0.$$

Ein solches k existiert offenbar. Dann ist $\left. \frac{dp}{dy} \right|_{\psi(y)} < \frac{d\psi(y)}{dy}$ für $y \geq y_0$ und $p(y_0) < \psi(y_0)$, so dass $p(y) < ky^{\frac{3}{4}}$, insofern $p(y)$ existiert. Weil im ersten Qua-

dranten $\frac{dp}{dy} > 0$ gilt, kann $p(y)$ nicht die Achse y schneiden und so existiert sie für alle $y \geq y_0$ und es gilt $0 < p(y) < ky^{\frac{1}{3}}$.

Jetzt folgt aus (5)

$$p \frac{dp}{dy} = \sqrt{y + p} = y^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \frac{p}{y}} = y^{\frac{1}{2}} [1 + O(y^{-\frac{1}{3}})],$$

wo wir O mit Rücksicht auf $y \rightarrow \infty$ nehmen. Daraus erhalten wir durch Integration

$$\frac{1}{2} p^2(y) = \text{konst} + \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} [1 + O(y^{-\frac{1}{3}})],$$

so dass

$$p(y) = \frac{2\sqrt{3}}{3} y^{\frac{3}{4}} [1 + O(y^{-\frac{1}{4}})]. \quad (23)$$

Wenn wir abermals (23) in (5) setzen, bekommen wir

$$p \frac{dp}{dy} = \sqrt{y + \frac{2\sqrt{3}}{3} y^{\frac{3}{4}} [1 + O(y^{-\frac{1}{4}})]} = y^{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{3}}{3} y^{\frac{1}{4}} [1 + O(y^{-\frac{1}{4}})]$$

und durch Integration

$$\frac{1}{2} p^2(y) = \text{konst} + \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} + \frac{4\sqrt{3}}{15} y^{\frac{5}{4}} [1 + O(y^{-\frac{1}{4}})],$$

so dass gilt

$$p^2(y) = \frac{4}{3} y^{\frac{3}{2}} \left\{ 1 + \frac{2\sqrt{3}}{5} y^{-\frac{1}{4}} [1 + O(y^{-\frac{1}{4}})] \right\}$$

und

$$p(y) = \frac{2\sqrt{3}}{3} y^{\frac{3}{4}} \left\{ 1 + \frac{\sqrt{3}}{5} y^{-\frac{1}{4}} [1 + O(y^{-\frac{1}{4}})] \right\}.$$

Schreiben wir die letzte Gleichung in der Form

$$\frac{\dot{y}}{y^{\frac{3}{4}}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \left\{ 1 + \frac{\sqrt{3}}{5} y^{-\frac{1}{4}} [1 + O(y^{-\frac{1}{4}})] \right\}. \quad (24)$$

Weil $y(t) \rightarrow \infty$ bei $t \rightarrow \infty$, folgt zuerst aus (24)

$$\frac{\dot{y}}{y^{\frac{3}{4}}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} + o(1),$$

wo wir o mit Rücksicht auf $t \rightarrow \infty$ nehmen. Durch Integration erhalten wir

$$4y^{\frac{1}{4}} = \text{konst} + \frac{2\sqrt{3}}{3} t [1 + o(1)],$$

woraus

$$y(t) = \frac{1}{144} t^4 [1 + o(1)]. \quad (25)$$

Dieses Resultat kann man noch verbessern. Setzen wir (25) in (24) ein. Wir bekommen

$$\frac{\dot{y}}{y^{\frac{4}{3}}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{5} \frac{1}{t} [1 + o(1)];$$

daraus folgt

$$4y^{\frac{1}{3}} = \text{konst} + \frac{2\sqrt{3}}{3} t + \frac{4\sqrt{3}}{5} \lg t [1 + o(1)]$$

und

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{144} \left\{ t + \frac{6}{5} \lg t \cdot [1 + o(1)] \right\}^4 = \frac{1}{144} t^4 \left\{ 1 + \frac{6}{5} \frac{1}{t} \lg t [1 + o(1)] \right\}^4 = \\ &= \frac{1}{144} t^4 \left\{ 1 + \frac{24}{5} \frac{\lg t}{t} [1 + o(1)] \right\}, \end{aligned}$$

so dass

$$y(t) = \frac{1}{144} t^4 + \frac{1}{30} t^3 \lg t [1 + o(1)]. \quad (26)$$

Wir gelangen also zu folgendem Endresultat über die Gleichung (21).

1. Sind $y(0)$ und $\dot{y}(0)$ die Anfangswerte einer Lösung $y(t)$ von (21), können die folgenden Fälle eintreten: 1. Ist $y(0) > 0$ und $\dot{y}(0) < p_0[y(0)]$, dann existiert $y(t)$ nur in einem gewissen endlichen Intervall $\langle 0, t_1 \rangle$.

