Miloš Ráb

Asymptotische Eigenschaften der Lösungen der Differentialgleichung $y'' + A(x)y = 0$

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 8 (1958), No. 4, 513–519

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100326

Чехословацкий математический журнал, т. 8 (83) 1958, Прага

ASYMPTOTISCHE EIGENSCHAFTEN DER LÖSUNGEN DER DIFFERENTIALGLEICHUNG $y'' + A(x)\,y = 0$

MILOŠ RÁB, Brno

(Eingelangt am 2. Jänner 1958)

In der vorliegenden Arbeit werden asymptotische Formeln der Lösungen der Differentialgleichung $y'' + A(x)\,y = 0$ abgeleitet. Aus ihnen folgt eine einfache notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß alle Lösungen der angeführten Differentialgleichung für $x \to \infty$ gegen Null streben.

Im Vordergrund des Interesses der Mathematiker steht das Problem, asymptotische Formeln der Lösungen der Differentialgleichung

$$y'' + A(x)\,y = 0\,, \tag{1}$$

$A(x)$ stetig in $J = \langle x_0, \infty)$, im oszillatorischen Fall zu geben. Die größte Aufmerksamkeit wurde dem Fall gewidmet, daß die Differentialgleichung (1) die Gestalt

$$y'' + [1 + f(x)]\,y = 0 \tag{2}$$

hat, und es wurden einfache Bedingungen für die Funktion $f(x)$ gesucht, unter welchen die Lösungen der Differentialgleichung (2) ähnliche Form wie die der Differentialgleichung

$$y'' + y = 0$$

haben. Folgende Sätze sind bekannt:

(I) $$\int_{x_0}^{\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty \Rightarrow y = y_0 \sin(x + \varphi_0) + o(1)\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y_0 \cos(x + \varphi_0) + o(1)\,, \quad [1]\,.$$

(II) $$\int_{x_0}^{\infty} |f'(x)|\,\mathrm{d}x < \infty\,, \quad f(x) \to 0 \Rightarrow$$

$$y = y_0 \sin\left(\int_{x^0}^{x} \sqrt{1 + f(t)}\,\mathrm{d}t + \varphi_0\right) + o(1)\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y_0 \cos\left(\int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + f(t)}\,\mathrm{d}t + \varphi_0\right) + o(1), \quad [4]\,.$$

(III) $\int\limits_{x_0}^{\infty} |f''(x)|\, \mathrm{d}x < \infty\,, \quad 1 + f(x) \geqq a^2 > 0 \Rightarrow$

$$y = \frac{1}{\sqrt[4]{1 + f(x)}} \left[y_0 \sin \left(\int\limits_{x_0}^{x} \sqrt{1 + f(t)}\, \mathrm{d}t + \varphi_0\right) + o(1)\right],$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sqrt[4]{1 + f(x)} \left[y_0 \cos \left(\int\limits_{x_0}^{x} \sqrt{1 + f(t)}\, \mathrm{d}t + \varphi_0\right) + o(1)\right], \quad [2]\,.$$

Auf Grund des Ergebnisses (I) hat M. Zlámal folgenden Satz, der die Differentialgleichung (1) betrifft, bewiesen:

(IV) $A(x) \geqq a^2 > 0\,, \quad A^{-1/4}(x)$ konvex $\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{1}{\sqrt[4]{A(x)}} \left[y_0 \sin \left(\int\limits_{x_0}^{x} \sqrt{A(t)}\, \mathrm{d}t + \varphi_0\right) + o(1)\right], \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \sqrt[4]{A(x)} \left[y_0 \cos \left(\int\limits_{x_0}^{x} \sqrt{A(t)}\, \mathrm{d}t + \varphi_0\right) + o(1)\right], \quad [6]\,. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

In dieser Arbeit werden wir eine hinreichende Bedingung ableiten, die die asymptotische Form der Lösungen von (1) besonders in dem oszillatorischen Fall zu beschreiben ermöglicht und aus welcher unmittelbar eine Reihe effektiver Resultate (namentlich (I), (III), (IV)) folgt. Auch die Bedingung (II) kann man in einer allgemeineren Form leicht beweisen.

Wir werden zuerst zwei Hilfsätze anführen.

Hilfsatz 1. *Es sei $h(x)$ eine beliebige Funktion, die eine in $J = \langle x_0, \infty)$ stetige zweite Ableitung hat und $h(x) > 0$ ist.*

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$z'' + \left\{\frac{1}{h^4(x)} - \frac{h''(x)}{h(x)}\right\} z = 0 \tag{4}$$

ist

$$z = C_1\, h(x) \sin \left\{\int\limits_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{h^2(t)} + C_2\right\}. \tag{5}$$

Hilfsatz 2. *Es sei die Differentialgleichung*

$$Y'' + P(x)\, Y' + Q(x)\, Y = 0 \tag{6}$$

und die perturbierte Differentialgleichung

$$y'' + [P(x) + p(x)]\, y' + [Q(x) + q(x)]\, y = 0 \tag{7}$$

gegeben. Die Funktionen $P(x)$, $Q(x)$, $p(x)$, $q(x)$ seien stetig in J. Bezeichnen wir *mit $Y_1(x)$, $Y_2(x)$ ein Hauptsystem von Lösungen der Differentialgleichung* (6) *und mit $W(x)$ ihre Wronskische Determinante. Ist für alle $k, l = 1, 2$*

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{|W(x)|} \{|p(x)\, Y_k(x)\, Y_l'(x)| + |q(x)\, Y_k(x)\, Y_l(x)|\}\, dx < \infty\,, \tag{8}$$

dann hat die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (7) *die Form*

$$y(x) = Y_1(x)[C_1 + o(1)] + Y_2(x)[C_2 + o(1)]\,,$$
$$y'(x) = Y_1'(x)[C_1 + o(1)] + Y_2'(x)[C_2 + o(1)]\,,$$

$C_1, C_2 =$ Konst.

