

Jan Mařík

Eine Bemerkung über elliptische Differentialgleichungen

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 8 (1958), No. 2, 246–250

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/100298>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1958

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

EINE BEMERKUNG ÜBER ELLIPTISCHE DIFFERENTIAL-
GLEICHUNGEN

JAN MAŘÍK, Praha

(Eingelangt am 1. Juli 1957)

Es wird gezeigt, dass für eine gewisse Klasse von Operatoren L die Lösung u der Gleichung $Lu = 0$ durch die Randwerte eindeutig bestimmt ist; für u werden Abschätzungen gefunden. Zum Schluss wird eine Verallgemeinerung eines Satzes von Morgenstern bewiesen.

Bezeichnungen. Das Wort „Zahl“ (resp. „Funktion“) bedeutet immer eine endliche reelle Zahl (resp. eine endliche reelle Funktion). G ist eine nicht-leere beschränkte offene Untermenge von E_m ; H ist die Grenze von G , $\bar{G} = G \cup H$. \mathfrak{F}_0 (resp. \mathfrak{F}) ist das System aller Funktionen auf G (resp. das System aller auf \bar{G} stetigen Funktionen), deren sämtliche partielle Ableitungen 2. Ordnung auf G stetig sind. Griechische Buchstaben bedeuten immer Zahlen; die Buchstaben a, b, c, f (resp. u, v), event. mit Indexen, bedeuten Funktionen auf G (resp. Elemente von \mathfrak{F}).

Ist F eine Funktion auf der Menge M und ist $M_0 \subset M$, dann verstehen wir unter der Aussage „ $F > 0$ auf M_0 “, dass $F(x) > 0$ für jedes $x \in M_0$ ist. Sind F_1, F_2 Funktionen auf M , so ist klar, was z. B. „ $F_1 F_2 \geq 1$ auf M_0 “ usw. bedeutet. Wenn es aus dem Zusammenhang zu sehen ist, welches M_0 gemeint wird, so schreiben wir einfach „ $F > 0$ “ usw.

Für $x = [x_1, \dots, x_m] \in E_m$ setzen wir $|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^m x_i^2}$. Es gilt $|\sum_{i=1}^m x_i y_i| \leq |x| |y|$.

Es sei \mathcal{J} das System aller Operatoren

$$J = \sum_{i,j=1}^m a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k=1}^m b_k \frac{\partial}{\partial x_k} \tag{1}$$

mit folgender Eigenschaft: Wenn $f \in \mathfrak{F}_0$, $f \geq 0$ ist und wenn es ein $x_0 \in G$ mit $f(x_0) = 0$ gibt, dann gilt $Jf(x_0) \geq 0$. Man kann beweisen, dass der Operator (1) diese Eigenschaft dann und nur dann hat, wenn für jedes $x \in G$ und alle τ_1, \dots, τ_m die Beziehung $\sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x) \tau_i \tau_j \geq 0$ besteht. Wenn also der Operator (1) zu \mathcal{J} gehört, so haben wir

$$a_{ii} \geq 0, \quad a_{ij}^2 \leq a_{ii} a_{jj}.$$

Es sei weiter \mathcal{L} das System aller Operatoren $L = c - J$, wo $J \in \mathcal{J}$, für welche gilt:

$$(u \geq 0 \text{ auf } H, \quad Lu \geq 0 \text{ auf } G) \Rightarrow u \geq 0 \text{ auf } \bar{G}.$$

Ist $L \in \mathcal{L}$, $Lu_1 = Lu_2$ auf G und $u_1 = u_2$ auf H , so gilt offenbar $u_1 = u_2$ auf \bar{G} .

Lemma 1. *Es sei $J \in \mathcal{J}$, $f \in \mathfrak{F}_0$, $f \geq 0$, $cf > Jf$. Dann ist $f > 0$.*

Beweis. Wäre $f(x_0) = 0$, so hätten wir $0 = c(x_0)f(x_0) > Jf(x_0) \geq 0$, was unmöglich ist.