2. Ist $y(0) > 0$ und $\dot{y}(0) = p_0[y(0)]$, so besitzt $y(t)$ eine asymptotische Entwicklung der Form $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{-nt}$, welche für kein t konvergiert, jedoch (21) formal erfüllt. Durch Verschiebung des Zeitanfangs kann man erreichen, dass (16) gilt.

3. Ist $y(0) > 0$ und $\dot{y}(0) > p_0[y(0)]$ oder $y(0) \leq 0$ und $\dot{y}(0) \geq -y(0)$ (nicht aber $y(0) = \dot{y}(0) = 0$, in welchem Fall $y(t) \equiv 0$), dann existiert $y(t)$ in $\langle 0, \infty \rangle$ und besitzt die asymptotische Form (26). — Dabei bedeutet $p_0(y)$ die (einzige) Integralkurve von (5), welche zwischen s und dem positiven Teil der Achse y liegt und in den Ursprung mündet.

Jetzt richten wir unser Augenmerk auf die Untersuchung von (22). Bei der Gleichung (6) sieht die Situation im zweiten Quadranten folgendermassen aus (siehe S. 33): Die von einem gewissen Punkt $(-y^*, y^*)$, $y^* > 0$ der Geraden s ausgehende Integralkurve mündet in den Ursprung, wobei sie zwischen s und dem positiven Teil der Achse p liegt, und diese Eigenschaft besitzen auch alle unter ihr liegenden Integralkurven. Andererseits münden die über ihr liegenden Integralkurven nicht in den Ursprung, sondern sie schneiden den positiven Teil der Achse p . Untersuchen wir zuerst ihren weiteren Verlauf.

Im ersten Quadranten ist $\frac{dp}{dy}$ negativ, so dass die Integralkurven abnehmen.

Wir wollen beweisen, dass sie die Achse y schneiden und in den vierten Quadranten kommen. Es seien $(0, p_0)$, $p_0 > 0$, die Koordinaten des Durchschnittspunktes

dieser Integralkurven mit der Achse p . Setzen wir $\sigma(y) = p_0 - ky$, wo $k > 0$. Es gilt $\frac{d\sigma}{dy} = -k$ und $\left. \frac{dp}{dy} \right|_{\sigma(y)} = -\frac{\sqrt{(1-k)y + p_0}}{p_0 - ky}$. Wir wählen $k < 1$ und so klein, dass

$$\sqrt{(1-k)y + p_0} > k(p_0 - ky) \quad \text{für } 0 \leq y \leq \frac{p_0}{k}.$$

Es genügt offenbar $k < \min\left(\frac{1}{\sqrt{p_0}}, 1\right)$ zu wählen. Dann ist $\left. \frac{dp}{dy} \right|_{\sigma(y)} < \frac{d\sigma(y)}{dy}$ für $0 \leq y \leq \frac{p_0}{k}$, so dass $p(y)$ für $0 \leq y \leq \frac{p_0}{k}$ unter der Geraden $p = \sigma(y)$ liegt und weil diese Gerade die Achse y im Punkte $\left(0, \frac{p_0}{k}\right)$ schneidet, schneidet auch $p(y)$ die Achse y .

Offenbar bleibt $p(y)$ schon unter der Achse y liegen und weil im vierten Quadranten $\frac{dp}{dy}$ positiv ist, gelangt sie bis auf die Gerade s , wo sie endet. Das bedeutet für die zugehörigen Lösungen $y(t)$, dass sie nur in einem endlichen Intervall existieren. Also existieren alle solchen Lösungen von (22), dass die entsprechenden Integralkurven von (6) nicht in den Ursprung münden, nur in einem endlichen Intervall.

Jetzt betrachten wir die im zweiten Quadranten liegenden und in den Ursprung mündenden Integralkurven von (6). Es gilt für ein gewisses t_1 $\lim_{t \rightarrow t_1} y(t) = \lim_{t \rightarrow t_1} \dot{y}(t) = 0$ und die Lösung $y(t)$ existiert im Intervall $\langle 0, t_1 \rangle$. Es handelt sich jetzt um die Bestimmung von t_1 . Wenn wir wüssten, dass das System $\dot{y} = p$, $\dot{p} = -\sqrt{y+p}$ nur eine die Anfangsbedingungen $y(0) = p(0) = 0$ erfüllende Lösung besitzt (nämlich $y = p = 0$), so wäre $t_1 = \infty$ für alle solchen Lösungen. Das zu beweisen ist mir nicht gelungen. Wir wissen aber, dass es Lösungen gibt, für welche $t_1 = \infty$. Das sind die Lösungen $y_k(t)$, für welche (17) gilt. Betrachten wir jetzt die Menge aller Lösungen, für welche $t_1 = \infty$. Die diesen Lösungen entsprechenden charakteristischen Kurven $p_k(y)$ gehen von den Punkten der Geraden s aus, also von Punkten $(-y_0, y_0)$, $y_0 > 0$. Wenn $y_1 = \sup y_0$, so kann man leicht einsehen, dass die vom Punkte $(-y_1, y_1)$ ausgehende Integralkurve in den Ursprung in der Zeit $t_1 = \infty$ mündet und ebenso alle unter ihr liegenden Integralkurven. Andererseits münden die über ihr liegenden Integralkurven in den Ursprung in einer endlichen Zeit (es ist allerdings möglich, dass es keine solche Kurven gibt).

