

Vlastimil Dlab

Заметка к теории полных абелевых групп

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 8 (1958), No. 1, 54–61

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/100276>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1958

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ЗАМЕТКА К ТЕОРИИ ПОЛНЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

ВЛАСТИМИЛ ДЛАБ (Vlastimil Dlab), Прага

(Поступило в редакцию 8/1 1957 г.)

В настоящей статье дается характеристика полных абелевых групп при помощи систем их образующих и при помощи определенного свойства их подгрупп. Далее в работе приведены примеры абелевых групп, системы образующих которых имеют определенные свойства.

1. Обозначения и определения

На протяжении всей статьи будем под группой понимать абелеву группу (с аддитивной записью). Порядок элемента $g \in G$ обозначим символом $O(g)$, прямую сумму групп G_1 и G_2 (или же групп G_δ , $\delta \in \Delta$) символом $G_1 + G_2$ (или же $\sum_{\delta \in \Delta} G_\delta$) и фактор-группу $G \bmod H$, $H \subseteq G$, обозначим через G/H .

Группа G называется *полной*, если равенство $pG = G^1$) справедливо для каждого простого числа p ; группа G является, следовательно, полной тогда и только тогда, если для всякого элемента $g \in G$ и всякого целого ненулевого числа k уравнение $k \cdot x = g$ имеет в G хотя бы одно решение.

Пусть \mathfrak{M} — некоторое непустое множество элементов группы G ; символом $\{\mathfrak{M}\}$ будем обозначать подгруппу группы G , порожденную множеством \mathfrak{M} . Если \mathfrak{S} — множество элементов группы G такое, что $\{\mathfrak{S}\} = G$, то говорят, что \mathfrak{S} — *система образующих* группы G . Итак, $\mathfrak{S} = (g_i)_{i \in I^2}$) является системой образующих группы G тогда и только тогда, если всякий элемент $g \in G$ можно представить в виде линейной формы f от элементов множества \mathfrak{S} :

$$g = k_1 \cdot g_{i_1} + k_2 \cdot g_{i_2} + \dots + k_n \cdot g_{i_n}, \quad k_i \text{ — целые числа, } g_{i_i} \in \mathfrak{S} \\ \text{для } i = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

¹⁾ pG — подгруппа группы G , состоящая из элементов вида $p \cdot g$, $g \in G$.

²⁾ Символ $(a_\delta)_{\delta \in \Delta}$, или же $(\mathfrak{M}_\delta)_{\delta \in \Delta}$, означает множество, состоящее из элементов a_δ , $\delta \in \Delta$, или же множество, которое является объединением множеств \mathfrak{M}_δ , $\delta \in \Delta$. В символе $(\mathfrak{M}_\delta)_{\delta \in \Delta}$ будем всегда внутренние скобки выпускать: $\{\mathfrak{M}_\delta\}_{\delta \in \Delta}$.

В этом случае будем для краткости вместо (1) писать

$$g = f(\mathfrak{G}). \quad (1')$$

Определение 1. Систему образующих \mathfrak{G} группы G будем называть *неприводимой*, если множество $\mathfrak{G}' = \mathfrak{G} \setminus (g)^3$ не является системой образующих группы G ни для какого элемента $g \in \mathfrak{G}$. Система образующих, не обладающая этим свойством, называется *приводимой*. Если $\mathfrak{G}' = \mathfrak{G} \setminus (g)$ является системой образующих группы G для всякого $g \in \mathfrak{G}$, то назовем \mathfrak{G} *сильно приводимой* системой образующих группы G .

Определение 2. Группу G назовем *достижимой*, если существует ее собственная подгруппа $H \subset G$ и элемент $g \in G$ так, что

$$\{H, g\} = G. \quad (2)$$

Замечание. Очевидно, что группа G достижима тогда и только тогда, если существует ее собственная подгруппа $H' \subset G$ и конечное число элементов g_1, g_2, \dots, g_n со свойством $\{H', g_1, g_2, \dots, g_n\} = G$.

2. Теоремы

Теорема 1. Пусть G — полная группа. Тогда G не является достижимой.

