

Alois Švec

Géométrie intrinsèque des congruences de droites et leurs déformations projectives

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 8 (1958), No. 3, 395,396–397,398

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/100313>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1958

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

GÉOMÉTRIE INTRINSÈQUE DES CONGRUENCES DE DROITES
ET LEURS DÉFORMATIONS PROJECTIVES

ALOIS ŠVEC, Liberec

(Reçu le 3 janvier 1958)

On introduit la notion de système de géométries intrinsèques des congruences de droites dans l'espace projectif; le comportement de ce système étant équivalent à déformation projective de second ordre.

1. Dans l'espace projectif à trois dimensions S_3 soit donnée une congruence nonparabolique de droites L , à chacune de ses droites soit associé un repère A_1, A_2, A_3, A_4 d'une telle manière que $[A_1A_2A_3A_4] = 1$, que $[A_1A_2]$ soit la droite considérée et que $[A_1A_3], [A_2A_4]$ soient ses transformées de Laplace. La congruence L peut alors être déterminée par les équations fondamentales

$$\left. \begin{aligned} dA_1 &= \omega_{11}A_1 + \alpha_1\omega_2A_2 + \omega_1A_3, \\ dA_2 &= \alpha_2\omega_1A_1 + \omega_{22}A_2 + \omega_2A_4, \\ dA_3 &= \omega_{31}A_1 + \omega_{32}A_2 + \omega_{33}A_3 + \beta_2\omega_1A_4, \\ dA_4 &= \omega_{41}A_1 + \omega_{42}A_2 + \beta_1\omega_2A_3 + \omega_{44}A_4 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

(voir E. ČECH, *Transformations développables des droites*, ce Journal, t. 6(81) 1956, pp. 260—286). On peut introduire le repère dual

$$E_1 = [A_2A_3A_4], E_2 = -[A_1A_3A_4], E_3 = [A_1A_2A_4], E_4 = -[A_1A_2A_3]; \quad (2)$$

les équations fondamentales de la dualisation L^* de la congruence L sont alors

$$\left. \begin{aligned} dE_3 &= -\omega_{33}E_3 - \beta_1\omega_2E_4 - \omega_1E_1, \\ dE_4 &= -\beta_2\omega_1E_3 - \omega_{44}E_4 - \omega_2E_2, \\ dE_1 &= -\omega_{31}E_3 - \omega_{41}E_4 - \omega_{11}E_1 - \alpha_2\omega_1E_2, \\ dE_2 &= -\omega_{32}E_3 - \omega_{42}E_4 - \alpha_1\omega_2E_1 - \omega_{22}E_2. \end{aligned} \right\} \quad (1')$$

Je suppose enfin que les repères de la congruence L sont déjà spécialisés d'une manière unique de sorte que

$$\omega_{ij} = a_{ij}\omega_1 + b_{ij}\omega_2. \quad (3)$$

À côté de la congruence L soit donnée une autre congruence L' dont le repère est choisie de manière analogue, toutes les expressions se rapportant à L' sont affectées d'un accent. Supposons que les congruences L et L' soient en trans-

formation développable T (les surfaces développables des deux congruences se correspondent donc en cette même transformation)

$$\omega_1 = \omega'_1, \quad \omega_2 = \omega'_2. \quad (4)$$

J'appelle *extension* (T_b, T_r) de la transformation le choix des projectivités

$$T_b(A_1 + xA_2) = A'_1 + x\rho A'_2, \quad T_r(E_4 + yE_3) = E'_4 + y\sigma E'_3 \quad (5)$$

qui existent entre les droites se correspondant l'une à l'autre, $\rho \neq 0$ et $\sigma \neq 0$ étant des fonctions arbitraires.

La congruence L soit décomposée en une couche de surfaces réglées non-développables par l'équations

$$\omega_2 - a\omega_1 = 0. \quad (6)$$

On trouve alors aisément que le plan tangent à la surface réglée de la couche (6) au point $A_1 + \tau A_2$ est $E_4 - a\tau E_3$. Par l'intermédiaire de la transformation (4), la décomposition de la congruence L en la couche (6) se transmet à la congruence L' ; le plan tangent à la surface réglée correspondante de la congruence L' au point $T_b(A_1 + \tau A_2) = A'_1 + \tau\rho A'_2$ est $E'_4 - a\tau\rho E'_3$. Par le choix de (6) et de l'extension ponctuelle T_b j'obtiens une certaine extension T_r (assez transparente géométriquement), où $T_r(E_4 - a\tau E_3) = E'_4 - a\tau\rho E'_3$, c'est-à-dire qu'en somme (je pose $-a\tau = y, \tau = x$)

$$T_b(A_1 + xA_2) = A'_1 + x\rho A'_2, \quad T_r(E_4 + yE_3) = E'_4 + y\rho E'_3. \quad (7)$$

