Karel Drbohlav

О минимуме одной линейной формы

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 8 (1958), No. 2, 190–196

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100293`

О МИНИМУМЕ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ФОРМЫ

КАРЕЛ ДРБОГЛАВ (Karel Drbohlav), Прага

(Поступило в редакцию 27/X 1957 г.)*)

Работа посвящена отысканию минимума функции $f(\ldots x_{ij} \ldots) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} k_{ij}x_{ij}$ при условии, что переменные x_{ij} неотрицательны и что составленные из них матрицы $X = (x_{ij})$ обладают предписанными постоянными суммами в отдельных строках и столбцах.

1. Во всей работе, поскольку не будет оговорок, большие латинские буквы обозначают действительные матрицы типа m, n. Пусть $A = (a_{ij})$. Если $a_{ij} \geqq 0$ для всех $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, то мы будем писать $A \geqq 0$. Далее, если $U = (u_{ij})$, $V = (v_{ij})$, $\sum_{j=1}^{n} u_{ij} = \sum_{j=1}^{n} v_{ij}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, $\sum_{i=1}^{m} u_{ij} = \sum_{i=1}^{m} v_{ij}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, то напишем $U \sim V$. Итак, $U \sim O$ означает, что строчные и столбцевые суммы матрицы U равны нулю. Наконец, выражение (U, V) определяется соотношением

$$(U, V) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} u_{ij}v_{ij} .$$

Пусть $K = (k_{ij})$, $A = (a_{ij})$, $A \geqq 0$. Если $(K, A) \leqq (K, X)$ для всех X, удовлетворяющих соотношениям $X \geqq 0$, $X \sim A$, то мы скажем, что матрица A K-минимальна.

На практике встречается следующая задача:

Дана матрица K и матрица $B \geqq 0$,[1]) и требуется среди всех матриц X, удовлетворяющих соотношениям $X \geqq 0$, $X \sim B$, отыскать хоть одну K-минимальную матрицу.[2])

2. Пусть $U = (u_{ij})$, $V = (v_{ij})$. Мы будем писать $U \prec V$, если для любого $i = 1, 2, \ldots, m$ и любого $j = 1, 2, \ldots, n$ имеют место импликации $v_{ij} \geqq 0 \Rightarrow$

*) Основные результаты этой работы были сообщены на IV[ом] съезде чехословацких математиков в Праге в сентябре 1955 г.

[1]) Чаще бывают даны ее строчные и столбцевые суммы.

[2]) См., например, [1].

$\Rightarrow v_{ij} \geqq u_{ij} \geqq 0$, $v_{ij} \leqq 0 \Rightarrow v_{ij} \leqq u_{ij} \leqq 0$. Очевидно, справедливо утверждение: если $U \prec V$, то и $V - U \prec V$.

Пусть $\mathfrak{C}$ — совокупность всех целочисленных матриц C, для которых $C \sim O$. Целочисленную матрицу D мы назовем разложимой, если существует $C \in \mathfrak{C}$ такая, что $C \prec D$, $O \neq C \neq D$. В противном случае D неразложима. Очевидно, справедлива

Лемма 2,1. *Любую целочисленную матрицу D можно записать в виде $D = C + D_1$, где $C \prec D$, $C \in \mathfrak{C}$, $D_1 \prec D$ и D_1 неразложима.*

Лемма 2,2. *Всякую ненулевую матрицу $C \in \mathfrak{C}$ можно записать в виде $C = \sum_{k=1}^{r} C_k$, где $C_k \in \mathfrak{C}$, $O \neq C_k \prec C$ и C_k неразложимы ($k = 1, 2, \ldots, r$).*

Теорема 2,1. *Пусть $F \sim O$, $F \neq O$. Тогда существует разложение $F = \sum_{k=1}^{r} \varrho_k C_k$, где $\varrho_k > 0$, $O \neq C_k \in \mathfrak{C}$, $\varrho_k C_k \prec F$ и C_k неразложимы ($k = 1, 2, \ldots, r$).*