Доказательство. Если $G = 0$, то утверждение теоремы тривиально. Итак, пусть $G \neq 0$ и пусть существует собственная подгруппа $H \subset G$ и элемент $g \in G$ так, что справедливо соотношение (2). Так как всякое прямое слагаемое полной группы, очевидно, опять полно, то циклическая подгруппа $\{g\} \subset G$ не может быть прямым слагаемым группы G ; ввиду этого, для подходящего целого ненулевого числа k будет

$$k \cdot g = h, \quad h \in H. \quad (3)$$

Вследствие полноты группы G существует, далее, элемент $g_0 \in G$ такой, что

$$k \cdot g_0 = g, \quad (4)$$

причем, ввиду (2), имеем

$$g_0 = h_0 + l \cdot g, \quad h_0 \in H, \quad l — \text{целое число}. \quad (5)$$

Тогда, согласно (4), (5) и (3),

$$g = k \cdot g_0 = k \cdot h_0 + lk \cdot g = k \cdot h_0 + l \cdot h,$$

итак, $g \in H$. Следовательно, имеем $H = G$, что противоречит нашему предположению; этим теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть группа $G \neq 0$ не достижима. Тогда всякая система образующих группы G сильно приводима.

³⁾ $\mathfrak{M} \setminus \mathfrak{N}$ означает разность множеств \mathfrak{M} и \mathfrak{N} .

Доказательство. Пусть \mathfrak{G} , наоборот, система образующих группы $G \neq 0$, которая не является сильно приводимой; пусть элемент $g_0 \in \mathfrak{G}$ такой, что

$$\{\mathfrak{G} \setminus (g_0)\} = H \neq G \quad \text{или} \quad \mathfrak{G} \setminus (g_0) = \emptyset;^4)$$

во втором случае положим $H = 0$. Тогда имеем $H \subset G$, $g_0 \in G$ и $\{H, g_0\} = G$; следовательно, G — достижимая вопреки предположению теоремы, и доказательство закончено.

Теорема 3. *Пусть всякая система образующих группы G сильно приводима. Тогда G полна.*

Доказательство этой теоремы проведем опять от противного. Предположим, что G не полна. Тогда существует простое число p такое, что $pG \neq G$. Далее, фактор-группа G/pG , очевидно, является прямой суммой циклических групп порядка p ,⁵⁾ т. е.

$$G/pG = \sum_{\delta \in \Delta} \{\bar{h}_\delta\}, \quad O(\bar{h}_\delta) = p \quad \text{для} \quad \delta \in \Delta. \quad (6)$$

Пусть \mathfrak{G}_p — система образующих группы pG . Пусть h_δ — произвольный элемент смежного класса \bar{h}_δ группы $G \bmod pG$: $h_\delta \in \bar{h}_\delta$, $\delta \in \Delta$. Обозначим, далее, множества $(\bar{h}_\delta)_{\delta \in \Delta}$ и $(h_\delta)_{\delta \in \Delta}$ соответственно через $\bar{\mathfrak{H}}$ и \mathfrak{H} . Тогда $\mathfrak{G} = (\mathfrak{G}_p, \mathfrak{H})$, очевидно, — система образующих группы G . Мы докажем, что для всякого индекса $\delta \in \Delta$ справедливо

$$h_\delta \text{ non } \in \{\mathfrak{G} \setminus (h_\delta)\}. \quad (7)$$

Если бы соотношение (7) было неверно, то существовало бы равенство

$$h_\delta = f_1(\mathfrak{G}_p) + f_2(\mathfrak{H} \setminus (h_\delta));$$

в фактор-группе G/pG мы, следовательно, получили бы равенство

$$\bar{h}_\delta = f_2(\bar{\mathfrak{H}} \setminus (\bar{h}_\delta)),$$

в противоречии с разложением (6). Итак, система образующих \mathfrak{G} не является сильно приводимой. Мы получаем противоречие с предположением теоремы, и тем теорема 3 полностью доказана.

Из теорем 1, 2 и 3 вытекают непосредственно следующие следствия:

Следствие 1. *Ненулевая полная группа не обладает неприводимой системой образующих.*

Следствие 2. *Ненулевая группа полна тогда и только тогда, если всякая ее система образующих сильно приводима.*

Следствие 3. *Группа полна тогда и только тогда, если она не достижима.*

⁴⁾ \emptyset означает пустое множество.

⁵⁾ Порядок всех ненулевых элементов группы G/pG равняется простому числу p , так что G/pG является векторным пространством над полем характеристики p ; отсюда вытекает непосредственно прямое разложение (6).

3. Несколько замечаний

Определение 3. Говорим, что система образующих \mathfrak{G} группы G *наследственно приводима*, если \mathfrak{G} и также всякая система образующих \mathfrak{G}' группы G , которая является подмножеством системы \mathfrak{G} , приводима. Подобным способом определяем тоже *наследственно сильно приводимую* систему образующих группы G .

