Karel Rychlík

Betrachtungen aus der Logik in Bolzanos handschriftlichem Nachlasse

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 8 (1958), No. 2, 197–202

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100294

Чехословацкий математический журнал, т. 8 (83) 1958, Прага

BETRACHTUNGEN AUS DER LOGIK IN BOLZANOS HANDSCHRIFTLICHEM NACHLASSE[1])

KAREL RYCHLÍK, Praha
(Eingelangt am 4. Dezember 1957)

Der Verfasser bringt in diesem Aufsatze den Inhalt von Bolzanos Arbeit „Von der mathematischen Lehrart“ und den § 8 dieser Arbeit, einen Auszug, der für die mathematische Logik von besonderer Bedeutung ist.

Als B. Bolzano sein großes Werk über die Logik, die „Wissenschaftslehre“[2]), beendet hat, ist er an die Ausarbeitung eines ausgedehnten mathematischen Werkes, der „Größenlehre“, herangetreten[3]), das sich unvollendet in seinem handschriftlichen Nachlasse befindet. Zu diesem Werke hat er eine ausführliche Einführung geschrieben, deren zweiter Teil „Von der mathematischen Lehrart“ (M. L.) heißt. Diese Schrift beschäftigt sich hauptsächlich mit den Fragen aus der Logik und zwar vorwiegend mit Rüchsicht auf die Bedürfnisse der Mathematik. Die Mehrzahl der behandelten Fragen wird schon in Bolzano's Wissenschaftslehre[4]) betrachtet. In der Schrift M. L. werden aber diese Fragen von neuem und vielleicht besser formuliert.[5])

---

[1]) Im Auftrage der ersten Sektion der Tschechoslowakischen Akademie der Wissenschaften besorge ich die Abschrift der bisher nicht gedruckten Handschriften von Bernard Bolzano.

[2]) Dr. B. Bolzano's Wissenschaftslehre, 4 Bde, Sulzbach 1837. Neudruck, hrsg. von W. Schulz, Leipzig 1929—31.

[3]) In den Jahren 1830—1835 und dann wieder nach dem Jahre 1840. Vgl. dazu Eduard Winter, Bernard Bolzano und sein Kreis, 1933. (Tschech. Übersetz. von Dr. Z. Kalista, 1935).

Eduard Winter, Leben und geistige Entwicklung des Sozialethikers und Mathematikers Bernard Bolzano (1781—1848), Halle (Saale) 1949 .

Eduard Winter, Der böhmische Vormärz in Briefen B. Bolzano's an F. Přihonský (1824—1848). Beiträge zur deutsch-slawischen Wechselseitigkeit, Berlin 1956; besonders Bolzano's Briefe: *15* (8. 5. 1830) S. 121; *41* (28. 6. 1833) S. 150; *43* (20. 7. 1833) S. 153; *44* (7. 8. 1833) S. 154; *107* (31. 7. 1840) S. 218.

[4]) Noch zu Bolzanos Lebzeiten wurde ein anderer Auszug aus Wissenschaftslehre herausgegeben: Bolzano's Wissenschaftslehre und Religionswissenschaft in einer beurtheilenden Übersicht. Eine Schrift für Alle, die dessen wichtigste Ansichten kennen zu lernen wünschen, Sulzbach 1841.

[5]) Auf die Bedeutung der Wissenschaftslehre von B. Bolzano für die mathematische Logik haben aufmerksam gemacht:

W. Dubislav in der Abh.: Bolzano als Vorläufer der mathematischen Logik, Philos. Jahrbuch (Görres) *44*, 1931, 448—456;

H. Scholz in der Abh.: Die Wissenschaftslehre Bolzano's, Abh. d. Fries'schen Schule, N. S. *6*, 1933, 399—472.

Vgl. auch H. Hermes, H. Scholz, Mathem. Logik, Enzyklop. d. mathem. Wiss. 2. Aufl,. Bd. I, 1, Heft II.

S. endl. V. Filkorn, Mathem. logika I, Slovenský filoz. čas. *11*, 1956, Heft 4, 352 bis 368, besonders S. 360, 1.

Die Handschrift von Bolzano's Größenlehre wird in der Nationalbibliothek in Wien aufbewahrt; im Archiv der Tschechoslowakischen Akademie der Wissenschaften befinden sich die von M. Jašek besorgten Photokopien. Ich habe die Abschrift der Kopie der letzten, dritten Bearbeitung von Bolzanos Handschrift beschafft. Sie ist von einem unbekannten Schreiber geschrieben, von Bolzano selbst aber berichtigt und ergänzt worden. Eine ganze Reihe von Seiten ist von Bolzano eigenhändig geschrieben worden. Gleichfalls von Bolzano wurde die Einteilung der Schrift in Paragraphen und ihre Bezifferung vorgenommen.