Доказательство. Пусть $F = (f_{ij})$. Из условий $F \sim O$, $F \neq O$ нетрудно составить последовательность $f_{i_1 j_0}, f_{i_1 j_1}, f_{i_2 j_1}, f_{i_2 j_2}, \ldots, f_{i_\alpha j_{\alpha-1}}, f_{i_\alpha j_\alpha}, \ldots$ такую, что $f_{i_\alpha j_{\alpha-1}} < 0$, $f_{i_\alpha j_\alpha} > 0$ ($\alpha = 1, 2, 3, \ldots$). Среди индексов j_α ($\alpha = 0, 1, 2, \ldots$) можно найти два равных друг другу $j_p = j_q$, $p < q$, и пусть при этом $j_\alpha \neq j_\beta$ ($p \leqq \alpha \leqq q$, $p < \beta < q$, $\alpha \neq \beta$). Обозначим символом E_{ij} матрицу, в которой на месте (i, j) стоит число 1, а на всех остальных местах — нули, и положим

$$D_1 = \sum_{\alpha=p+1}^{q} (-E_{i_\alpha j_{\alpha-1}} + E_{i_\alpha j_\alpha}), \tag{2,1}$$
$$\sigma_1 = \operatorname*{Min}_{p<\alpha\leqq q} \{\ldots, |f_{i_\alpha j_{\alpha-1}}|, |f_{i_\alpha j_\alpha}|, \ldots\}.$$

Очевидно, будет $\sigma_1 > 0$, $\sigma_1 D_1 \prec F$. Так как строчные суммы каждого члена суммы (2,1) равны нулю, то равны нулю и строчные суммы матрицы D_1. Запишем D_1 еще в виде

$$D_1 = \sum_{\alpha=p+1}^{q-1} (-E_{i_{\alpha+1} j_\alpha} + E_{i_\alpha j_\alpha}) + E_{i_q j_q} - E_{i_{p+1} j_p},$$

откуда следует, что и столбцевые суммы D_1 равны нулю. Итак, $O \neq D_1 \in \mathfrak{C}$.

Если теперь образовать разложение $F = \sigma_1 D_1 + F_1$, то получим $F_1 \sim O$, $F_1 \prec F$. Далее ясно, что число нулевых элементов F_1 хоть на единицу превышает число нулевых элементов F. Если $F_1 \neq O$, процесс можно повторить несколько раз, и в результате конечного числа шагов получим разложение $F = \sum_{l=1}^{s} \sigma_l D_l$, где $\sigma_l > 0$, $O \neq D_l \in \mathfrak{C}$, $\sigma_l D_l \prec F$ ($l = 1, 2, \ldots, s$). Применяя теперь к каждой матрице D_l лемму 2,2, получаем искомое разложение.

Замечание. Если в теореме 2,1 положить $F \in \mathfrak{C}$ и если F неразложима, то обязательно будет $F = D_1$. Тогда каждый ненулевой столбец матрицы F содержит в точности два отличных от нуля элемента, один — равный 1, другой же — 1. Тем же свойством обладает, конечно, и транспонированная матрица F', которая также неразложима. Отсюда легко следует

Следствие 2,1. *Пусть $C \in \mathfrak{C}$, $C \neq O$. C неразложима тогда и только тогда, если ее можно записать в виде*

$$C = \sum_{\alpha=1}^{q}(-E_{i_\alpha j_{\alpha-1}} + E_{i_\alpha j_\alpha}),$$

где $j_0 = j_q$, $j_\alpha \neq j_\beta$ $(0 \leqq \alpha \leqq q,\ 0 < \beta < q,\ \alpha \neq \beta)$, $i_\alpha \neq i_\beta$ $(1 \leqq \alpha \leqq q,$ $1 \leqq \beta \leqq q, \alpha \neq \beta)$.

3. Пусть $A \geqq 0$. Обозначим символом $\mathfrak{C}_A$ множество всех неразложимых матриц $C \in \mathfrak{C}$ таких, что $A + \varrho C \geqq 0$ хоть для одного $\varrho > 0$.