Итак, согласно определению 3, предположение теоремы 3 эквивалентно предположению, что всякая система образующих группы G наследственно сильно приводима. Как показывает следующий пример группы G_1 , утверждение теоремы 3 неверно уже при более слабом предположении, что всякая система образующих группы G наследственно приводима (т. е. при предположении, что не существует неприводимая система образующих группы G):

Пусть $G_1 = G(p^\infty) + G(p)$, причем $G(p^\infty)$ — группа Приюфера типа p^∞ , которая задана системой образующих и определяющих соотношений

$$h_1, h_2, \dots, h_i, \dots, p \cdot h_1 = 0, \quad p \cdot h_{i+1} = h_i \quad (i = 1, 2, \dots),$$

и $G(p)$ — циклическая группа порядка p , образующий элемент которой обозначим через g (p — простое число). Как известно, $G(p^\infty)$ является полной группой, в которой для произвольных двух элементов e_1, e_2 , $O(e_1) \neq O(e_2)$, справедливо $e_j \in \{e_1 + e_2\}$ для $j = 1, 2$. Обозначим еще для каждого натурального числа k через G_1^k подгруппу группы G_1 , порожденную элементами $g, h_1, h_2, \dots, h_k: G_1^k = \{g, h_1, h_2, \dots, h_k\}$.

Пусть \mathfrak{G}_1 — какая-нибудь система образующих группы G_1 ; докажем, что \mathfrak{G}_1 не является неприводимой. Пусть g_1, g_2 — два элемента системы \mathfrak{G}_1 :

$$g_l = g'_l + g''_l, \quad g'_l \in G(p^\infty), \quad g''_l \in G(p), \quad l = 1, 2; \quad (8)$$

пусть $g_l \in G_1^{k_l}$, $l = 1, 2$. Тогда необходимо существует элемент

$$g_3 \in \mathfrak{G}_1, \quad g_3 \text{ нон} \in G_1^{k_1}, \quad g_3 = g'_3 + g''_3, \quad g'_3 \in G(p^\infty), \quad g''_3 \in G(p); \quad (9)$$

пусть $g_3 \in G_1^{k_2}$. Одинаковым способом мы легко убеждаемся в том, что существует элемент

$$g_4 \in \mathfrak{G}_1, \quad g_4 \text{ нон} \in G_1^{k_2}, \quad g_4 = g'_4 + g''_4, \quad g'_4 \in G(p^\infty), \quad g''_4 \in G(p). \quad (10)$$

Если $g''_3 = 0$, то, очевидно, для подходящего целого числа t , $(t, p) = 1$,⁶⁾ справедливо

$$t \cdot g'_3 = t \cdot g_3 = h_{k_3}, \quad k_3 > k_2,$$

и поэтому или $g_2 \in \{g_3\}$ (в случае, когда $g''_2 = 0$), или $g_1 \in \{g_2, g_3\}$; итак, \mathfrak{G}_1 не является в этом случае неприводимой. Одинаковым способом легко проверить, что \mathfrak{G}_1 — приводимая система образующих, если $g''_4 = 0$.

⁶⁾ (z_1, z_2) означает наибольший общий делитель целых чисел z_1 и z_2 .

Остается рассмотреть, следовательно, случай, когда $g_3'' \neq 0$ и $g_4'' \neq 0$. Тогда, очевидно, существуют целые числа u, v , $(u, p) = (v, p) = 1$, такие, что из (9) и (10) следует

$$v \cdot g_4 + u \cdot g_3 = v \cdot g_4' + u \cdot g_3'; \quad (11)$$

далее, согласно сверху сделанному примечанию о группе $G(p^\infty)$, существует целое число w , $(w, p) = 1$, такое, что

$$w \cdot (v \cdot g_4' + u \cdot g_3') = h_{k_4}, \quad k_4 > k_2. \quad (12)$$

Из соотношений (11), (12) и (8) уже непосредственно ясно, что или $g_2 \in \{g_3, g_4\}$, или $g_1 \in \{g_2, g_3, g_4\}$, так что \mathbb{G}_1 на самом деле не является неприводимой.⁷⁾

Сверх того множество

$$\mathbb{G}_1^* = (h_1 + g_1, h_2 + g_1, \dots, h_i + g_1, \dots),$$

очевидно, является наследственно сильно приводимой системой группы G_1 ; притом, конечно, группа G_1 неполна.

