Czechoslovak Mathematical Journal

Miloš Zlámal

Über die erste Randwertaufgabe für eine singulär perturbierte elliptische Differentialgleichung

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 7 (1957), No. 3, 413–417

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100257`

ÜBER DIE ERSTE RANDWERTAUFGABE FÜR EINE SINGULÄR PERTURBIERTE ELLIPTISCHE DIFFERENTIALGLEICHUNG

MILOŠ ZLÁMAL, Brno.

(Eingelangt am 15. X. 1956.)

Es wird die erste Randwertaufgabe für die Gleichung $-a(x, \varepsilon)\, \Delta u + u = F(x, \varepsilon)$ untersucht, wo $a(x, \varepsilon)$ eine positive Funktion des Punktes $x \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ist und $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+} a(x, \varepsilon) = 0$ gilt.

Es sei $\mathfrak{G}$ ein beschränktes Gebiet im n-dimensionalen Euklidischen Raume E_n und Δu der n-dimensionale Laplacesche Differentialausdruck. MORGENSTERN hat in [1] ausser anderem bewiesen (siehe Satz 4), dass die Lösungen der Randwertaufgabe

$$-\varepsilon \Delta u + u = 0\,, \quad [u] = f\,^{1)} \tag{1}$$

bei $\varepsilon \to 0+$ in jedem abgeschlossenen Teilbereich von $\mathfrak{G}$ gleichmässig gegen Null streben. Zu dieser Behauptung führen wir zuerst einen kurzen elementaren Beweis ein. Dabei erhalten wir eine effektive Abschätzung für die Schnelligkeit der Konvergenz. Dann werden wir uns mit einem allgemeineren Fall beschäftigen, nämlich mit der Randwertaufgabe

$$-a(x, \varepsilon)\, \Delta u + u = F(x, \varepsilon)\,, \quad [u] = f(\varepsilon)\,. \tag{2}$$

Hinsichtlich des Gebietes $\mathfrak{G}$ setzen wir voraus, dass es bechränkt ist und dass die erste Randwertaufgabe für alle stetigen Randwerte lösbar ist. H sei seine Grenze und wenn $\overline{\mathfrak{D}}$ den gewählten abgeschlossenen Teilbereich von $\mathfrak{G}$ bedeutet, $\varrho > 0$ sei die Entfernung $\overline{\mathfrak{D}}$ von H. x bedeute den Punkt $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ in E_n und $u(x, \varepsilon)$ eine Lösung von (1).

Es sei jetzt $M_0 = \max|f|$. Weil die Lösungen der Gleichung (1) in $\mathfrak{G}$ weder den kleinsten negativen noch den grössten positiven Wert annehmen, so ist

$$|u(x, \varepsilon)| \leqq M_0\,. \tag{3}$$

[1]) $[u]$ bedeutet immer die Randwerte.

Wir benutzen die Mittelwertgleichung, wobei $x \in \mathfrak{D}$ der Mittelpunkt und ϱ der Radius der Kugel Ω ist, so dass das Innere der Kugel Ω immer in $\mathfrak{G}$ liegt. Es gilt (siehe [2], S. 261, Formel (40)):

$$u(x, \varepsilon) = \frac{\left(\dfrac{i\varrho}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right) J_{\frac{n-2}{2}}\left(\dfrac{i\varrho}{\sqrt{\varepsilon}}\right)} \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} u \, \mathrm{d}\Omega \,, \tag{4}$$

wo $J_\nu(z)$ die ν^{te} Besselsche Funktion ist. Daraus und aus (3) erhalten wir

$$|u(x, \varepsilon)| \leqq M_0 \frac{\left(\dfrac{i\varrho}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right) J_{\frac{n-2}{2}}\left(\dfrac{i\varrho}{\sqrt{\varepsilon}}\right)} \,. \tag{5}$$

Aus (5) folgt $u(x, \varepsilon) \to 0$ gleichmässig in $\mathfrak{D}$ bei $\varepsilon \to 0+$.

Richten wir jetzt unsere Aufmerksamkeit auf die Randwertaufgabe (2). Es seien $a(x, \varepsilon)$, $F(x, \varepsilon)$ und $F_0(x)$ für $x \in \bar{\mathfrak{G}}$ und $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ definiert und $a(x, \varepsilon)$ sei in $\bar{\mathfrak{G}}$ einmal und $F_0(x)$ zweimal stetig differenzierbar; $f(\varepsilon)$ sei stetig auf H. Dann gilt der folgende

Satz. *Es sei* $a(x, \varepsilon) > 0$, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+} a(x, \varepsilon) = 0$ *und* $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+} F(x, \varepsilon) = F_0(x)$ *gleichmässig in* $\bar{\mathfrak{G}}$ *und* $f(\varepsilon)$ *gleichmässig beschränkt auf* H. *Es existieren die (wie bekannt eindeutig bestimmten) Lösungen* $u(x, \varepsilon)$ *von* (2), *und zwar bei jeder Wahl der rechten Seite* F *und der Randwerte* f. *Dann streben* $u(x, \varepsilon)$ *bei* $\varepsilon \to 0+$ *in jedem abgeschlossenen Teilbereich von* $\mathfrak{G}$ *gleichmässig gegen* $F_0(x)$.