Satz 1. *Es sei $J \in \mathcal{J}$, $L = c - J$, $v > 0$ auf H , $v \geq 0$ auf G , $Lv > 0$ auf G . Dann ist $L \in \mathcal{L}$.*

Beweis. Sei $u \geq 0$ auf H , $Lu \geq 0$ auf G . Für jedes $\tau \geq 0$ setzen wir $F(\tau) = \min_{x \in \bar{G}} (u(x) + \tau v(x))$. Wir haben zu zeigen, dass $F(0) \geq 0$. Es sei also $F(0) < 0$. Nach Lemma 1 ist $v > 0$ auf \bar{G} ; daraus folgt leicht, dass $F(\tau) > 0$ für grosse τ ist. Da F stetig ist, gibt es ein $\tau_0 > 0$ mit $F(\tau_0) = 0$. Setzen wir noch $w = u + \tau_0 v$, so folgt aus den Beziehungen $Lw > 0$, $w \geq 0$ nach Lemma 1, dass $w > 0$ auf G ist. Da aber $w \geq \tau_0 v > 0$ auf H ist, haben wir $0 < \min_{x \in \bar{G}} w(x) = F(\tau_0)$; durch diesen Widerspruch ist der Satz bewiesen.

Bemerkung 1. Ist $v_1 \geq 0$, $Lv_1 > 0$, $Lv_2 \geq 0$ auf G , $v_2 > 0$ auf H , so erfüllt die Funktion $v = \mu v_1 + v_2$ bei hinreichend grossem μ unsere Voraussetzungen.

Bemerkung 2. Ist $L \in \mathcal{L}$, $u \geq 0$ auf H , $Lu > 0$ auf G , so ist $u > 0$ auf G .

Satz 2. *Ist $J \in \mathcal{J}$, $c > 0$, so hat man $c - J \in \mathcal{L}$.*

Beweis. Im Satz 1 setzen wir $v = 1$.

Satz 3. *Es sei $s \in E_m$ und $|x - s| < \rho$ für jedes $x \in \bar{G}$. Der Operator J sei durch (1) definiert; wir schreiben $a = \sum_{i=1}^m a_{ii}$, $b = \sqrt{\sum_{k=1}^m b_k^2}$ und setzen voraus, dass für jedes $x \in G$ die Beziehung*

$$2a(x) + c(x) \cdot (\rho^2 - |x - s|^2) > 2\rho b(x) \quad (2)$$

besteht. Dann gilt $c - J \in \mathcal{L}$.

Beweis. Die Funktion $v(x) = \rho^2 - |x - s|^2$ erfüllt die Relationen $Jv(x) = -\sum_{i=1}^m 2a_{ii}(x) - 2\sum_{k=1}^m b_k(x) \cdot (x_k - s_k) \leq -2a(x) + 2\rho b(x)$ ($x \in G$), $cv - Jv \geq cv + 2a - 2\rho b > 0$ (laut (2)) und $v(x) > 0$ ($x \in \bar{G}$). Unsere Behauptung folgt nun unmittelbar aus Satz 1.

Beispiel. Ist $c(x) > -\frac{2m}{\rho^2 - |x - s|^2}$ ($x \in G$), so hat man $c - \Delta \in \mathcal{L}$ ($\Delta = \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$).

Satz 4. *Es sei $J \in \mathcal{J}$, $c_1 v > Jv$, $c_1 \leq c_2$ auf G , $v > 0$ auf \bar{G} , $L_i = c_i - J$ ($i = 1, 2$), $|L_2 u_2| \leq L_1 u_1$ auf G , $|u_2| \leq u_1$ auf H . Dann gilt $|u_2| \leq u_1$ auf \bar{G} .*

Beweis. Nach Satz 1 haben wir $L_i \in \mathcal{L}$ ($i = 1, 2$); daraus folgt $u_1 \geq 0$, $L_2 u_1 \geq L_1 u_1 \geq L_2 u_2$, $L_2(u_1 - u_2) \geq 0$. Da $u_1 - u_2 \geq 0$ auf H ist, gilt $u_1 \geq u_2$ auf \bar{G} . Ähnlich kann man die Ungleichung $u_1 \geq -u_2$ beweisen.