Так как всякая полная группа является прямым слагаемым группы, в которой она содержится, ясно, что всякая группа, которая не является редуцированной,⁸⁾ обладает наследственно приводимой системой образующих. Неверно, однако, что всякая система образующих такой группы наследственно приводима:

Пусть $G_2 = \sum_{m=1}^{\infty} G_m(p^\infty) + \sum_{m=1}^{\infty} G_m(p)$;⁹⁾ пусть

$$h_{m_1}, h_{m_2}, \dots, h_{m_i}, \dots, p \cdot h_{m_1} = 0, \quad p \cdot h_{m_{i+1}} = h_{m_i} \quad (i = 1, 2, \dots)$$

— система образующих и определяющих соотношений группы $G_m(p^\infty)$ для $m = 1, 2, \dots$ и g_m , $O(g_m) = p$, — образующий элемент циклической группы $G_m(p)$, $m = 1, 2, \dots$ ⁹⁾

Если разложить множество всех натуральных чисел в бесконечное число счетных множеств $N_1, N_2, \dots, N_t, \dots$:

$$N_t = (m_{t1}, m_{t2}, \dots, m_{ti}, \dots),$$

то множество

$$\mathbb{G}_2^* = (\mathbb{G}_{21}^*, \mathbb{G}_{22}^*, \dots, \mathbb{G}_{2t}^*, \dots), \quad \text{где}$$

$$\mathbb{G}_{2t}^* = (h_{t1} + g_{m_{t1}}, h_{t2} + g_{m_{t2}}, \dots, h_{ti} + g_{m_{ti}}, \dots) \quad \text{для } t = 1, 2, \dots,$$

очевидно, является *неприводимой системой образующих* нередуцированной группы G_2 .

⁷⁾ Подобным способом можно это утверждение доказать для группы $G = G(p^\infty) + G'$, где G' — конечная подгруппа.

⁸⁾ Т. е. существует ненулевая полная подгруппа этой группы.

⁹⁾ Значит, G_2 является прямой суммой счетного числа групп, изоморфных группе G_1 .

Группа G_2 обладает также *наследственно сильно приводимой системой образующих*; системой этого типа является, как легко проверить, напр. множество

$$\mathfrak{G}_{2m}^{**} = (\mathfrak{G}_{21}^{**}, \mathfrak{G}_{22}^{**}, \dots, \mathfrak{G}_{2m}^{**}, \dots), \text{ где} \\ \mathfrak{G}_{2m}^{**} = (h_{m1} + g_m, h_{m2} + g_m, \dots, h_{mi} + g_m, \dots) \text{ для } m = 1, 2, \dots$$

Рассмотрим далее следующие системы образующих группы G_2 :

(I) систему образующих $\mathfrak{G}_{21} = (g_1, \mathfrak{G}'_{21})$, где \mathfrak{G}'_{21} является множеством всех элементов прямого слагаемого $G'_{21} = \sum_{m=1}^{\infty} G_m(p^\infty) + \sum_{m=2}^{\infty} G_m(p)$ группы G_2 ;

(II) систему образующих \mathfrak{G}_{22} , которая состоит из всех элементов группы G_2 ;

(III) систему образующих $\mathfrak{G}_{23} = (\mathfrak{H}, g_1, g_2, \dots, g_m, \dots)$, где

$$\mathfrak{H} = (\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \dots, \mathfrak{H}_m, \dots), \quad \mathfrak{H}_m = (h_{m1}, h_{m2}, \dots, h_{mi}, \dots) \text{ для} \\ m = 1, 2, \dots; \quad (13)$$

(IV) систему образующих $\mathfrak{G}_{24} = (\mathfrak{H}, \mathfrak{G}'_{24})$, где \mathfrak{H} — множество (13) и \mathfrak{G}'_{24} состоит из всех элементов прямого слагаемого $G'_{24} = \sum_{m=1}^{\infty} G_m(p)$ группы G_2 .

Легко убедиться в том, что мы таким образом построили 4 следующих типа систем образующих группы G_2 :

(I) *приводимую систему образующих, которая не является ни сильно приводимой, ни наследственно приводимой* (система \mathfrak{G}_{21});

(II) *сильно приводимую систему образующих, которая не является наследственно приводимой и поэтому тем более не является наследственно сильно приводимой* (система \mathfrak{G}_{22});