In der Handschrift sind die Blätter beziffert, die Seiten sind durch die Buchstaben *a* und *b* gekennzeichnet. Die Seiten der Photokopien sind rot beziffert.

Inhalt von Bolzanos Schrift M. L.

§ 1. Vorerinnerungen.
§ 2. Sätze und bloße Vorstellungen an sich.
§ 3. Einfache und zusammengesetzte Vorstellungen.
§ 4. Gegenständliche und gegenstandlose Vorstellungen.
§ 5. Verhältnisse zwischen den Vorstellungen hinsichtlich ihres Umfanges.
§ 6. Anschauungen und Begriffe.
§ 7. Begriffs- und andere Sätze.
§ 8. Verhältnisse unter den Sätzen, die auf der Annahme gewisser veränderlichen Bestandtheile beruhen.
§ 9. Verständigungen.
§ 10. Welche Begriffe und Sätze zur möglich größten Deutlichkeit erhoben werden sollen.
§ 11. Auf welche Weise dieß zu geschehen habe?
§ 12. Beweise.
§ 13. Objektiver Zusammenhang zwischen den Wahrheiten an sich.
§ 14. Daß man bemüht sein müsse diesen Zusammenhang nachzuweisen!
§ 15. Begreiflicher Vorgang.
§ 16. Apagogischer[6]) Beweis.
§ 17. Ordnung des Vortrages.
§ 18. Ueberschriften.

Auszug aus Bolzanos Schrift M. L.

§ 8. *Verhältnisse unter den Sätzen, die auf der Annahme gewisser veränderlichen Bestandtheile beruhen.*[7])

---

[6]) D. h. indirekter.
[7]) S. 36a—39b in schwarzer Num., S. 44—50 in roter Num.

1. Von den verschiedenen Verhältnissen, die unter den Sätzen stattfinden können, wird es genug sein, hier nur einige derjenigen zu erwähnen, die aus der Annahme veränderlicher Bestandtheile in denselben hervorgehen. Denn nichts ist bei der Vergleichung der Sätze untereinander gewöhnlicher, als daß wir uns gewisse in denselben vorkommende Bestandtheile (bald das Subject, bald das Prädicat, bald nur einen gewissen in der Subject- oder Prädicat-Vorstellung vorkommenden Bestandtheil) als veränderlich denken, und in Untersuchung ziehen, welches Verhalten diese Sätze hinsichtlich auf Wahrheit befolgen, wenn jene als veränderlich betrachteten Theile mit beliebigen anderen vertauscht werden.

Der erste merkwürdige Fall, der hier eintreten kann, ist vorhanden, wenn die miteinander zu vergleichenden Sätze $A, B, C, D, \ldots$ und die als veränderlich angenommenen Bestandtheile in denselben $i, j, k, \ldots$ von einer solchen Beschaffenheit sind, daß es gewisse an die Stelle der $i, j, k, \ldots$ zu setzende Vorstellungen gibt, wobei die Sätze $A, B, C, D, \ldots$ insgesamt wahr werden. Und in diesem Falle sage ich, daß die Sätze $A, B, C, D, \ldots$ hinsichtlich auf die veränderlichen Theile $i, j, k, \ldots$ *einstimmig* oder *verträglich* sind. So nenne ich die beiden Sätze: „Die Zahl N ist ungerade" „Die Zahl N ist eine Quadratzahl" in Hinsicht auf die Vorstellung N verträglich, weil es ein leichtes ist, diese so zu wählen, daß beide Sätze Wahrheiten ausdrücken.

Wenn der entgegengesetzte Fall Statt findet, wenn nämlich die Sätze $A, B, C, D, \ldots$ und die in ihnen als veränderlich angenommenen Bestandtheile $i, j, k, \ldots$ von einer solchen Beschaffenheit sind, daß es nicht möglich ist, an die Stelle der letzteren etwas zu setzen, dabei die genannten Sätze sämtlich Wahrheiten würden: so sage ich, daß sie in dem Verhältnisse der *Unverträglichkeit* stehen. So unverträglich sind z. B. die zwei Sätze: „Die Figur X ist ein Dreieck" und „Zwei von den Winkeln der Figur X sind rechte", wenn es die einzige Vorstellung X ist, die wir in beiden als veränderlich ansehen sollen.

