Alois Švec

Remarques sur la théorie des déformations des congruences de droites

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 7 (1957), No. 1, 66–72

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100232

Чехословацкий математический журнал, т. 7 (82) 1957, Прага

REMARQUES SUR LA THÉORIE DES DÉFORMATIONS DES CONGRUENCES DE DROITES

ALOIS ŠVEC, Liberec.

(Reçu le 10 décembre 1955.)

M. E. ČECH en étudiant la déformation projective d'une congruence de droites (voir son article Transformations développables des congruences des droites dans ce Journal) a introduit certaines correspondances entre deux congruences (la déformation focale, ponctuelle et planaire). Dans le présent travail je m'occupe d'abord d'une *caractérisation d'une déformation planaire des congruences dans des espaces ponctuels,* ensuite j'introduis *une nouvelle caractérisation de ces déformations.* Le premier problème m'a été posé par M. Čech.

1. Je vais considérer les correspondances entre deux espaces projectifs à trois dimensions S_3 et $\bar{S}_3$ du type que je vais décrire. Soit donnée dans S_3 une congruence L de droites à deux surfaces focales non-développables (A_1) et (A_2); je l'oriente en prenant (A_1) pour le premier foyer et (A_2) pour le second. Une congruence orientée $\bar{L}$ soit donnée de façon analogue dans l'espace $\bar{S}_3$, soient (B_1) et (B_2) ses surfaces focales non-développables. Je suppose qu'entre les congruences L et $\bar{L}$ il y ait une correspondance développable; la congruence $\bar{L}$ soit orientée de telle manière qu'aux surfaces développables aux arêtes de rebroussement sur (A_1) correspondent les surfaces développables aux arêtes de rebroussement sur (B_1). Supposons en outre qu'une projectivité faisant correspondre les premiers et les seconds foyers respectivement soit donnée entre chaque couple de droites (ponctuelles) des congruences correspondant l'une à l'autre. L'ensemble de toutes ces projectivités engendre d'une façon évidente une correspondance $\mathbf{C}$ entre S_3 et $\bar{S}_3$. La correspondance la plus générale de ce type dépend de cinq fonctions de deux variables.

On peut choisir les repères d'une telle manière que l'on ait pour la congruence L

$$\begin{aligned} \mathrm{d}A_1 &= \omega_{11}A_1 + \alpha_1\omega_2A_2 + \omega_1A_3\,, \\ \mathrm{d}A_2 &= \alpha_2\omega_1A_1 + \omega_{22}A_2 + \omega_2A_4\,, \\ \mathrm{d}A_3 &= \omega_{31}A_1 + \omega_{32}A_2 + \omega_{33}A_3 + \beta_2\omega_1A_4\,, \\ \mathrm{d}A_4 &= \omega_{41}A_1 + \omega_{42}A_2 + \beta_1\omega_2A_3 + \omega_{44}A_4\,, \end{aligned} \tag{1}$$

pour la congruence $\bar{L}$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}B_1 &= \bar{\omega}_{11}B_1 + \bar{\alpha}_1\bar{\omega}_2B_2 + \bar{\omega}_1B_3 \,, \\ \mathrm{d}B_2 &= \bar{\alpha}_2\bar{\omega}_1B_1 + \bar{\omega}_{22}B_2 + \bar{\omega}_2B_4 \,, \\ \mathrm{d}B_3 &= \bar{\omega}_{31}B_1 + \bar{\omega}_{32}B_2 + \bar{\omega}_{33}B_3 + \bar{\beta}_2\bar{\omega}_1B_4 \,, \\ \mathrm{d}B_4 &= \bar{\omega}_{41}B_1 + \bar{\omega}_{42}B_2 + \bar{\beta}_1\bar{\omega}_2B_3 + \bar{\omega}_{44}B_4 \,. \end{aligned} \tag{2}$$