Теорема 3,1. *Пусть K, A — матрицы, $A \geqq 0$. Тогда A будет K-минимальной в том и только в том случае, если $(K, C) \geqq 0$ для всех $C \in \mathfrak{C}_A$.*

Доказательство. Пусть $(K, C) \geqq 0$ для всех $C \in \mathfrak{C}_A$. Пусть $X \geqq 0$, $X \sim A$, $X \neq A$. Докажем неравенство $(K, A) \leqq (K, X)$. Так как $O \neq X - A \sim O$, по теореме 2,1 можно писать $X - A = \sum_{k=1}^{r} \varrho_k C_k$, где $\varrho_k > 0$, $C_k \in \mathfrak{C}$, $\varrho_k C_k \preccurlyeq X - A$ и матрицы C_k неразложимы $(k = 1, 2, \ldots, r)$. Из условий $A \geqq 0$, $A + (X - A) = X \geqq 0$ и $\varrho_k C_k \preccurlyeq X - A$ следует $A + \varrho_k C_k \geqq 0$, так что $C_k \in \mathfrak{C}_A$ и, по условию теоремы, $(K, C_k) \geqq 0$ $(k = 1, 2, \ldots, r)$. Итак, получаем $(K, X) = (K, A) + (K, X - A) = (K, A) + \sum_{k=1}^{r} \varrho_k (K, C_k) \geqq (K, A)$ и A, является K-минимальной.

Наоборот, пусть $(K, C) < 0$ для какого-либо $C \in \mathfrak{C}_A$ и пусть $A + \varrho C \geqq 0$, $\varrho > 0$. Тогда имеем $A + \varrho C \sim A$, и, далее $(K, A + \varrho C) = (K, A) + \varrho (K, C) < (K, A)$, так что A не является K-минимальной. Теорема доказана.

Пусть r, s — два любых индекса, обозначающие столбцы, $r \neq s$. Пусть $\mathfrak{C}^{(r,s)}$ — множество всех целочисленных матриц C таких, что $C \sim -E_{1r} + E_{1s}$.

Пусть $A \geqq 0$. Обозначим символом $\mathfrak{C}_A^{(r,s)}$ множество всех неразложимых матриц $C \in \mathfrak{C}^{(r,s)}$ таких, что $A + \varrho C \geqq 0$ хотя бы для одного $\varrho > 0$.

Теорема 3,2. *Пусть A — некоторая K-минимальная матрица. Пусть $C \in \mathfrak{C}_A^{(r,s)}$, $\varrho > 0$, $A + \varrho C \geqq 0$. Матрица $A + \varrho C$ является K-минимальной тогда и только тогда, если $(K, C) \leqq (K, D)$ для всех $D \in \mathfrak{C}_A^{(r,s)}$.*

Доказательство. Пусть $(K, C) \leqq (K, D)$ для всех $D \in \mathfrak{C}_A^{(r,s)}$. Пусть $X \geqq 0$, $X \sim A + \varrho C$. Докажем неравенство $(K, X) \geqq (K, A + \varrho C)$. Положим $X - A = F$; имеем $O \neq F \sim \varrho C$. Присоединим к F дальнейшую строку: $f_{m+1,j} = 0$ ($j = 1, 2, \ldots, m$; $j \neq r$, $j \neq s$), $f_{m+1,r} = \varrho$, $f_{m+1,s} = -\varrho$ и получим матрицу $\overline{F}$ типа $m + 1, n$. Пусть $\overline{O}$ и $\overline{\mathfrak{C}}$ имеют в множестве матриц типа $m + 1, n$ аналогичное значение, как O и $\mathfrak{C}$ в множестве матриц типа m, n. Имеем $\overline{O} \neq \overline{F} \sim \overline{O}$, так что по теореме 2,1 можно написать $\overline{F} = \sum_{k=1}^{q} \varrho_k \overline{C}_k$, где $\varrho_k > 0$, $\overline{O} \neq \overline{C}_k \in \overline{\mathfrak{C}}$, $\varrho_k \overline{C}_k \prec \overline{F}$ и $\overline{C}_k$ неразложимы ($k = 1, 2, \ldots, q$). Отбрасывая добавленную строку, получим $F = \sum_{k=1}^{q} \varrho_k C_k$, причем эту сумму можно записать в таком порядке, чтобы было $C_k \operatorname{non} \in \mathfrak{C}$ для $1 \leqq k \leqq p$ и $C_k \in \mathfrak{C}$ для $p < k \leqq q$.