2. Wenn ein oder mehrere Sätze $A, B, C, \ldots$ mit einem oder mehreren anderen $M, N, \ldots$ verträglich heißen sollen, und dieß zwar hinsichtlich auf die Bestandtheile $i, j, k, \ldots$: so muß es nach dem gesagten wenigstens einige an die Stelle von $i, j, k, \ldots$ zu setzende Bestandtheile geben, die nicht nur die Sätze $A, B, C, \ldots$, sondern auch die $M, N, \ldots$ wahr machen. Ein Fall von ganz besonderer Merkwürdigkeit aber tritt ein, wenn nicht bloß einige, sondern alle Vorstellungen, die an die Stelle der $i, j, k, \ldots$ gesetzt, sämtliche $A, B, C, \ldots$ wahr machen, auch sämtliche $M, N, \ldots$ wahr machen. In diesem Falle sage ich, die Sätze $M, N, \ldots$ ständen zu den Sätzen $A, B, C, \ldots$ in dem Verhältnisse der *Ableitbarkeit*, und dieß zwar *hinsichtlich auf die veränderlichen Theile* $i, j, k, \ldots$ und in der *weiteren Bedeutung*. In einem *engeren Sinne*, und in demjenigen, in welchem ich diese Redensart künftig stets nehmen werde, sage ich, daß ein Satz M *ableitbar* sei aus den Sätzen $A, B, C, \ldots$ *hinsichtlich auf die veränderlichen Theile* $i, j, k, \ldots$, wenn jeder Inbegriff von Vorstellungen, der an der

Kette der $i, j, k, \ldots$ die sämtlichen Sätze $A, B, C, \ldots$ wahr macht, auch den Satz M wahr macht, und wenn nicht eben dasselbe auch schon von einem Theile der Sätze $A, B, C, \ldots$ gilt; d. h. wenn nicht auch jedesmal, so oft ein gewisser Theil dieser Sätze wahr wird, auch der Satz M schon wahr wird. Die Sätze $A, B, C, \ldots$, aus denen ein oder mehrere andere $M, N, \ldots$ ableitbar sind, pflegt man auch die zu denselben führenden *Vordersätze* oder *Prämissen*, $M, N, \ldots$ selbst aber die sich aus ihnen ergebenden *Schlußsätze* zu nennen.

So sagen wir, daß aus den zwei Sätzen

,,Alle i sind j" und ,,Alle j sind k" ;

ableitbar sei folgender dritte:

,,Alle i sind k" ;

und dieß zwar hinsichtlich auf die veränderlichen Theile $i, j, k, \ldots$; weil, so oft wir an die Stelle derselben solche Vorstellungen setzen, daß die zwei ersten Sätze wahr werden, auch der dritte Satz eine Wahrheit ausspricht. Gewöhnlich wird dieß Verhältniß der Ableitbarkeit zwischen den Sätzen $A, B, C, \ldots$ einer- und $M, N, P, \ldots$ andererseits durch die Redensart: ,,Wenn $A, B, C, \ldots$ ist, so ist auch $M, N, P, \ldots$", ausgedrückt. Z. B.: ,,Wenn i, j, k die drei Winkelpunkte eines Dreieckes sind und wenn die Seiten $ij = jk$, so sind auch die Winkel $i = k$".

3. Um aber einzusehen, daß zwischen den Sätzen $A, B, C, \ldots$ von der einen, und den Sätzen $M, N, P, \ldots$, oder auch nur dem einzelnen Satze M von der anderen Seite ein wirkliches Verhältniß der Ableitbarkeit bestehe: dazu bedarf es nach Beschaffenheit der Umstände oft gar vieler Vorkenntnisse, oft wieder ist dieß eine Sache, die Jedem gleich von selbst einleuchtet. Nur in dem letzten Falle, wenn dieß Verhältniß gleich auf den ersten Blick einleuchtet, auch auf nichts Anderem beruhet, als auf dem, was man die bloße *logische Form* der Sätze heißt, pflegt man es mit der Bennenung eines *logischen Schlusses* zu bezeichnen. Sind die in einem solchen logischen Schlusse vorkommenden Vordersätze von der Art, wie wir sie eben aussprachen, d. h. bei derjenigen Beschaffenheit ihrer veränderlichen Theile $i, j, k, \ldots$, die wir gerade annehmen, Wahrheiten, und zwar solche Wahrheiten sind, die dem, welchem wir sie zur Betrachtung vorlegen, bekannt sind, so läßt sich erwarten, daß ihm auch der sich aus ihnen ergebende Schlußsatz, zumal so fern wir denselben unmittelbar ihrem Vortrage nachfolgen lassen, als Wahrheit einleuchten werde. Erfolgt dieß wirklich, so kann man sagen, wir hätten die Erkenntniß der Wahrheit M durch einen Schluß aus den bereits bekannten Wahrheiten $A, B, C, \ldots$ vermittelt. Die verschiedenen Arten der Schlüsse, deren wir uns zu einem solchen Zwecke mit der Erwartung eines günstigen Erfolges bedienen können, lehrt oder soll wenigstens die Logik (in demjenigen ihrer Theile, welcher die *Syllogistik* heißt) kennen lernen. Hier würde ihre Aufführung jedenfalls zu weitläufig sein.