En posant

$$\bar{\omega}_{ij} = \omega_{ij} + \tau_{ij} \,, \tag{3}$$

j'obtiens la correspondance entre L et $\bar{L}$ donnée par les équations

$$\tau_{13} = \tau_{24} = 0 \,. \tag{4}$$

La correspondance $\boldsymbol{C}$ du type considéré sera alors

$$\boldsymbol{C}X = Y \,, \tag{5}$$

où

$$\begin{aligned} X &\equiv X(u, v, t) = A_1(u, v) + t\, A_2(u, v) \,, \\ Y &\equiv Y(u, v, t) = B_1(u, v) + t\, \sigma(u, v)\, B_2(u, v) \,. \end{aligned} \tag{6}$$

Je vais calculer (partiellement du moins) la transformation linéarisante de la correspondance (5) au point Y. J'ai

$$\mathrm{d}X = (\omega_{11} + t\alpha_2\omega_1)\, A_1 + (\alpha_1\omega_2 + \mathrm{d}t + t\omega_{22})\, A_2 + \omega_1A_3 + t\omega_2A_4 \,, \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}Y = (\omega_{11} + \tau_{11} + \sigma t\bar{\alpha}_2\omega_1)\, B_1 + (\bar{\alpha}_1\omega_2 + \mathrm{d}\sigma \,.\, t + \sigma\, \mathrm{d}t + \sigma t\overline{\omega_{22} + \tau_{22}})\, B_2 + \\ + \omega_1B_3 + \sigma t\omega_2B_4 \,. \end{aligned} \tag{8}$$

Une homographie $\boldsymbol{K}$ de S_3 sur $\bar{S}_3$ soit donnée par

$$\boldsymbol{K}A_i = \sum_{j=1}^{4}\alpha_{ij}A_j \quad (i = 1, 2, 3, 4) \,. \tag{9}$$

Cette homographie est tangente à la correspondance $\boldsymbol{C}$ au point Y, si λ_1, λ_2, λ_3 existent telles que

$$\boldsymbol{K}X = Y \,, \tag{10}$$

$$\boldsymbol{K}\, \mathrm{d}X = \mathrm{d}Y + (\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 + \lambda_3\, \mathrm{d}t)\, Y \,. \tag{11}$$

On a

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K}X = (\alpha_{11} + t\alpha_{21})\, B_1 + (\alpha_{12} + t\alpha_{22})\, B_2 + (\alpha_{13} + t\alpha_{23})\, B_3 + \\ + (\alpha_{14} + t\alpha_{24})\, B_4 \,. \end{aligned} \tag{12}$$

En vertu de (10) il faut qu'on ait

$$\alpha_{13} + t\alpha_{23} = 0 \,, \quad \alpha_{14} + t\alpha_{24} = 0 \,. \tag{13}$$

Partout dans ce qui suit $M_1 \equiv M_2$ veut dire que $M_1 \equiv M_2 \pmod{B_1, B_2}$. En partant de (11) et de (13) j'obtiens

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K}\, \mathrm{d}X \equiv (\omega_{11} + t\alpha_2\omega_1)(- t\alpha_{23}B_3 - t\alpha_{24}B_4) + (\alpha_1\omega_2 + \mathrm{d}t + t\omega_{22}) \,. \\ .\, (\alpha_{23}B_3 + \alpha_{24}B_4) + \omega_1(\alpha_{33}B_3 + \alpha_{34}B_4) + t\omega_2(\alpha_{43}B_3 + \alpha_{44}B_4) \equiv \\ \equiv \omega_1B_3 + \sigma t\omega_2B_4 \end{aligned}$$

et puis en comparant les coefficients de B_3 et B_4

$$\begin{aligned} &\alpha_{23}\,\mathrm{d}t + \alpha_{23}(\alpha_1\omega_2 + t\overline{\omega_{22} - \omega_{11}} - t^2\alpha_2\omega_1) + \alpha_{33}\omega_1 + \alpha_{43}t\omega_2 = \omega_1\,, \\ &\alpha_{24}\,\mathrm{d}t + \alpha_{24}(\alpha_1\omega_2 + t\overline{\omega_{22} - \omega_{11}} - t^2\alpha_2\omega_1) + \alpha_{34}\omega_1 + \alpha_{44}t\omega_2 = \sigma t\omega_2\,. \end{aligned} \tag{14}$$