Jetzt können wir das Endresultat über die Gleichung (22) formulieren:

2. *Es gibt eine in einem gewissen Intervall $\langle -y_1, 0 \rangle$ ($y_1 > 0$) existierende Integralkurve $p_1(y)$ von (6) mit folgender Eigenschaft:*

1. Ist $-y_1 \leq y(0) \leq 0$ und $\dot{y}(0) \leq p_1[y(0)]$, so existiert die Lösung $y(t)$ der Gleichung (22) im ganzen Intervall $\langle 0, \infty \rangle$ und dabei $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{y}(t) = 0$. Zwischen diesen Lösungen befindet sich die Folge $\{y_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ der Lösungen, welche die asymptotische Form (17) besitzen.

2. Erfüllen die Anfangswerte nicht die vorhergehenden Ungleichungen, existiert die Lösung nur in einem gewissen endlichen Intervall.

Es obliegt uns noch den Beweis des folgenden Satzes zu führen:

3. Die Lösungen der Gleichung (21) und (22) zusammen stellen alle Lösungen der Gleichung (1) vor.

Wir sollen beweisen, dass es keine Lösung von (1) gibt, welche z. B. für $t < t_0$ (21) und für $t > t_0$ (22) erfüllt oder umgekehrt. Dieser Fall könnte nur dann eintreten, wenn $y(t_0) + \dot{y}(t_0) = 0$ und zwar so, dass die entsprechende charakteristische Kurve eine auf der Geraden s endende Lösung von (5) für $t < t_0$ und von (6) für $t > t_0$ wäre oder umgekehrt. Wenn aber die charakteristische Kurve von (5) oder (6) bei wachsendem t auf s endet, dann endet sie, wie wir gesehen haben, nur im vierten Quadranten, also $y(t_0) > 0$, $\dot{y}(t_0) < 0$. Weil $\ddot{y}(t_0) = \sqrt{y(t_0) + \dot{y}(t_0)} = 0$ ist, gilt $\frac{d}{dt} [y(t) + \dot{y}(t)]_{t=t_0} < 0$, so dass die Summe $y(t) + \dot{y}(t)$ in der Umgebung von t_0 abnimmt und für $t > t_0$ $y(t) + \dot{y}(t) < 0$ gelten müsste, was nicht möglich ist.

Bemerkung bei Korrektur: Während des Druckes meiner Arbeit hat prof. MASSERA einen Artikel über dasselbe Problem publiziert (*Estudio cualitativo de la ecuación $u''^2 = u + u'$* , Publicaciones del Instituto de Matemática y Estadística de la Facultad de Ingeniería de Montevideo, vol. III, N° 1, 1956).

Резюме

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ $\dot{y} + y = \dot{y}^2$

МИЛОШ ЗЛАМАЛ (Miloš Zlámal), Брно.

(Поступило в редакцию 28/XI 1955 г.)

Бельман предложил в Bull. of the Amer. Math. Soc. (т. 61, 1955, стр. 192) проблему, содержание первой половины которой следующее: имеет уравнение

$$\dot{y} + y = \dot{y}^2 \quad (1)$$

решение $y(t)$, которое асимптотически равно e^{-t} при $t \rightarrow \infty$, если $y(0)$ достаточно мало, а $\dot{y}(0)$ выбрано подходящим образом? В настоящей работе, показано, что дело обстоит именно так. В действительности доказано гораздо более, а именно, что существуют решения $y(t)$, для которых существует асимптотическое развитие вида $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{-nt}$, т. е. для всех натуральных n будет

$$y(t) = \alpha_1 e^{-t} + \dots + \alpha_{n-1} e^{-(n-1)t} + \alpha_n e^{-nt} [1 + o(1)],$$

причем данный ряд не сходится ни при каком t , но ур. (1) формально удовлетворяет. В последней части работы дан еще обзор асимптотического поведения всех интегралов ур. (1) при $t \rightarrow \infty$.