4. Das bisher erklärte Verhältniß der Ableitbarkeit zwischen gegebenen Sätzen $A, B, C, \ldots$ und gegebenen anderen $M, N, O, \ldots$ kann auch ein gegenseitiges sein, d. h. die Sätze $M, N, O, \ldots$ können aus den Sätzen $A, B, C, \ldots$ und diese hinwieder aus den Sätzen $M, N, O, \ldots$ ableitbar sein, und dieß zwar hinsichtlich auf dieselben als veränderlich voraussetzenden Theile $i, j, k, \ldots$. In diesem Falle sagen wir, daß die Sätze $A, B, C, \ldots$ einer — und die Sätze $M, N, O, \ldots$ andererseits einander *gleichgelten*. In diesem Verhältnisse der *Äquipolenz* stehen z. B. die zwei Sätze: „In dem Dreiecke ijk sind die Seiten $ij = kj$ und λ, die Mitte der Grundlinie ik," — mit den zwei Sätzen: „In dem Dreiecke ijk sind die Winkel $ij\lambda = kj\lambda$, und die Nebenwinkel $j\lambda i = j\lambda k$," wobei wir die Vorstellungen i, j, k, λ als die veränderlichen Theile betrachten.

5. Wenn gewisse Sätze $A, B, C, \ldots$ einer- und $M, N, O, \ldots$ andererseits in dem Verhältnisse der *Unverträglichekit* (No 1) stehen hinsichtlich auf gewisse als veränderlich zu betrachtende Theile $i, j, k, \ldots$: so läßt sich aus dem Satze: „Alle $A, B, C, \ldots$ sind wahr", ableiten der Satz: „Nicht alle $M, N, O, \ldots$ sind wahr"; und aus dem Satze: „Alle $M, N, O, \ldots$ sind wahr", ist ableitbar der Satz: „Nicht alle $A, B, C, \ldots$ sind wahr". Zuweilen fügt es sich aber, daß auch noch umgekehrt aus dem Satze: „Nicht alle $M, N, O, \ldots$ sind wahr", ableitbar ist der Satz: „Alle $A, B, C, \ldots$ sind wahr"; und aus dem Satze: „Nicht alle $A, B, C, \ldots$ sind wahr", ableitbar ist der Satz: „Alle $M, N, O, \ldots$ sind wahr". In diesem besonderen Falle sagen wir, daß die Sätze $A, B, C, \ldots$ einer- und die Sätze $M, N, O, \ldots$ andererseits in dem Verhältnisse des *Widerspruches* (oder der *Contradiction*) miteinander ständen; in jedem anderen Falle, daß sie einander nur *widerstreiten* (*conträr* sind). In dem Verhältnisse eines Widerspruches stehen z. B. die beiden Sätze: „Wenn i und j ein Paar verschiedene Augenblicke sind, so ist i früher als j"; und „Wenn i und j ein Paar verschiedene Augenblicke sind, so ist j früher als i"; in dem Verhältnisse eines bloßen Widerstreites, dagegen die beiden Sätze: „Die Größe i ist größer als die Größe j", und „Die Größe i ist kleiner als die Größe j", wenn immer i und j als die veränderlichen Theile betrachtet werden sollen.

Anmerkungen

Anstatt des zu vieldeutigen Wortes Satz (z. B. in der Grammatik, in der Mathematik im Sinne „Lehrsatz") werden wir das Wort *Aussage* benützen. Eine Aussage ist also ein sprachliches Gebilde, das entweder *wahr* oder *falsch* ist.