Les équations (14) doivent être satisfaites identiquement en ω_1, ω_2, $\mathrm{d}t$. De $[\omega_1, \omega_2, \mathrm{d}t] \neq 0$ s'ensuit que

$$\alpha_{23} = \alpha_{24} = 0\,, \tag{15}$$

$$\alpha_{33} = 1\,, \quad \alpha_{43} = \alpha_{34} = 0\,, \quad \alpha_{44} = \sigma \tag{16}$$

et de (13) et (15)

$$\alpha_{13} = \alpha_{14} = 0 \tag{17}$$

de sorte que l'homographie tangente $\mathbf{K}$ a la forme

$$\begin{aligned} \mathbf{K}A_1 &= \alpha_{11}B_1 + \alpha_{12}B_2\,, \\ \mathbf{K}A_2 &= \alpha_{21}B_1 + \alpha_{22}B_2\,, \\ \mathbf{K}A_3 &= \alpha_{31}B_1 + \alpha_{32}B_2 + B_3\,, \\ \mathbf{K}A_4 &= \alpha_{41}B_1 + \alpha_{42}B_2 \qquad + \sigma B_4\,. \end{aligned} \tag{18}$$

Maintenant je vais calculer (mod B_1, B_2) la transformation $\mathbf{K}$-linéarisante de la correspondance $\mathbf{C}$ correspondant à l'homographie $\mathbf{K}$. Je pose

$$\begin{aligned} \mathbf{K}\,\mathrm{d}^2X = \mathrm{d}^2Y + 2(\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 + \lambda_3\,\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}Y + (\ldots)\,Y + \\ + \Phi_2B_3 + \Phi_2B_3 + \Phi_4B_4 \end{aligned} \tag{19}$$

ou bien encore

$$\mathbf{K}\,\mathrm{d}^2X \equiv \mathrm{d}^2Y + 2(\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 + \lambda_3\,\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}Y + \Phi_3B_3 + \Phi_4B_4\,. \tag{20}$$

Il en résulte après la substitution

$$\begin{aligned} &(\mathrm{d}\omega_1 + t\alpha_2\omega_1^2 + t\beta_1\omega_2^2 + \omega_1\overline{\omega_{11} + \omega_{33}})\,B_3 + \sigma(2\mathrm{d}t\,\omega_2 + t\,\mathrm{d}\omega_2 + \beta_2\omega_1^2 + \alpha_1\omega_2^2 + \\ &+ t\omega_2\overline{\omega_{22} + \omega_{44}})\,B_4 \equiv \omega_1(\omega_{11} + \tau_{11} + \sigma t\bar{\alpha}_2\omega_1)\,B_3 + \omega_2(\sigma\,\mathrm{d}t + t\,\mathrm{d}\sigma + \bar{\alpha}_1\omega_2 + \\ &+ \sigma t\overline{\omega_{22} + \tau_{22}})\,B_4 + \mathrm{d}\omega_1\,B_3 + (\mathrm{d}\sigma\,.\,t\omega_2 + \sigma\,\mathrm{d}t\,\omega_2 + \sigma t\,\mathrm{d}\omega_2)\,B_4 + \omega_1(\omega_{33} + \tau_{33})\,. \\ &.\,B_3 + \bar{\beta}_2\omega_1^2B_4 + \sigma t\bar{\beta}_1\omega_2^2B_3 + \sigma t\omega_2(\omega_{44} + \tau_{44})\,B_4 + 2(\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 + \lambda_3\,\mathrm{d}t)\,. \\ &.\,(\omega_1B_3 + \sigma t\omega_2B_4) + \Phi_3B_3 + \Phi_4B_4\,. \end{aligned}$$