Satz 5. *Es sei $J \in \mathcal{J}$, $-J \in \mathcal{L}$, $Ju \leq 0$. Dann gibt es einen Punkt $x_0 \in H$ mit $u(x_0) \leq u(x)$ ($x \in \bar{G}$).*

Beweis. Wir wählen den Punkt $x_0 \in H$ derart, dass $u(x_0) = \alpha = \min_{x \in H} u(x)$, und setzen $v = u - \alpha$. Aus den Beziehungen $v \geq 0$ auf H , $-Jv = -Ju \geq 0$ auf G folgt $v \geq 0$, d. h. $u \geq \alpha$ auf \bar{G} .

Bemerkung. Ist $\beta \geq 0$, $L = c - J$, $J \in \mathcal{J}$, $L \in \mathcal{L}$, $c \geq 0$ (resp. $c \leq 0$), $Lu \leq 0$ (resp. $Lu \geq 0$) auf G , $u \leq \beta$ auf H (resp. $u \geq \beta$ auf H), so ist $u \leq \beta$ (resp. $u \geq \beta$) auf \bar{G} .

Satz 6. *Es sei $L \in \mathcal{L}$, $\min_{x \in H} v(x) = \varepsilon > 0$, $\inf_{x \in G} Lv(x) = \eta > 0$. Wenn die Funktion u den Ungleichungen $|Lu| \leq \mu$ auf G , $|u| \leq \delta$ auf H genügt, so gilt $|u| \leq v \cdot \max(\delta\varepsilon^{-1}, \mu\eta^{-1})$ auf \bar{G} .*

Beweis. Setzen wir $\beta = \max(\delta\varepsilon^{-1}, \mu\eta^{-1})$, so ist $u \leq \beta v$ auf H , $Lu \leq \beta Lv$ auf G . Da $L \in \mathcal{L}$, haben wir $u \leq \beta v$ (auf \bar{G}). Desgleichen gilt $-u \leq \beta v$.

Bemerkung. Ist $L \in \mathcal{L}$, $v \geq \varepsilon > 0$ auf H , $|u| \leq \delta$ auf H und $Lu = 0 \leq Lv$ auf G , so gilt $|u| \leq v \cdot \delta\varepsilon^{-1}$ auf \bar{G} .

Satz 7. *Es sei $J \in \mathcal{J}$, $v > 0$ auf \bar{G} , $-Jv \geq \eta > 0$ auf G , $\liminf_{n \rightarrow \infty} (\inf_{x \in G} c_n(x)) \geq 0$, $u_n(x) \rightarrow 0$ gleichmässig auf H , $c_n u_n(x) - Ju_n(x) \rightarrow 0$ gleichmässig auf G . Dann gilt $u_n(x) \rightarrow 0$ gleichmässig auf \bar{G} .*

Beweis. Ist n gross genug, so hat man $c_n v - Jv \geq \frac{1}{2}\eta$. Jetzt machen wir von Satz 1 und 6 Gebrauch.

Satz 8. *Wir setzen voraus, dass $J \in \mathcal{J}$ und dass f_0 eine beschränkte Funktion ist. Es sei $c_0 v - Jv \geq \eta > 0$ auf G , $v > 0$ auf \bar{G} , $c_n(x) \rightarrow c_0(x)$, $f_n(x) \rightarrow f_0(x)$ gleichmässig auf G , $u_n(x) \rightarrow u_0(x)$ gleichmässig auf H und $c_n u_n = Ju_n + f_n$ auf G ($n = 0, 1, \dots$). Dann gilt $u_n(x) \rightarrow u_0(x)$ gleichmässig auf \bar{G} .*

Beweis. Für grosse n ist $c_n v - Jv \geq \frac{1}{2}\eta$; nach Satz 6 ist die Folge von Funktionen u_n beschränkt. Weiter gilt $c_0(u_0 - u_n) = J(u_0 - u_n) + f_0 - f_n + (c_n - c_0)u_n$. Eine nochmalige Anwendung des Satzes 6 zeigt, dass $u_n(x) \rightarrow u_0(x)$ gleichmässig auf \bar{G} gilt.