Beweis. Setzen wir $z = u - F_0$. Wir erhalten

$$- a(x, \varepsilon)\, \Delta z + z = G(x, \varepsilon) \,, \quad [z] = g(\varepsilon) \,,$$

wo $G(x, \varepsilon) = F(x, \varepsilon) - F_0(x) + a(x, \varepsilon) \,.\, \Delta F_0(x) \to 0$ gleichmässig in $\bar{\mathfrak{G}}$ und $g(\varepsilon) = f(\varepsilon) - [F_0]$ gleichmässig beschränkt auf H ist, $|g(\varepsilon)| \leqq M_0$. Es seien $z_1(x, \varepsilon)$ und $z_2(x, \varepsilon)$ die Lösungen der Randwertaufgaben

$$- a(x, \varepsilon)\, \Delta z_1 + z_1 = 0 \,, \quad [z_1] = g(\varepsilon) \,, \tag{6}$$

$$- a(x, \varepsilon)\, \Delta z_2 + z_2 = G(x, \varepsilon) \,, \quad [z_2] = 0 \,, \tag{7}$$

so dass $z = z_1 + z_2$. Wir beweisen: a) $z_1(x, \varepsilon) \to 0$ gleichmässig in jedem abgeschlossenen Teilbereich von $\mathfrak{G}$; b) $z_2(x, \varepsilon) \to 0$ gleichmässig in $\bar{\mathfrak{G}}$.

a)[2]) Man kann $g(\varepsilon) \geqq 0$ voraussetzen. Denn wenn $\bar{z}_1$ und $\bar{\bar{z}}_2$ die Lösungen von $- a(x, \varepsilon)\, \Delta z_1 + z_1 = 0$ bedeuten, wobei

$$[\bar{z}_1] = \tfrac{1}{2}(\max|g(\varepsilon)| + g(\varepsilon)) \quad \text{und} \quad [\bar{\bar{z}}_1] = \tfrac{1}{2}(\max|g(\varepsilon)| - g(\varepsilon)) \,,$$

dann ist $z_1 = \bar{z}_1 - \bar{\bar{z}}_2$.

---

[2]) Mein ursprünglicher Beweis war ein wenig komplizierter. Die Vereinfachung verdanke ich dem Herrn J. Nečas.

Die Lösung $z_1(x, \varepsilon)$ nimmt wieder nicht den kleinsten negativen und den grössten positiven Wert in $\mathfrak{G}$ an und darum

$$0 \leqq z_1(x, \varepsilon) \leqq M_0 . \tag{8}$$

Es sei $\overline{\mathfrak{K}}_1$ eine beliebige ganz in $\mathfrak{G}$ liegende Kugel und $\overline{\mathfrak{K}}$ die konzentrische mit dem halben Radius. Es bedeute $z_0(x, \varepsilon)$ die Lösung von $\Delta z_0 = 0$, die auf $\overline{\mathfrak{K}}_1$ dieselben Randwerte wie $z_1(x, \varepsilon)$ annimmt. Nach dem Prinzip von Maximum und mit Rücksicht auf (8) gilt $0 \leqq z_0(x, \varepsilon) \leqq M_0$.

Nun schreiben wir (6) folgendermassen:

$$\Delta z_1 = \frac{1}{a(x, \varepsilon)} z_1 . \tag{9}$$

Dann ist

$$z_1(x, \varepsilon) = z_0(x, \varepsilon) - \int_{\overline{\mathfrak{K}}_1} K(x, \xi) \frac{z_1(\xi, \varepsilon)}{a(\xi, \varepsilon)} \mathrm{d}\xi , \tag{10}$$

wo $K(x, \xi)$ die Greensche Funktion des Laplaceschen Differentialausdruckes bedeutet. Weil $z_1(x, \varepsilon) \geqq 0$ und $0 \leqq z_0(x, \varepsilon) \leqq M_0$ gilt, folgt aus (10)

$$\int_{\overline{\mathfrak{K}}_1} K(x, \xi) \frac{z_1(\xi, \varepsilon)}{a(\xi, \varepsilon)} \mathrm{d}\xi \leqq M_0 . \tag{11}$$

$K(x, \xi)$ nimmt als eine Funktion von ξ auf $\overline{\mathfrak{K}}$ ein positives Minimum k_0 an und darum

$$\int_{\overline{\mathfrak{K}}_1} K(x, \xi) \frac{z_1(\xi, \varepsilon)}{a(\xi, \varepsilon)} \mathrm{d}\xi \geqq \frac{k_0}{\max\limits_{\xi \in \overline{\mathfrak{G}}} a(\xi, \varepsilon)} \int_{\overline{\mathfrak{K}}_1} z_1(\xi, \varepsilon) \mathrm{d}\xi ,$$

so dass aus (11) folgt

$$\int_{\overline{\mathfrak{K}}_1} z_1(\xi, \varepsilon) \mathrm{d}\xi \leqq \frac{M(\varepsilon)}{k_0} M_0 , \tag{12}$$

wo $M(\varepsilon) = \max a(x, \varepsilon) \to 0$ und k_0 nur von dem Radius der Kugel $\overline{\mathfrak{K}}$ abhängt.