Une comparaison de coefficients de B_3 et B_4 donne

$$\begin{aligned} \Phi_3 = (t\alpha_2 - \sigma t\bar{\alpha}_2 - 2\lambda_1)\,\omega_1^2 + t(\beta_1 - \sigma\bar{\beta}_1)\,\omega_2^2 - 2\lambda_2\omega_1\omega_2 - \\ - 2\lambda_3\omega_1\,\mathrm{d}t - \omega_1(\tau_{11} + \tau_{33})\,, \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} \Phi_4 = (\sigma\beta_2 - \bar{\beta}_2)\,\omega_1^2 + (\sigma\alpha_1 - \bar{\alpha}_1 - 2\lambda_2\sigma t)\,\omega_2^2 - 2\lambda_1\sigma t\omega_1\omega_2 - \\ - 2\lambda_3\sigma t\omega_2\,\mathrm{d}t - t\sigma\omega_2(\tau_{22} + \tau_{44} + \mathrm{d}\log\sigma)\,. \end{aligned} \tag{24}$$

Supposons que les repères des congruences L et $\bar{L}$ aient été spécifiés complètement de sorte que

$$[\omega_{ij}\omega_1\omega_2] = [\tau_{ij}\omega_1\omega_2] = 0\,, \tag{25}$$

alors on a

$$\tau_{11} + \tau_{33} = - \mu_1\omega_1 - \mu_2\omega_2 \ , \ \tau_{22} + \tau_{44} + \mathrm{d}\log \sigma = - \nu_1\omega_1 - \nu_2\omega_2 \tag{26}$$

et

$$\begin{aligned} \Phi_3 &= (t\alpha_2 - \sigma t\bar{\alpha}_2 + \mu_1 - 2\lambda_1)\, \omega_1^2 + t(\beta_1 - \sigma\bar{\beta}_1)\, \omega_2^2 + (\mu_2 - 2\lambda_2)\, \omega_1\omega_2 - \\ &\quad - 2\lambda_3\omega_1 \, \mathrm{d}t \ , \\ \Phi_4 &= (\sigma\beta_2 - \bar{\beta}_2)\, \omega_1^2 + (\sigma\alpha_1 - \bar{\alpha}_1 + t\sigma\nu_2 - 2\lambda_2 t\sigma)\, \omega_2^2 + (t\sigma\nu_1 - 2\lambda_1\sigma t)\ . \\ &\quad .\ \omega_1\omega_2 - 2\lambda_3\sigma t\omega_2 \, \mathrm{d}t \ . \end{aligned} \tag{27}$$

Il on résulte alors finalement que la droite **K**-linéarisante de la droite $[Y, \mathrm{d}Y]$ est $[Y, \Phi_1 B_1 + \Phi_2 B_2 + \Phi_3 B_3 + \Phi_4 B_4]$ où Φ_3, Φ_4 sont déterminés par (27) et Φ_1, Φ_2 ne m'intéressent pas.

2. Je vais établir maintenant les conditions analytiques pour certaines correspondances **C** du type considéré. Le premier plan focal de la congruence $\bar{L}$ étant $\bar{E}_3 = [B_1 B_2 B_4]$, la droite $[Y, \mathrm{d}Y]$ est située dans $\bar{E}_3$ si et seulement si $\omega_1 = 0$. La droite **K**-linéarisante de cette droite située dans $\bar{E}_3$ est

$$\begin{aligned} [Y, \Phi_1 B_1 + \Phi_2 B_2 + t(\beta_1 - \sigma\bar{\beta}_1)\, \omega_2^2 B_3 + (\sigma\alpha_1 - \bar{\alpha}_1 + t\sigma\nu_2 - 2\lambda_2 t\sigma)\ . \\ .\ \omega_2^2 B_4 - 2\lambda_3\sigma t\omega_2 \, \mathrm{d}t \ B_4]\ . \end{aligned} \tag{28}$$