Lemma 2. *Es sei $s \in E_m$, $G = E[x; |x - s| < \rho]$. Wir definieren den Operator $J \in \mathcal{J}$ durch die Formel (1) und setzen $a = \sum_{i=1}^m a_{ii}$, $b = \sqrt{\sum_{k=1}^m b_k^2}$, $L = 1 - J$. Wenn $a \leq \alpha$, $b \leq \beta$ ist und wenn die Funktion u den Ungleichungen $|u| \leq \gamma$ auf H , $|Lu| \leq \delta$ auf G genügt, dann gilt*

$$|u(s)| \leq 2\gamma(\alpha\rho^{-2} + \beta\rho^{-1}) + \delta. \tag{3}$$

Beweis. Wir setzen $p(x) = |x - s|^2$, $v = \gamma \varrho^{-2}(p + 2x + 2\beta \varrho) + \delta$. Es ist $Lv(x) = v(x) - \gamma \varrho^{-2} Jp(x) = v(x) - \gamma \varrho^{-2}(2a(x) + 2 \sum_{k=1}^m b_k(x)(x_k - s_k)) \geq v(x) - \gamma \varrho^{-2}(2x + 2\varrho\beta) = \gamma \varrho^{-2} p(x) + \delta \geq \delta \geq Lu(x)$ ($x \in G$), $v \geq \gamma \varrho^{-2} p = \gamma \geq u$ auf H ; da (nach Satz 2) $L \in \mathcal{L}$ ist, so hat man $v \geq u$, insbesondere also $v(s) \geq u(s)$. Ähnlich kann man zeigen, dass $v(s) \geq -u(s)$; daraus folgt unmittelbar die Beziehung (3).

Satz 9. Es sei $J_n = \sum_{i,j=1}^m a_{ij}^{(n)} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k=1}^m b_k^{(n)} \frac{\partial}{\partial x_k} \in \mathcal{J}$, $L_n = 1 - J_n$ ($n = 1, 2, \dots$); f sei stetig (auf G). Die Folge von Funktionen u_1, u_2, \dots (resp. $L_1 u_1, L_2 u_2, \dots$) sei auf der Menge H (resp. G) beschränkt; auf jeder kompakten Teilmenge von G gelte gleichmässig $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{ii}^{(n)}(x) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_i^{(n)}(x) = 0$ ($i = 1, \dots, m$), $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n u_n(x) = f(x)$. Dann gilt auch $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = f(x)$ gleichmässig auf jeder kompakten Teilmenge von G .

Beweis. Es sei D eine nichtleere kompakte Untermenge von G ; ε sei positiv. Wir bilden eine offene Menge U , die D umfasst und samt ihrer Grenze in G liegt. Weiter können wir eine Funktion $f_0 \in \mathfrak{F}_0$ finden, die für jedes $x \in U$ die Ungleichung $|f(x) - f_0(x)| < \varepsilon$ erfüllt. (Nach dem Satz von Weierstrass existiert sogar ein solches Polynom f_0 .) Jetzt setzen wir $g_n(x) = u_n(x) - f_0(x)$ ($x \in G$). Die Gleichheit $L_n g_n = L_n u_n - f_0 + J_n f_0$ hat zur Folge, dass $L_n g_n(x) \rightarrow f(x) - f_0(x)$ gleichmässig auf U gilt. Wenn wir also $\lambda_n = \sup_{x \in U} |L_n g_n(x) - f(x) + f_0(x)|$ setzen, so ist $\lambda_n \rightarrow 0$ und

$$|L_n g_n(x)| < \varepsilon + \lambda_n \quad (x \in U, n = 1, 2, \dots). \quad (4)$$

Es gibt ein μ derart, dass $|u_n(x)| \leq \mu$ ($x \in H$), $|L_n u_n(x)| \leq \mu$ ($x \in G$) für alle n ist. Nach Satz 6 (wo $v = 1$ gesetzt wird) hat man $|u_n(x)| \leq \mu$ für alle n und alle $x \in G$. Da auch $|f| \leq \mu$ ist, bekommt man die Abschätzung

$$|g_n(x)| \leq |u_n(x)| + |f(x)| + |f(x) - f_0(x)| < 2\mu + \varepsilon \quad (x \in U). \quad (5)$$