Применяя к $\overline{C}_k$ следствие 2,1, нетрудно получить для $1 \leqq k \leqq p$ соотношение $C_k \in \mathfrak{C}^{(r,s)}$. Далее, $X = A + F \geqq 0$, а так как $\varrho_k C_k \prec F$, получим $A + \varrho_k C_k \geqq 0$, откуда, ввиду неразложимости матриц C_k, следует $C_k \in \mathfrak{C}_A^{(r,s)}$ ($1 \leqq k \leqq p$). По условию теоремы имеем, следовательно, $(K, C) \leqq (K, C_k)$ ($1 \leqq k \leqq p$). Далее имеют место равенства $\varrho = f_{m+1,r} = \sum_{k=1}^{p} \varrho_k$.

Для $p < k \leqq q$ будет, очевидно, $C_k \in \mathfrak{C}_A$, так как $\varrho_k C_k \prec F$ и $A + F \geqq 0$, а, значит, и $A + \varrho_k C_k \geqq 0$. По теореме 3,1 $(K, C_k) \geqq 0$ ($p < k \leqq q$).

Ясно, что $(K, X - A) = (K, F) = \sum_{k=1}^{q} \varrho_k (K, C_k) \geqq \sum_{k=1}^{p} \varrho_k (K, C_k) \geqq \sum_{k=1}^{p} \varrho_k (K, C) = \varrho (K, C) = (K, \varrho C)$ и, следовательно, $(K, X) \geqq (K, A + \varrho C)$.

Пусть, наоборот, $(K, C) > (K, D)$ для некоторой матрицы $D \in \mathfrak{C}_A^{(r,s)}$. Пусть $\sigma > 0$ такое, что $A + \sigma D \geqq 0$.

Если $\varrho \leqq \sigma$, то $A + \varrho D \geqq 0$ и имеют место соотношения $A + \varrho C \sim A + \varrho D$, $(K, A + \varrho C) > (K, A + \varrho D)$.

Если $\sigma < \varrho$, то $A + \sigma D + (\varrho - \sigma) C \geqq 0$[3] и $A + \sigma D + (\varrho - \sigma) C \sim A + \varrho C$, $(K, A + \sigma D + (\varrho - \sigma) C) = (K, A) + \sigma (K, D) + (\varrho - \sigma)(K, C) < (K, A) + \sigma (K, C) + (\varrho - \sigma)(K, C) = (K, A + \varrho C)$.

Ни в одном из этих двух случаев матрица $A + \varrho C$ не является K-минимальной.

4. Можно эффективно найти матрицу $C \in \mathfrak{C}_A^{(r,s)}$ из теоремы 3,2 такую, что справедливо $(K, C) \leqq (K, D)$ для всех $D \in \mathfrak{C}_A^{(r,s)}$:

Пусть A — некоторая K-минимальная матрица. Обозначим $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} = c_j$ ($j = 1, 2, \ldots, n$). Для любых двух индексов $u, v = 1, 2, \ldots, n$ таких, что

---

[3]) Элементы матрицы имеют вид $x_{ij} = a_{ij} + \sigma d_{ij} + (\varrho - \sigma) c_{ij}$, где $|d_{ij}| \leqq 1$, $|c_{ij}| \leqq 1$. Если $c_{ij} \geqq 0$, то будет $x_{ij} \geqq a_{ij} + \sigma d_{ij} \geqq 0$. Если $c_{ij} = -1$, то будет $x_{ij} \geqq a_{ij} - \sigma - (\varrho - \sigma) = a_{ij} + \varrho c_{ij} \geqq 0$.

$c_u > 0$, определим последовательность $e(u, v, \alpha)$ $(\alpha = 1, 2, \ldots)$ при помощи соотношений

$$e(u, v, 1) = \operatorname*{Min}_{\substack{1 \leqq i \leqq m \\ a_{iu} > 0}} [k_{iv} - k_{iu}]\,, \tag{4,1}$$

$$e(u, v, \alpha + 1) = \operatorname*{Min}_{\substack{1 \leqq j \leqq n \\ c_j > 0}} [e(u, j, 1) + e(j, v, \alpha)] \quad (\alpha = 1, 2, \ldots)\,. \tag{4,2}$$

Так как $e(u, v, \alpha + 1) \leqq e(u, u, 1) + e(u, v, \alpha)$, то

$$e(u, v, \alpha + 1) \leqq e(u, v, \alpha) \quad (\alpha = 1, 2, \ldots)\,. \tag{4,3}$$

Возьмем теперь $r, s, r \neq s$, и пусть $c_r > 0$. Найдем $C \in \mathfrak{C}_A^{(r,s)}$ такое, что $(K, C) \leqq (K, D)$ $(D \in \mathfrak{C}_A^{(r,s)})$. Пусть $p = \operatorname{Min}[m, n - 1]$.

