

Miroslav Katětov

О соотношении между метрической и топологической размерностью

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 8 (1958), No. 2, 163–166

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/100291>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1958

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

О СООТНОШЕНИИ МЕЖДУ МЕТРИЧЕСКОЙ
И ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ РАЗМЕРНОСТЬЮ

МИРОСЛАВ КАТЕТОВ (Miroslav Katětov), Прага

(Поступило в редакцию 24/VIII 1957 г.)

В статье доказывається, что топологическая размерность (определенная при помощи покрытий) метрического пространства не может превышать его удвоенной метрической размерности.

В работе К. Ситникова [3]*) был дан пример метрического пространства, топологическая размерность которого отличается от метрической: топологически оно двумерно, в смысле метрической размерности одномерно. В той же работе указано, как построить (при $n = 4, 5, \dots$) пространство, имеющее размерности, соответственно, $n - 1$ и $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

В настоящей заметке (содержание которой изложено вкратце в сообщении, опубликованном в журнале „*Casopis pro pěstování matematiky*“, 1957, 82, 367) выводятся неравенства, имеющие место между метрической и топологической размерностью.

Приведем прежде всего некоторые определения и обозначения.

Употребительны различные эквивалентные определения метрической размерности (см. напр. [2], [3], [4]). Остановимся на следующем: метрической размерностью метрического пространства P назовем наименьшее r такое, что для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое покрытие пространства P кратности $\leq r + 1$, состоящее из множеств диаметра $< \varepsilon$; эту размерность мы будем обозначать через $\mu \dim P$.

Метрическая размерность, очевидно, инвариантна по отношению к взаимно однозначным взаимно равномерно непрерывным отображениям, так что, собственно говоря, мы имеем дело с размерностью (одним из возможных определений размерности) метризуемого равномерного пространства. Следует также отметить, что, как вытекает из паракомпактности метрической

*) Цифры в квадратных скобках означают ссылки на список литературы, приведенный в конце статьи.

кого пространства, в приведенном определении можно, не изменяя его смысла, говорить не о любых открытых покрытиях, а о локально конечных открытых покрытиях.

Топологической размерностью пространства P мы будем, как обычно, называть наименьшее r такое, что в любое конечное открытое покрытие P можно вписать открытое покрытие кратности $\leq r + 1$; эту размерность мы будем обозначать $\dim P$.

Метрику пространства P мы будем обозначать через ϱ ; если $a \in P$, $A \subset P$, $B \subset P$, то полагаем $\varrho(a, B) = \inf_{y \in B} \varrho(a, y)$, $\varrho(A, B) = \inf_{\substack{x \in A \\ y \in B}} \varrho(x, y)$. Если \mathbf{A} — система множеств, то $\bigcup \mathbf{A}$ будет обозначать объединение всех множеств системы \mathbf{A} .

Теорема. Если P метрическое пространство, то

$$\mu \dim P \leq \dim P \leq 2\mu \dim P.$$

Доказательство. I. Неравенство $\mu \dim P \leq \dim P$ вытекает немедленно из известных теорем. Действительно, пусть $n = \dim P$; пусть $\varepsilon > 0$. Обозначим через \mathbf{A} покрытие пространства P , состоящее из всех открытых множеств диаметра $< \varepsilon$. Как известно, метрическое пространство паракомпактно; поэтому в \mathbf{A} можно вписать локально конечное открытое покрытие \mathbf{B} . Вследствие того, что $\dim P = n$, в \mathbf{B} можно вписать (см. напр. [1]) открытое покрытие \mathbf{C} кратности $\leq n + 1$; очевидно, \mathbf{C} состоит из множеств диаметра $< \varepsilon$.