Wir schreiben noch $a_n = \sum_{i=1}^m a_{ii}^{(n)}$, $b_n = \sqrt{\sum_{i=1}^m (b_i^{(n)})^2}$, $\alpha_n = \sup_{x \in U} a_n(x)$, $\beta_n = \sup_{x \in U} b_n(x)$; die Entfernung der Menge D von der Grenze der Menge U bezeichnen wir mit ϱ . Laut (3), (4), (5) haben wir dann

$$|g_n(x)| \leq 2(2\mu + \varepsilon)(\alpha_n \varrho^{-2} + \beta_n \varrho^{-1}) + \varepsilon + \lambda_n \quad (x \in D). \quad (6)$$

Es existiert also ein n_0 derart, dass die Ungleichung $|g_n| < 2\varepsilon$ und folglich $|u_n - f| \leq |g_n| + |f - f_0| < 3\varepsilon$ auf der Menge D für jedes $n > n_0$ gilt.

Bemerkung 1. Wenn $f \in \mathfrak{F}_0$ ist, so können wir natürlich $f_0 = f$ setzen; dann ist $g_n = u_n - f$. Setzen wir noch $\sigma_n = \sup_{x \in U} |L_n u_n(x) - f(x)|$, $\tau_n = \sup_{x \in U} |J_n f(x)|$, so ist $\lambda_n \leq \sigma_n + \tau_n$ und die Beziehung (6), wo wir jetzt $\varepsilon = 0$ schreiben kön-

nen, liefert eine effektive (von den Mengen D и U abhängige) Abschätzung für die Schnelligkeit der Konvergenz.

Бemerkung 2. Der Satz 9 ist eine Verallgemeinerung des Satzes 4 aus [1] und des Hauptresultates aus [2].

LITERATUR

- [1] *D. Morgenstern*: Singuläre Störungstheorie partieller Differentialgleichungen, Journ. of Rat. Mech. and Anal., vol. 5 (1956), 203—216.
 [2] *M. Zlámal*: Über die erste Randwertaufgabe für eine singulär perturbierte elliptische Differentialgleichung, Чех. мат. ж., 7 (82), 1957, 413—417.

Резюме

ЗАМЕТКА ОБ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

ЯН МАРЖИК (Jan Mařík), Прага
 (Поступило в редакцию 1/VII 1957 г.)

Пусть G — непустое ограниченное открытое подмножество пространства E_m ; пусть H — граница G (значит, $\bar{G} = G \cup H$). Буквы u, v обозначают функции, непрерывные на \bar{G} и обладающие на G непрерывными производными 2-ого порядка. Если мы скажем, напр., „ $u > 0$ на G “, то подразумевается, что $u(x) > 0$ для всякого $x \in G$.

Далее, пусть \mathcal{J} — система всех операторов J вида

$$J = \sum_{i,j=1}^m a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k=1}^m b_k \frac{\partial}{\partial x_k},$$

где a_{ij} — функции на множестве G такие, что $\sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x) \tau_i \tau_j$ для всякого $x \in G$ представляет собой неотрицательную функцию переменных τ_1, \dots, τ_m , и где b_1, \dots, b_m — произвольные функции на G . Пусть, наконец, \mathcal{L} — система всех операторов L вида $L = c - J$ (c — функция на G), для которых справедлива импликация ($u \geq 0$ на $H, Lu \geq 0$ на G) $\Rightarrow u \geq 0$ на G .

Теорема 1. Если $J \in \mathcal{J}, L = c - J, v > 0$ на $\bar{G}, Lv > 0$ на G , то $L \in \mathcal{L}$.

Теоремы 2 и 3 показывают, как для некоторых операторов можно найти функцию v так, чтобы выполнялись предположения теоремы 1.

Теоремы 4—6 представляют собой оценки решения u уравнения $Lu = f$, где $L \in \mathcal{L}$. Теоремы 7, 8 и 9 показывают, что при некоторых условиях решение u мало изменяется при малом изменении оператора L , функции f и значений функции u на множестве H .