Je demande maintenant que la correspondance **C** ait la propriété suivante: toute droite **K**-linéarisante de toute droite $[Y, \mathrm{d}Y]$ située dans le premier plan focal de la congruence $\bar{L}$ est (pour une homographie tangente convenable) la droite génératrice $[B_1 B_2]$ de la congruence $\bar{L}$. Il faut alors que pour chaque $t, \omega_2, \mathrm{d}t$ on ait

$$t(\beta_1 - \sigma\bar{\beta}_1)\, \omega_2^2 = 0 \ , \tag{29}$$

$$(\sigma\alpha_1 - \bar{\alpha}_1 + t\sigma\nu_2 - 2\lambda_2 t\sigma)\, \omega_2^2 - 2\lambda_3\sigma t\omega_2 \, \mathrm{d}t = 0 \ . \tag{30}$$

De (29) résulte que

$$\beta_1 = \sigma\bar{\beta}_1 \ . \tag{31}$$

On peut satisfaire à la condition (30) en choisissant convenablement λ_2 et $\lambda_3 = 0$.

De la même façon on trouve que la condition pour que les droites **K**-linéarisantes de toutes les droites $[Y, \mathrm{d}Y]$ dans le second plan focal coïncident avec la droite de la congruence $\bar{L}$ qui passe par le point Y est que

$$\sigma\beta_2 = \bar{\beta}_2 \ . \tag{32}$$

Or on sait bien (justement du travail de M. Čech) que si les congruences $L^*, \bar{L}^*$, duelles à $L, \bar{L}$, sont en déformation planaire, l'homographie qui engendre cette déformation est

$$\begin{aligned} \mathbf{H}A_1 &= B_1 \ , \\ \mathbf{H}A_2 &= \sigma B_2 \ , \\ \mathbf{H}A_3 &= \beta_{13} B_1 + B_3 \ , \\ \mathbf{H}A_4 &= \beta_{24} B_2 + \sigma B_4 \end{aligned} \tag{33}$$

où

$$\sigma = \frac{\beta_1}{\bar{\beta}_1} = \frac{\bar{\beta}_2}{\beta_2}\,. \tag{34}$$

Ainsi j'ai obtenu:

Les correspondances $\mathbf{C}$ *du type considéré entre deux espaces* S_3 *et* $\bar{S}_3$ *ayant la propriété que pour chaque couple de points correspondants* X *et* $\mathbf{C}X = Y$ *il existe une homographie tangente à la correspondance* $\mathbf{C}$ *et telle que la droite de la congruence* $\bar{L}$ *passant par le point* Y *est la droite* $\mathbf{K}$*-linéarisante de toutes les droites passant par le point* Y *et situées dans les plans focaux de la congruence* $\bar{L}$*, sont formées de façon suivante: Je considère deux congruences non-paraboliques* L *et* $\bar{L}$ *qui sont en déformation planaire. Toutes les homographies engendrant cette déformation planaire déterminent une même projectivité* φ *entre le couple de droites correspondantes. La correspondance* $\mathbf{C}$ *est alors l'ensemble de ces projectivités* φ.