II. Докажем теперь, что $\dim P \leq 2\mu \dim P$. Положим $m = \mu \dim P$. Достаточно доказать, что для любого заданного конечного открытого покрытия \mathbf{G} пространства P существует вписанное в \mathbf{G} открытое покрытие \mathbf{H} кратности $\leq 2m + 1$. По определению метрической размерности, существуют открытые покрытия \mathbf{A}_k , $k = 1, 2, \dots$, пространства P такие, что любое $U \in \mathbf{A}_k$ имеет диаметр $< 3^{-k}$ и каждое \mathbf{A}_k имеет кратность $\leq m + 1$. Обозначим через \mathbf{B}_k систему тех $U \in \mathbf{A}_k$, для которых $\varrho(U, P - G) > 3^{-k}$ хотя бы для одного $G \in \mathbf{G}$, и положим $V_k = \bigcup \mathbf{B}_k$. Обозначим теперь через C_k множество тех $x \in P$, которые содержатся в $m + 1$ множествах системы \mathbf{B}_k ; положим $F_0 = \emptyset$, $F_1 = C_1$, $F_k = C_k \cup V_{k-1}$ для $k = 2, 3, \dots$. Обозначим, наконец, для $k = 1, 2, \dots$ через \mathbf{H}_k систему всех $U \in F_{k-1}$, $U \in \mathbf{B}_k$, а через \mathbf{H} — объединение систем \mathbf{H}_k .

III. Чтобы показать, что \mathbf{H} имеет требуемые свойства, докажем сначала, что (1) $\bigcup_{k=1}^{\infty} V_k = P$, (2) $\bar{V}_k \subset V_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$, (3) $\bar{C}_k \subset V_k$, $k = 1, 2, \dots$

Возьмем $x \in P$. Тогда $x \in G_0$ для некоторого $G_0 \in \mathbf{G}$. Подбрав k так, чтобы $3^{-k+1} < \varrho(x, P - G_0)$ и взяв $U_0 \in \mathbf{A}_k$ такое, что $x \in U_0$, получаем $\varrho(U_0, P - G_0) < 3^{-k}$, так что $U_0 \in \mathbf{B}_k$, $x \in V_k$. Этим доказано равенство (1).

Пусть $x \in \bar{V}_k$; предположим, что $x \text{ нон} \in V_{k+1}$. Возьмем $U_0 \in \mathbf{A}_{k+1}$ такое, что $x \in U_0$. Так как $U_0 \text{ нон} \in \mathbf{B}_{k+1}$ (иначе бы было $x \in V_{k+1}$), то для любого $G \in \mathbf{G}$ имеем $\varrho(U_0, P - G) \leq 3^{-k-1}$. Ввиду $x \in \bar{V}_k$, имеем $V_k \cap U_0 \neq \emptyset$. Возьмем $y \in V_k \cap U_0$; тогда с одной стороны, ввиду того, что U_0 имеет диаметр $< 3^{-k-1}$, получаем $\varrho(y, P - G) < 2 \cdot 3^{-k-1}$ для любого $G \in \mathbf{G}$; с другой стороны, ввиду $y \in V_k$, существует $U_1 \in \mathbf{A}_k$ такое, что $y \in U_1$ и для некоторого $G_0 \in \mathbf{G}$ имеем $\varrho(U_1, P - G_0) > 3^{-k}$ и, следовательно, $\varrho(y, P - G_0) > 3^{-k}$. Итак, мы получили противоречие, чем и доказано соотношение (2).

Возьмем $x \in \bar{C}_k$; предположим, что $x \text{ нон} \in V_k$. Возьмем $U_0 \in \mathbf{A}_k$ такое, что $x \in U_0$; очевидно, $U_0 \text{ нон} \in \mathbf{B}_k$. Так как $U_0 \in \mathbf{A}_k$, $U_0 \text{ нон} \in \mathbf{B}_k$, а кратность \mathbf{A}_k не превышает $m + 1$, то, очевидно, любое $y \in U_0$ лежит не более чем в m множествах из \mathbf{B}_k ; но это невозможно, так как $U_0 \cap C_k \neq \emptyset$. Итак, соотношение (3) доказано.

IV. Полагая $H_k = \bigcup \mathbf{H}_k$, имеем, очевидно, $H_k = V_k - F_{k-1}$, из чего, согласно (2) и (3), вытекает $H_1 = V_1$, $H_k \supset V_k - V_{k-1}$, $k = 2, 3, \dots$. Следовательно, согласно (1), $\bigcup \mathbf{H} = \bigcup_{k=1}^{\infty} H_k = P$. Итак, \mathbf{H} является открытым покрытием пространства P . Так как системы \mathbf{B}_k , очевидно, вписаны в \mathbf{G} , то также система \mathbf{H} вписана в \mathbf{G} .