Jetzt genügt es den Kunstgriff von Morgenstern zu benutzen. Nach (8) und (9) ist nämlich $z_1(x \varepsilon)$ eine subharmonische Funktion. Deshalb folgt aus (12) auf Grund der Mittelwertungleichung für subharmonische Funktionen, dass $z_1(x, \varepsilon) \to 0$ gleichmässig in jedem abgeschlossenen Teilbereich von $\mathfrak{G}$ bei $\varepsilon \to 0+$.

b) Was die Behauptung $z_2(x, \varepsilon) \to 0$ gleichmässig in $\mathfrak{G}$ betrifft, folgt sie unmittelbar aus der Abschätzung

$$|z_2(x, \varepsilon)| \leqq \max_{x \in \overline{\mathfrak{G}}} |G(x, \varepsilon)| , \tag{13}$$

die wieder eine Folge der bekannten Maximum- und Minimumeigenschaften der Lösungen von (7) ist.

Bemerkung. (13) gibt eine effektive Abschätzung für die Schnelligkeit der Konvergenz. Ist speziell $a(x, \varepsilon) \equiv \varepsilon$ und $F(x, \varepsilon) = F_0(x)$, dann ist $G(x, \varepsilon) = \varepsilon \,.\, \Delta F_0$, so dass

$$|z_2(x, \varepsilon)| \leqq \varepsilon \,.\, \max|\Delta F_0| \,.$$

Für $z_1(x, \varepsilon)$ gilt die Abschätzung (5), wo $|f(\varepsilon) - [\Delta F_0]| \leqq M_0$ und ϱ die Entfernung $\overline{\mathfrak{D}}$ von H ist. Dabei

$$u(x, \varepsilon) = F_0(x) + z_1(x, \varepsilon) + z_2(x, \varepsilon) \,.$$

LITERATUR

[1] *D. Morgenstern:* Singuläre Störungstheorie partieller Differentialgleichungen, Journ. of Rat. Mech. and Anal., vol. 5 (1956), 203–216.

[2] *R. Courant* und *D. Hilbert:* Methoden der mathematischen Physik II, Berlin, Springer, 1937.

Резюме

О ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ПРОБЛЕМЕ ДЛЯ ОДНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ОСОБЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ

МИЛОШ ЗЛАМАЛ (Miloš Zlámal), Брно.

(Поступило в редакцию 15/X 1956 г.)

Пусть $\mathfrak{G}$ — ограниченная, связная и открытая область в E_n, пусть Δu обозначает n-мерный оператор Лапласа и x — точку $(x_1, \ldots, x_n)$ в E_n. Пусть функции $a(x, \varepsilon)$, $F(x, \varepsilon)$ и $F_0(x)$ определены для $x \in \overline{\mathfrak{G}}$ и $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, первые две обладают непрерывными частными производными первого порядка, а $F_0(x)$ — второго порядка, $a(x, \varepsilon) > 0$, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+} a(x, \varepsilon) = 0$ и $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+} F(x, \varepsilon) = 0$ равномерно в $\mathfrak{G}$. Кроме того, пусть $f(\varepsilon)$ — непрерывная функция на границе H области $\mathfrak{G}$. При этих условиях доказано, что решения $u(x, \varepsilon)$ краевой задачи

$$- a(x, \varepsilon) \, \Delta u + u = F(x, \varepsilon) \,, \quad [u] = f(\varepsilon)$$

сходятся в каждой замкнутой части облатси $\mathfrak{G}$ равномерно к $F_0(x)$ при $\varepsilon \to 0+$. Доказательство дает одновременно эффективную оценку быстроты сходимости. Так напр., в частном случае $a(x, \varepsilon) \equiv \varepsilon$ и $F(x, \varepsilon) = F_0(x)$ имеет место

$$u(x, \varepsilon) = F_0(x) + z_1(x, \varepsilon) + z_2(x, \varepsilon) \,,$$

причем во всей $\mathfrak{G}$

$$|z_2(x, \varepsilon)| \leqq \varepsilon \max |\Delta F_0|$$

и в каждой замкнутой части $\overline{\mathfrak{D}}$ области $\mathfrak{G}$

$$|z_1(x, \varepsilon)| \leqq M_0 \frac{\left(\frac{i\varrho}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) J_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{i\varrho}{\sqrt{\varepsilon}}\right)},$$

где $\varrho > 0$ есть расстояние $\overline{\mathfrak{D}}$ от H, $M_0 \geqq |f(\varepsilon) - [\Delta F_0]|$ и $J_\nu(z)$ — Бесселева функция порядка ν.