3. Je considère de nouveau deux congruences L et $\bar{L}$ en correspondance développable. L'homographie tangente la plus générale de la correspondance $L \rightarrow \bar{L}$ est

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}A_1 &= \varrho B_1\,,\\
\mathbf{K}A_2 &= \varrho^{-1}B_2\,,\\
\mathbf{K}A_3 &= \gamma_{31}B_1 + \gamma_{32}B_2 + \varrho B_3\,,\\
\mathbf{K}A_4 &= \gamma_{41}B_1 + \gamma_{42}B_2 + \varrho^{-1}B_4
\end{aligned} \tag{35}$$

où

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}[A_1A_2] &= [B_1B_2]\,,\\
\mathbf{K}[A_1A_3] &= \varrho\gamma_{32}[B_1B_2] + \varrho^2[B_1B_3]\,,\\
\mathbf{K}[A_1A_4] &= \varrho\gamma_{42}[B_1B_2] + [B_1B_4]\,,\\
\mathbf{K}[A_2A_3] &= -\varrho^{-1}\gamma_{31}[B_1B_2] + [B_2B_3]\,,\\
\mathbf{K}[A_2A_4] &= -\varrho^{-1}\gamma_{41}[B_1B_2] + \varrho^{-2}[B_2B_4]\,,\\
\mathbf{K}[A_3A_4] &= (\gamma_{31}\gamma_{42} - \gamma_{32}\gamma_{41})[B_1B_2] - \gamma_{41}\varrho[B_1B_3] + \gamma_{31}\varrho^{-1}[B_1B_4] -\\
&\quad - \gamma_{42}\varrho[B_2B_3] + \gamma_{32}\varrho^{-1}[B_2B_4] + [B_3B_4]
\end{aligned} \tag{36}$$

et en vertu de

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}[A_1A_2] &= (\omega_{11} + \omega_{22})[A_1A_2] + \omega_2[A_1A_4] - \omega_1[A_2A_3]\,,\\
\mathrm{d}^2[A_1A_2] &= (\mathrm{d}\overline{\omega_{11} + \omega_{22}} + \overline{\omega_{11} + \omega_{22}}^2 + \omega_1\omega_{31} + \omega_2\omega_{42})[A_1A_2] + (\beta_1\omega_2^2 -\\
&\quad - \alpha_2\omega_1^2)[A_1A_3] + (\mathrm{d}\omega_2 + \omega_2\,\overline{2\omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{44}})[A_1A_4] -\\
&\quad - (\mathrm{d}\omega_1 + \omega_1\overline{\omega_{11} + 2\omega_{22} + \omega_{33}})[A_2A_3] + (\alpha_1\omega_2^2 - \beta_2\omega_1^2)\,.\\
&\quad .\,[A_2A_4] + 2\omega_1\omega_2[A_3A_4]
\end{aligned} \tag{37}$$

on a

$$\mathbf{K}\,\mathrm{d}[A_1A_2] = \mathrm{d}[B_1B_2] + (\gamma_{31}\varrho^{-1}\omega_1 + \gamma_{42}\varrho\omega_2 - \tau_{11} - \tau_{22})[B_1B_2]\,. \tag{38}$$

J'introduis maintenant les expressions Φ_{ij} par la relation (mod $[B_1B_2]$)

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}\,\mathrm{d}^2[A_1A_2] &\equiv \mathrm{d}^2[B_1B_2] + 2(\gamma_{31}\varrho^{-1}\omega_1 + \gamma_{42}\varrho\omega_2 - \tau_{11} - \tau_{22})\,.\\
&.\,\mathrm{d}[B_1B_2] + \Phi_{13}[B_1B_3] + \Phi_{14}[B_1B_4] + \Phi_{23}[B_2B_3] + \Phi_{24}[B_2B_4] +\\
&+ \Phi_{34}[B_3B_4]\,.
\end{aligned} \tag{39}$$