L'extension T_r est évidemment indépendante du choix de la couche (6), je peux donc dire qu'une transformation développable existant entre L et L' et l'extension ponctuelle T_b déterminent l'extension planaire T_r . Les extensions (T_b, T_r) , où les projectivités T_b et T_r se correspondent de la manière décrite ci-dessus, seront appelées *extensions principales*.

2. Dans la suite j'exploite la notion de connexion d'une congruence normalisée ponctuellement où à chacune de ses droites p est associée une droite q sans point commune avec p , voir ENEA BORTOLOTTI, *Connessioni nelle varietà luogo di spazi*, Rendiconti del Seminario della Facoltà di Scienze della R. Univ. di Cagliari, III, 1933; *Sulla geometria differenziale delle congruenze di rette*, Atti Soc. Italiana per il Progresso delle Scienze, XXII Riunione — Bari, 1933, Col. II., pp. 185—7. Soient données deux droites p_1 et p_2 de la congruence L et soit π l'„intervalle“ d'une surface réglée quelconque entre ces deux droites. Au moyen de la normalisation on peut transporter chaque point $A \in p_1$ sur la droite p à travers π le long d'une courbe γ dont la tangente en tout point $P \in p$ coupe la droite q que correspond à p dans la normalisation. La correspondance ainsi engendrée entre les droites p_1 et p_2 sera une projectivité; l'ensemble de toutes ces projectivités entre les paires de droites de la congruence L à travers les surfaces réglées particulières s'appelle connexion de la congruence normalisée ponctuellement. La congruence L sera normalisée planairement si la dualisa-

tion L^* l'est ponctuellement. Dans la congruence normalisée L (j'appelle ainsi une congruence normalisée des deux façons) se présentent donc deux connexions. Dans ce qui suit je vais m'occuper de telles normalisations pour lesquelles la droite normalisante coupe les transformées de Laplace de la droite de la congruence considérée.

Supposons que la congruence L (1) soit normalisée ponctuellement par les droites $[A_3 + \lambda_1 A_1, A_4 + \lambda_2 A_2]$ et que sur une certaine surface réglée de la congruence L le point $A = A_1 + xA_2$ se maintient dans la connexion induite. On a alors nécessairement $[A, dA, A_3 + \lambda_1 A_1, A_4 + \lambda_2 A_2] = 0$ ou bien aussi

$$dx + \alpha_1 \omega_2 + x(\omega_{22} - \omega_{11} + \lambda_1 \omega_1 - \lambda_2 \omega_2) - x^2 \alpha_2 \omega_1 = 0. \quad (8)$$

L'équation (8) détermine évidemment une connexion de la congruence L . Si L est normalisée planairement par les droites $[E_1 + \mu_1 E_3, E_2 + \mu_2 E_4]$, alors le plan $E = E_4 + yE_3$ se maintient dans la connexion induite si l'on a

$$[E, dE, E_1 + \mu_1 E_3, E_2 + \mu_2 E_4] = 0$$

ou bien encore

$$dy - \beta_2 \omega_1 + y(\omega_{44} - \omega_{33} + \mu_1 \omega_1 - \mu_2 \omega_2) + y^2 \beta_1 \omega_2 = 0. \quad (9)$$

3. Je considère enfin deux congruences L et L' en correspondance T (4), la congruence L soit normalisée. Je vais étudier l'existence d'une normalisation de la congruence L' et l'existence de l'extension principale (T_b, T_r) de la correspondance T , pour lesquelles on a: Soient p et p' un couple de droites correspondantes des congruences L et L' , soit $A \in p$, $T_b A = A' \in p'$; supposons que A se ment dans la connexion de la congruence L suivant une courbe γ située sur une surface π dans L , et que le point A' se ment sur la surface $T\pi$ correspondante suivant une courbe γ' , alors $T_b \gamma = \gamma'$; une situation analogue se présentant même pour les dualisations L^* et L'^* .