На основании (4,2) можно написать $e(r, s, p) = \sum_{\alpha=1}^{p} e(j_{\alpha-1}, j_\alpha, 1)$, где $j_0 = r$, $j_p = s$ и $j_1, \ldots, j_{p-1}$ суть подходящие индексы столбцов. Согласно (4,1) выразим $e(j_{\alpha-1}, j_\alpha, 1)$ в виде $e(j_{\alpha-1}, j_\alpha, 1) = k_{i_\alpha j_\alpha} - k_{i_\alpha j_{\alpha-1}}$ с подходящими индексами строк i_α $(\alpha = 1, 2, \ldots, p)$. Притом

$$a_{i_\alpha j_{\alpha-1}} > 0 \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, p)\,. \tag{4,1}$$

Обозначим теперь $U = \sum_{\alpha=1}^{p} (- E_{i_\alpha j_{\alpha-1}} + E_{i_\alpha j_\alpha})$, так что имеет место равенство $e(r, s, p) = (K, U)$. Далее имеем $U \in \mathfrak{C}^{(r,s)}$. Произведем теперь на основании лемм 2,1 и 2,3 разложение $U = C + \sum_{k=1}^{q} U_k$, где $C \prec U$, $U_k \prec U$, $U_k \in \mathfrak{C}$, а C и U_k неразложимы $(k = 1, 2, \ldots, q)$. Из соотношения $U_k \prec U$ и из (4,4) следует $U_k \in \mathfrak{C}_A$, а согласно теореме 3,1 $(K, U_k) \geqq 0$ $(k = 1, 2, \ldots, q)$. Итак, имеем

$$(K, U) \geqq (K, C)\,. \tag{4,5}$$

Из соотношения $C \prec U$ и из (4,4) вытекает, конечно, и $C \in \mathfrak{C}_A^{(r,s)}$.

Пусть теперь $D \in \mathfrak{C}_A^{(r,s)}$. Присоединив к D строку $d_{m+1,j} = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n;$ $j \neq r, j \neq s)$, $d_{m+1,r} = 1$, $d_{m+1,s} = -1$, мы получим $\overline{D} \in \overline{\mathfrak{C}}$. Вместе с D будет неразложимой и $\overline{D}$, так что, ввиду следствия 2,1, можно написать $\overline{D} = - E_{m+1,s} + E_{m+1,r} + \sum_{\beta=1}^{q} (- E_{g_\beta h_{\beta-1}} + E_{g_\beta h_\beta})$, где индексы $(1 \leqq)$ $h_0, h_1, \ldots, h_q$ $(\leqq n)$ отличны друг от друга, индексы $(1 \leqq)$ $g_1, g_2, \ldots, g_q$ $(\leqq m)$ отличны друг от друга и $h_0 = r$, $h_q = s$. Теперь имеем $(K, D) = (K, \sum_{\beta=1}^{q} (- E_{g_\beta h_{\beta-1}} + E_{g_\beta h_\beta})) = \sum_{\beta=1}^{q} (k_{g_\beta h_\beta} - k_{g_\beta h_{\beta-1}})$. Так как $A + \varrho D \geqq 0$ для какого-либо $\varrho > 0$, должно быть $a_{g_\beta h_{\beta-1}} > 0$ $(\beta = 1, 2, \ldots, q)$ и, следовательно, $(K, D) \geqq \sum_{\beta=1}^{q} e(h_{\beta-1}, h_\beta, 1) \geqq e(r, s, q)$. Но так как $q \leqq p$, то согласно (4,3) будет $(K, D) \geqq e(r, s, p) = (K, U)$, а согласно (4,5) $(K, D) \geqq (K, C)$.

5. Теоремы 3,1 и 3,2 приводят к двум параллельным методам отыскания K-минимальной матрицы. Воспользуемся методом, опирающимся на теорему 3,2.