Возьмем любое $x \in P$; возьмем наименьшее q такое, что $x \in H_q$. Так как $H_k = V_k - F_{k-1}$, а $F_{k-1} \supset \bar{V}_{k-2}$, где $k = 3, 4, \dots$, то $H_k \subset V_k$, $k = 1, 2, \dots$, $H_k \cap \bar{V}_{k-2} = \emptyset$, $k = 3, 4, \dots$; поэтому имеем $x \text{ нон} \in H_k = \bigcup \mathbf{H}_k$ при $k > q + 1$. Если $x \text{ нон} \in H_{q+1}$, то, очевидно, x лежит только в тех $H \in \mathbf{H}$, которые принадлежат системе \mathbf{H}_q , т. е. не более чем в $m + 1$ множествах системы \mathbf{H} . Если $x \in H_{q+1}$, то $x \text{ нон} \in F_q$, $x \text{ нон} \in C_q$, и потому x лежит самое большее в m множествах из \mathbf{H}_q и, следовательно, так как кратность \mathbf{H}_{q+1} не превышает $m + 1$, не более чем в $2m + 1$ множествах системы \mathbf{H} . Итак, мы доказали, что система \mathbf{H} имеет кратность $\leq 2m + 1$. Этим доказательство теоремы закончено.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *С. Н. Довкер*: Mapping theorems for non-compact spaces. Amer. Journ. Math., 1947, 69, 200—242.
- [2] *Вл. Егоров*: О метрической размерности точечных множеств. Доклады АН СССР, 112, 804—805.
- [3] *К. Ситников*: Пример двумерного множества в трехмерном евклидовом пространстве, допускающего сколь угодно малые деформации в одномерный полиэдр, и некоторая новая характеристика размерности множеств в евклидовых пространствах. Доклады АН СССР, 1953, 88, 21—24.
- [4] *Ю. Смирнов*: О метрической размерности в смысле П. С. Александрова. Известия АН СССР, сер. матем., 1956, 20, 679—684.

Summary

ON THE RELATION BETWEEN THE METRIC AND TOPOLOGICAL DIMENSION

MIROSLAV KATĚTOV, Praha

(Received August 24, 1957)

If P is a metric space, then the metric dimension of P (denoted $\mu\dim P$) is the least n such that, for every $\varepsilon > 0$, there exists an open covering \mathbf{U} of P consisting of sets of diameter $< \varepsilon$ and such that no $n + 2$ (different) sets from \mathbf{U} have a non-void intersection. The covering dimension of a topological space P will be denoted $\dim P$.

Theorem. *For any metric space P ,*

$$\mu\dim P \leq \dim P \leq 2\mu\dim P.$$

Proof. The inequality $\mu\dim P \leq \dim P$ follows at once from well known theorems. Put $m = \mu\dim P$. Let a finite open covering \mathbf{G} of P be given. There exist open coverings \mathbf{A}_k of P such that no $m + 2$ sets from \mathbf{A}_k intersect and every $U \in \mathbf{A}_k$ has a diameter $< 3^{-k}$. Let \mathbf{B}_k consist of all $U \in \mathbf{A}_k$ such that, for some $G \in \mathbf{G}$, the distance between U and $P - G$ is $> 3^{-k}$, and let V_k denote the sum of all $U \in \mathbf{B}_k$. Denoting by C_k the set of all $x \in P$ which are in $m + 1$ sets from \mathbf{B}_k , let \mathbf{H} consist of all $U - \bar{C}_{k-1} \cup \bar{V}_{k-2}$ with $U \in \mathbf{B}_k$ (we put, of course $C_0 = \emptyset$, $V_{-1} = V_0 = \emptyset$). It is proved that \mathbf{H} is an open refinement of \mathbf{G} and no $2m + 2$ sets from \mathbf{H} have a non-void intersection.