Après la substitution il en résulte que

$$
\begin{aligned}
&(\beta_1\omega_2^2 - \alpha_2\omega_1^2)\, \varrho^2[B_1B_3] + (\mathrm{d}\omega_2 + \omega_2\, \overline{2\omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{44}})[B_1B_4] - (\mathrm{d}\omega_1 + \omega_1\, . \\
&.\, \overline{\omega_{11} + 2\omega_{22} + \omega_{33}})[B_2B_3] + (\alpha_1\omega_2^2 - \beta_2\omega_1^2)\, \varrho^{-1}[B_2B_4] + 2\omega_1\omega_2\{\gamma_{41}\varrho[B_1B_3] + \\
&+ \gamma_{31}\varrho^{-1}[B_1B_4] - \gamma_{42}\varrho[B_2B_3] + \gamma_{32}\varrho^{-1}[B_2B_4] + [B_3B_4]\} \equiv (\bar{\beta}_1\omega_2^2 - \bar{\alpha}_2\omega_1^2)\, . \\
&.\, [B_1B_3] + (\mathrm{d}\omega_2 + \omega_2\, \overline{2\omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{44} + 2\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{44}})[B_1B_4] - (\mathrm{d}\omega_1 + \\
&+ \omega_1\overline{\omega_{11} + 2\omega_{22} + \omega_{33} + \tau_{11} + 2\tau_{22} + \tau_{33}})[B_2B_3] + (\bar{\alpha}_1\omega_2^2 - \bar{\beta}_2\omega_1^2)[B_2B_4] + \\
&+ 2\omega_1\omega_2[B_3B_4] + 2(\gamma_{31}\varrho^{-1}\omega_1 + \gamma_{42}\varrho\omega_2 - \tau_{11} - \tau_{22})\{\omega_2[B_1B_4] - \omega_1[B_2B_3]\} + \\
&\qquad + \Phi_{13}[B_1B_3] + \Phi_{14}[B_1B_4] + \Phi_{23}[B_2B_3] + \Phi_{24}[B_2B_4] + \Phi_{34}[B_3B_4]\, .
\end{aligned}
$$

De là j'obtiens

$$
\begin{aligned}
\Phi_{13} &= (\bar{\alpha}_2 - \varrho^2\alpha_2)\, \omega_1^2 - 2\gamma_{41}\varrho\omega_1\omega_2 + (\beta_1\varrho^2 - \bar{\beta}_1)\, \omega_2^2\, , \\
\Phi_{24} &= (\bar{\beta}_2 - \varrho^{-2}\beta_2)\, \omega_1^2 + 2\gamma_{32}\varrho^{-1}\omega_1\omega_2 + (\alpha_1\varrho^{-2} - \bar{\alpha}_1)\, \omega_2^2\, ,
\end{aligned}
\tag{40}
$$

$$
\begin{aligned}
\Phi_{14} &= (\tau_{22} - \tau_{44})\, \omega_2 - 2\gamma_{42}\varrho\omega_2^2\, , \\
\Phi_{23} &= (\tau_{33} - \tau_{11})\, \omega_2 + 2\gamma_{31}\varrho^{-1}\omega_1^2\, ,
\end{aligned}
\tag{41}
$$

$$\Phi_{34} = 0\, . \tag{42}$$

Soient S_5 et $\bar{S}_5$ deux espaces de Klein dont les hyperquadriques Q et $\bar{Q}$ sont des images connues des espaces reglés dans les espaces S_3 et $\bar{S}_3$. Les images des congruences L et $\bar{L}$ sont alors des surfaces L^* et $\bar{L}^*$ dans S_5 et $\bar{S}_5$. L'homographie (35) entre S_3 et $\bar{S}_3$ engendre d'une manière évidente entre S_5 et $\bar{S}_5$ l'homographie (36) tangente à la correspondance $L^* \to \bar{L}^*$; ensuite on déduit facilement de (36_1), (38) et (39) en posant

$$q_{ij} = [B_iB_j] \tag{43}$$

que la droite

$$[q_{12}, \Phi_{13}q_{13} + \Phi_{14}q_{14} + \Phi_{23}q_{23} + \Phi_{24}q_{24} + \Phi_{34}q_{34}] \tag{44}$$

est la droite **K**-linéarisante de la droite

$$[q_{12}, \mathrm{d}q_{12}]\, . \tag{45}$$

Le plan tangent à la surface $\bar{L}^*$ est en vertu de (37_1) $[q_{12}, q_{14}, q_{23}]$. Les points q_{13}, q_{24} ont bien sûr une signification géométrique, car ils représentent les transformations de Laplace $[B_1, B_3]$, $[B_2, B_4]$ de la congruence $\bar{L}$. Nous avons donc dans $\bar{S}_5$ les espaces

$$R_1 = [q_{12}, q_{14}, q_{23}, q_{13}]\, , \quad R_2 = [q_{12}, q_{14}, q_{23}, q_{24}] \tag{46}$$

à signification géométrique bien déterminée.