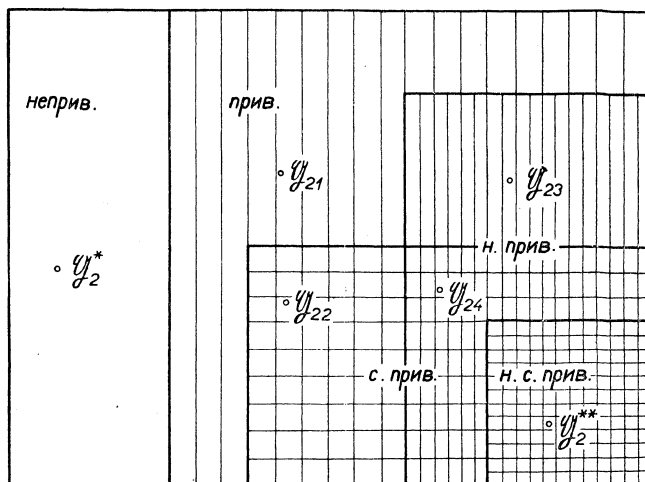
(III) *наследственно приводимую систему образующих, которая не является сильно приводимой* (система \mathfrak{G}_{23});

(IV) *наследственно приводимую систему образующих, которая является одновременно сильно приводимой, но не является наследственно сильно приводимой* (система \mathfrak{G}_{24}).

Итак, группа G_2 имеет все логически возможные типы приведенных систем образующих (см. графическое изображение). Этим одновременно доказана независимость понятий, введенных в определениях I и 3.

Примечание. Во время подготовки к печати автор заметил, что подобным проблемам посвящены следующие работы: J. Łoś, E. SĄSIADA and Z. SŁOMIŃSKI, *On groups with hereditarily generating systems*, Publ. Math. Debrecen 4 (1956), 351—356, и Г. Лось, *Об абелевых группах без кручения с на-*

следственными последовательностями образующих, Бюлл. Польск. Ак. Наук, Отд. III, 4 (1956), 165—167. Авторы вводят в них совсем другие понятия и достигают при помощи них более сложных результатов.



Графическое изображение множества систем образующих группы G_2 .

Summary

A NOTE ON THE THEORY OF DIVISIBLE ABELIAN GROUPS

VLASTIMIL DLAB, Praha.

(Received January 8, 1957.)

In this paper a characterization of divisible groups*) by means of their generating systems and by means of a certain property of their subgroups is given. The author starts by introducing the following definitions:

Definition 1. A generating system \mathfrak{G} of a group G is said to be *irreducible*, if the set $\mathfrak{G}' = \mathfrak{G} \setminus (g)$ is not the generating system of G for any element $g \in \mathfrak{G}$. In the contrary case we speak about a *reducible* system of a group G . If $\mathfrak{G}' = \mathfrak{G} \setminus (g)$ is a generating system of G for any element $g \in \mathfrak{G}$, then \mathfrak{G} is called *strongly reducible* generating system of G .

Definition 2. We call a group G *attainable*, if a proper subgroup $H \subset G$ and an element $g \in G$ exist, such that $\{H, g\} = G$.

*) By a group always an abelian group is meant.

Definition 3. A generating system \mathfrak{G} of a group G is said to be *hereditarily reducible*, if \mathfrak{G} and also every generating system \mathfrak{G}' of G , which is a subset of system \mathfrak{G} , is reducible. In the same way let us define the *hereditarily strongly reducible* generating system of a group G .

The author then proves the following assertions:

Theorem 1. *If G is a divisible group, then G is not attainable.*

Theorem 2. *If a group $G \neq 0$ is not attainable, then every generating system of the group G is strongly reducible.*

Theorem 3. *If every generating system of a group G is strongly reducible, then G is divisible.*

At the end the author shows on the example of the group

$$G_2 = \sum_{m=1}^{\infty} G_m(p^\infty) + \sum_{m=1}^{\infty} G_m(p), \text{ (**)}$$

that a group can have all logical possible types of generating systems:

- (I) an irreducible generating system (the system \mathfrak{G}_2^*);
- (II) a reducible generating system which is neither strongly reducible nor hereditarily reducible (the system \mathfrak{G}_{21});
- (III) a strongly reducible generating system which is not hereditarily reducible and therefore all the more not hereditarily strongly reducible (the system \mathfrak{G}_{22});
- (IV) a hereditarily reducible generating system which is not strongly reducible (the system \mathfrak{G}_{23});
- (V) a hereditarily reducible generating system which is simultaneously strongly reducible and which is not hereditarily strongly reducible (the system \mathfrak{G}_{24});
- (VI) a hereditarily strongly reducible generating system (the system \mathfrak{G}_2^{**}).

** $G(p^\infty)$ is the Prüfer's group of the type p^∞ and $G(p)$ is the cyclic group of the order p (p is assumed to be prime).