Пусть K, B — матрицы, $B \geqq 0$. Мы будем искать K-минимальную матрицу A, для которой $A \sim B$. Пусть b_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ и c_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ суть, соответственно строчные и столбцевые суммы матрицы B. В i-той строке $(i = 1, 2, \ldots, m)$ матрицы K возьмем каждый раз минимальный элемент k_{ij_i}; таким образом $k_{ij_i} = \underset{1 \leqq j \leqq n}{\mathrm{Min}}\, k_{ij}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

Образуем матрицу $U = \sum\limits_{i=1}^{m} b_i E_{ij_i} = (u_{ij})$. Имеем $U \geqq 0$, $\sum\limits_{j=1}^{n} u_{ij} = b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Очевидно, что U является K-минимальной.

Обозначим $u_j = \sum\limits_{i=1}^{m} u_{ij}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Если $u_r > c_r$ для какого-либо $r = 1, 2, \ldots, n$, то обязательно будет $u_r > 0$, и для подходящего $s = 1, 2, \ldots, n$ должно быть $c_s > u_s$, так как $\sum\limits_{j=1}^{n} u_j = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j$. Возьмем фиксированные r, s и согласно п. 4 найдем $C_1 \in \mathfrak{C}_U^{(r,s)}$ так, что $(K, C_1) \leqq (K, D)$ для $D \in \mathfrak{C}_U^{(r,s)}$.

Пусть ϱ_1 — максимальное положительное число, удовлетворяющее условиям $U + \varrho_1 C_1 \geqq 0$, $\varrho_1 \leqq u_r - c_r$, $\varrho_1 \leqq c_s - u_s$. Согласно теореме 3,2 матрица $U + \varrho_1 C_1 = U_1$ будет K-минимальной. Если столбцевые суммы U_1 все еще не равны данным числам c_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$, то весь процесс повторяем применительно к матрице U_1, а если нужно, и применительно к дальнейшим последовательно возникающим матрицам. Таким образом получаем последовательность

$$U, U_1, U_2, U_3, \ldots \tag{5,1}$$

K-минимальных матриц.

На практике встречается, конечно, лишь тот случай, когда B — рациональная матрица. Тогда числа b_i и c_j $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ можно записать в виде дробей с общим знаменателем $d > 0$, d — натуральное число. Элементы матриц (5,1) будут тогда рациональными неотрицательными числами вида $\frac{c}{d}$, где c — целое число. При каждом переходе от U_{n-1} к $U_n = U_{n-1} + \varrho_n C_n$ для соответствующего ϱ_n всегда имеет место неравенство $\varrho_n \geqq \frac{1}{d}$. Отсюда следует, что указанный процесс является конечным.

Теорема 5,1. *Пусть K, B — матрицы, $B \geqq 0$, B — рациональная матрица. Тогда в последовательности (5,1) K-минимальных матриц содержится матрица U_k такая, что $U_k \sim B$.*

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Fr. Nožička:* Užití theorie polyedrů v ekonomii, (Применение теории полиэдров в экономии), Čas. pro pěst. mat., *79* (1954), 280—281.

Zusammenfassung

ÜBER DAS MINIMUM EINER GEWISSEN LINEARFORM

KAREL DRBOHLAV, Praha

(Eingelangt am 27. Oktober 1957)

In der vorliegenden Arbeit werden reelle Matrizen (mit A, K, X, ... bezeichnet) mit m Zeilen und n Spalten in Verbindung mit einem gewissen Minimalproblem untersucht. Zu gegebener $K = (k_{ij})$ soll $A = (a_{ij})$ als *K-minimale Matrix* bezeichnet werden, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $A \geqq 0$.

2. Ist $X = (x_{ij})$, $X \geqq 0$ und gilt $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ für jedes $i = 1, 2, \ldots, m$ und $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}$ für jedes $j = 1, 2, \ldots, n$, so ist $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} k_{ij} a_{ij} \leqq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} k_{ij} x_{ij}$.

Das erwähnte Minimalproblem besteht, bei gegebener K, in der Konstruktion von mindestens einer K-minimalen Matrix A, in der die Summen der Elemente in den einzelnen Zeilen und Spalten gleich vorgeschriebenen Konstanten sind. Falls diese Konstanten rationale Zahlen sind, so lässt sich ein endliches Verfahren zur Bestimmung von A auffinden, das auf einer schrittweise gebildeten Folge (5,1) von K-minimalen Matrizen beruht (Satz 5,1). Dieses Verfahren wird in §§ 2—4 und insbesondere im Satz 3,2 vorbereitet.