*La droite **K**-linéarisante de direction l_1 ($\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 0$) est*

$$[q_{12}, (\bar{\alpha}_2 - \varrho^2\alpha_2)\, q_{13} + \Phi_{14}q_{14} + \Phi_{23}q_{23} + (\bar{\beta}_2 - \varrho^{-2}\beta_2)\, q_{24}]\, ; \tag{47}$$

la condition nécessaire et suffisante pour qu'elle soit située dans l'espace R_1 ou R_2 est

$$\bar{\alpha}_2 = \varrho^2\alpha_2 \quad ou \quad \bar{\beta}_2 = \varrho^{-2}\beta_2 \tag{48}$$

respectivement.

D'une façon analogue, *on obtient* pour la direction l_2 ($\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 1$) *la signification géométrique des conditions*

$$\beta_1\varrho^2 = \overline{\beta}_1 \quad ou \quad \alpha_1\varrho^{-2} = \overline{\alpha}_1 \,. \tag{49}$$

En les combinant convenablement j'obtiens *une nouvelle signification géométrique des déformations de congruences de droites considerées par M. E. Čech.*

Резюме

ЗАМЕЧАНИЯ К ТЕОРИИ ИЗГИБАНИЙ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ КОНГРУЭНЦИЙ

АЛОИС ШВЕЦ (Alois Švec), Прага.

(Поступило в редакцию 10/XII 1955 г.)

В работе рассматриваются точечные соответствия **C** между двумя трехмерными проективными пространствами S_3, $\overline{S}_3$ следующего типа: Пусть в S_3 и $\overline{S}_3$ даны соответственно конгруэнции прямых L и $\overline{L}$ с двумя фокальными поверхностями, далее между L и $\overline{L}$ дано соответствие (прямая $\to$ $\to$ прямая), переводящее друг в друга развертывающиеся поверхности этих двух конгруэнций. Наконец, мы предполагаем, что между каждыми двумя отвечающими друг другу прямыми дано проективное соответствие π, переводящее друг в друга отвечающие один другому фокусы. Соответствие **C** является теперь совокупностью проективных соответствий π. Доказывается теорема:

Соответствия **C** *рассматриваемого типа между двумя пространствами S_3 и $\overline{S}_3$ с тем свойством, что для каждой пары отвечающих друг другу точек X и* **C**$X = Y$ *существует касательная коллинеация* **K** *соответствия* **C** *такая, что луч конгруэнции $\overline{L}$, проходящий через точку Y, является* **K**-*линеаризирующей прямой всех лучей, проходящих через точку Y и лежащих в фокальных плоскостях конгруэнции $\overline{L}$, образованы следующим образом: Рассмотрим две непараболические конгруэнции L и $\overline{L}$, находящиеся в плоскостном изгибании. Все коллинеации, осуществляющие это плоскостное изгибание, определяют между соответствующей парой отвечающих друг другу точек одно и то же проективное соответствие φ. Тогда соответствие* **C** *представляет собой совокупность этих проективных соответствий φ.*

Вторая часть работы намечает новую геометрическую характеризацию введеных акад. Э. Чехом изгибаний прямолинейных конгруэнций при помощи **K**-линеаризирующих преобразований соответствия между поверхностями, представляющими известным уже образом в S_5 прямолинейные конгруэнции L и $\overline{L}$.