La congruence L' soit normalisée par les droites $[A'_3 + \lambda'_1 A'_1, A'_4 + \lambda'_2 A'_2]$ et $[E'_1 + \mu'_1 E'_3, E'_2 + \mu'_2 E'_4]$, de même comme dans ce qui précède on trouve que si le point $T_b A = A'_1 + x \rho A'_2$ se transporte suivant la courbe donnée par la connexion de la congruence L' on a

$$dx + \varrho^{-1} \alpha'_1 \omega_2 + x(d \log \varrho + \omega'_{22} - \omega'_{11} + \lambda'_1 \omega_1 - \lambda'_2 \omega_2) - \varrho x^2 \alpha'_2 \omega_1 = 0. \quad (10)$$

D'une manière semblable j'obtiens pour le transfer du plan $T_r E = E'_4 + y \varrho E'_3$

$$dy - \varrho^{-1} \beta'_2 \omega_1 + y(d \log \varrho + \omega'_{44} - \omega'_{33} + \mu'_1 \omega_1 - \mu'_2 \omega_2) + \varrho y^2 \beta'_1 \omega_2 = 0. \quad (11)$$

La condition citée ci-dessus pour la coïncidence des connexions déterminées par les normalisations des congruences L et L' est évidemment équivalente à la coïncidence des équations (8), (10) et (9), (11) sur chaque surface. En comparant j'obtiens

$$\alpha_1 = \varrho^{-1} \alpha'_1, \quad \alpha_2 = \varrho \alpha'_2, \quad \beta_1 = \varrho \beta'_1, \quad \beta_2 = \varrho^{-1} \beta'_2, \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} d \log \varrho + \tau_{22} - \tau_{11} &= (\lambda_1 - \lambda'_1) \omega_1 - (\lambda_2 - \lambda'_2) \omega_2, \\ d \log \varrho + \tau_{44} - \tau_{33} &= (\mu_1 - \mu'_1) \omega_1 - (\mu_2 - \mu'_2) \omega_2 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

où $\tau_{ii} = \omega'_{ii} - \omega_{ii}$. Les ϱ , λ_i , μ_i étant donnés λ'_i , μ'_i sont déterminés par les équations (13) d'une manière unique.

L'existence d'une normalisation de la congruence L' et d'une extension (T_b, T_r) satisfaisant aux conditions citées ci-dessus se réduit à l'existence d'une fonction ϱ vérifiant (12). On sait néanmoins bien d'après le travail cité de M. Čech que l'existence de ϱ vérifiant (12) est équivalente à une déformation projective des congruences L et L' . On obtient donc le résultat que voici:

Etant données deux congruences L et L' en transformation développable, l'existence de leurs normalisations et de l'extension de la transformation développable telles que les deux connexions induites coïncident (de la manière décrite ci-dessus) est équivalente à la supposition de leur déformation projective. Si ce cas se présente, alors la normalisation de la congruence L détermine sans ambiguïté la normalisation correspondante de la congruence L' et l'extension de la transformation qui existe entre L et L' .

Ce théorème résout dans une certaine mesure le problème de construction du système de géométries intrinsèques d'une congruence de droites, dont le comportement est équivalent à la déformation projective de la congruence. Ce problème-là a été posé dans le livre Теория конгруэнций de M. Финков.

Резюме

ВНУТРЕННЯЯ ГЕОМЕТРИЯ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ КОНГРУЭНЦИЙ И ИХ ПРОЕКТИВНОЕ ИЗГИБАНИЕ

АЛОИС ШВЕЦ (Alois Švec), Либерец

(Поступило в редакцию 3/1 1958 г.)

Пусть L — прямолинейная конгруэнция проективного пространства S_3 , а L^* — ее дуализация. Конгруэнция L нормирована по точкам, если каждой ее прямой p поставлена в соответствие скрещивающаяся прямая q ; понятие связности нормированной по точкам конгруэнции было введено Бортолотти. Конгруэнция L нормирована по плоскостям, если L^* нормирована по точкам; о конгруэнции, нормированной и по точкам и по плоскостям, мы говорим, что она нормирована.

Пусть L и L' находятся в соответствии C , при котором их развертывающиеся поверхности соответствуют друг другу. Тогда сохранение некоторой системы связностей в соответствии C является необходимым и достаточным условием для проективного изгибания второго порядка конгруэнции L и L' .