Anstatt der Ausdrücke veränderliche Vorstellung, veränderlicher Teil oder Bestandteil, die von Bolzano gebraucht werden, werden wir einfach eine *Variable* sagen. Durch das im Abs. 1 beschriebene Verfahren entstehen aus den Aussagen die *Aussageformen* (Aussagefunktionen). Eine Aussageform ist also ein sprachliches Gebilde, das Variablen enthält, und durch gewisse Einsetzungen in diese Variablen zu einer (wahren oder falschen) Aussage ergänzt werden kann.

Aus einer Aussageform A mit den Variablen $(x, y, z, \ldots)$ können wir dadurch, daß wir alle Variablen durch geeignete sprachliche Gebilde $(x_0, y_0, z_0, \ldots)$ ersetzen, eine Aussage erhalten. Ist diese Aussage wahr, so sagen wir, daß A dabei *erfüllt* (*verifiziert*) wird. $(x_0, y_0, z_0, \ldots)$ wird dann ein *Modell* von A genannt. Im Falle, daß wir durch das angegebene Verfahren aus A eine falsche Aussage erhalten, sagen wir, daß die Aussageform A durch $(x_0, y_0, z_0, \ldots)$ *nicht erfüllt* (*falsifiziert*) wird.

Ganz ähnlich kann man den Begriff des Modells statt für eine Aussageform A auch für einen Inbegriff $\{A, B, C, \ldots\}$ von Aussageformen definieren, die zugleich erfüllt sind. In diesem Falle sagt man auch, daß die Aussageformen *verträglich* sind.

Sind alle Modelle des Inbegriffes von Aussageformen $\{A, B, C, \ldots\}$ auch Modelle des Inbegriffes der Aussageformen $\{M, N, P, \ldots\}$, so sagen wir, daß die Aussageformen $M, N, P, \ldots$ aus den Aussageformen $A, B, C, \ldots$ *ableitbar* sind (die Aussageformen $M, N, P, \ldots$ sind dann eine *Konsequenz* der Aussageformen $A, B, C, \ldots$). Sind die Aussageformen $M, N, P, \ldots$ ableitbar aus den Aussageformen $A, B, C, \ldots$ und umgekehrt, $A, B, C, \ldots$ ableitbar aus M, N, P, so nennen wir die Inbegriffe $\{A, B, C, \ldots\}$ und $\{M, N, P, \ldots\}$ (logisch) *äquivalent* (Bolzano sagt äquipolent).

Bolzano kann als erster betrachtet werden, der in die Logik den Begriff der Aussageformen eingeführt hat und ihn zur Definition der Konsequenz und (logischer) Äquivalenz benützt hat.[8])

Anmerkung. Das wenig bekannte, vor diesem Aufsatze beigegebene Bild von Bernard Bolzano stammt aus den vierziger Jahren des 19. Jahrhunderts und ist von D. A. Kment für das Italienische Waisenhaus in Prag gemalt worden. Nach dem Zeugnis der Zeitgenossen soll es zu den besten Bildern Bolzanos gehören.

Reproduziert aus dem Buche E. Winter, *Der böhmische Vormärz in Briefen B. Bolzano's an F. Příhonský (1824—1848), Berlin, 1955.*

Резюме

РАССУЖДЕНИЯ ПО ЛОГИКЕ В РУКОПИСНОМ НАСЛЕДИИ БОЛЬЦАНО

КАРЕЛ РЫХЛИК (Karel Rychlík), Прага

(Поступило в редакцию 4/XII 1957 г.)

Автором статьи здесь дается оглавление работы Б. Больцано „*Von der mathematischen Lehrart*", а также § 8 этой работы, имеющий особое значение для математической логики.

[8]) Unabhängig von Bolzano ist der Konsequenzbegriff von neuem präzisiert worden von A. Tarski: Über den Begriff der logischen Folgerung, Actual. scient. et industr. *394*, Paris 1936, S. 1—11. Er führt den Begriff des Modells ein, der auch hier benützt wird. Vgl. auch: A. Tarski, Logic, semantics, metamathematics, Oxford 1956, *XVI*. On the concept of logical consequence, 409—420.

Gentzens Konsequenzenlogik kann als Formalisierung des Begriffs der Konsequenz interpretiert werden. Siehe Gentzen, Untersuchungen über das logische Schließen, Math. Zeitschr. *39*, 1934, 176—210, 405—431.