Beweis. Wir wollen die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (7) in der Form $y = C_1(x)\, Y_1(x) + C_2(x)\, Y_2(x)$ suchen, wo C_1 und C_2 passende Funktionen sind. Setzen wir dies in (7) ein und wählen wir $C_1'Y_1 + C_2'Y_2 = 0$. Wir bekommen so für C_1' und C_2' folgendes System von Gleichungen:

$$C_1'Y_1 + C_2'Y_2 = 0\,, \qquad C_1'Y_1' + C_2'Y_2' = -p(C_1Y_1' + C_2Y_2') - q(C_1Y_1 + C_2Y_2)\,.$$

Durch Auflösung dieses Systems erhalten wir

$$\begin{aligned} C_1' &= \frac{Y_2}{W}(pY_1' + qY_1)\, C_1 + \frac{Y_2}{W}(pY_2' + qY_2)\, C_2\,, \\ C_2' &= -\frac{Y_1}{W}(pY_1' + qY_1)\, C_1 - \frac{Y_1}{W}(pY_2' + qY_2)\, C_2\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Wegen (8) ist das Integral

$$\int_{x_0}^{\infty} \left\{\left|\frac{Y_2}{W}(pY_1' + qY_1)\right| + \left|\frac{Y_2}{W}(pY_2' + qY_2)\right| + \left|\frac{Y_1}{W}(pY_1' + qY_1)\right| + \right.$$
$$\left. + \left|\frac{Y_1}{W}(pY_2' + qY_2)\right|\right\} dx$$

konvergent und das Hauptsystem von Lösungen des Systems (9) hat, wie bekannt [5], die Form $C_1(x) = C_1 + o(1)$, $C_2(x) = C_2 + o(1)$, wo C_1 und C_2 beliebige Konstanten mit $C_1^2 + C_2^2 \neq 0$ sind. Daraus ergibt sich leicht die Behauptung.

Hauptsatz. *Es sei $h(x)$ eine Funktion mit einer stetigen zweiten Ableitung in J, die die Bedingung*

$$\int_{x_0}^{\infty} \left| h(x)\, h''(x) + A(x)\, h^2(x) - \frac{1}{h^2(x)} \right| dx < \infty \tag{10}$$

erfüllt.

Dann hat die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (1) *die Form*

$$y = h(x)\left[y_0 \sin\left(\int_{x_0}^{x} \frac{1}{h^2(t)}\,dt + \varphi_0\right) + o(1)\right],$$

$$\frac{dy}{dx} = h'(x)\left[y_0 \sin\left(\int_{x_0}^{x} \frac{1}{h^2(t)}\,dt + \varphi_0\right) + o(1)\right] + \tag{11}$$

$$+ \frac{1}{h(x)}\left[y_0 \cos\left(\int_{x_0}^{x} \frac{1}{h^2(t)}\,dt + \varphi_0\right) + o(1)\right].$$

Beweis.

Die Differentialgleichung (1) kann man in der Gestalt

$$y'' + \left[\left(\frac{1}{h^4(x)} - \frac{h''(x)}{h(x)}\right) + \left(\frac{h''(x)}{h(x)} - \frac{1}{h^4(x)} + A(x)\right)\right] y = 0 \tag{12}$$

schreiben. Mit Rücksicht auf Hilfsatz 2 besitzt diese Differentialgleichung unter der Voraussetzung

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{|W(x)|}\left|\frac{h''(x)}{h(x)} - \frac{1}{h^4(x)} + A(x)\right| |z_k(x)\, z_l(x)|\, dx < \infty\,, \quad k, l = 1, 2 \tag{13}$$

die Lösung von der Form

$$y = \sum_{i=1}^{2} z_i[C_i + o(1)]\,, \quad y' = \sum_{i=1}^{2} z_i'[C_i + o(1)]\,. \tag{14}$$

Dabei bedeuten z_1 und z_2 zwei unabhängige Lösungen der Differentialgleichung (4) und W ihre Wronskische Determinante. Weil $W \equiv$ Konst, ist wegen (5) und (10) die Voraussetzung (13) gewiß erfüllt und aus (5) und (14) folgt die Behauptung.

Aus diesem Satz folgt unmittelbar:

Es sei $A(x)$ stetig in J. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß alle Lösungen der Differentialgleichung (1) *mit wachsendem x gegen Null streben, ist die Existenz einer solchen Funktion $h(x) > 0$ mit einer stetigen zweiten Ableitung, die die Voraussetzung* (13) *und $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = 0$ erfüllt.*

Beweis. Die Notwendigkeit folgt so: Es seien u, v ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung (1), $W = u'v - uv'$ und $h = (u^2 + v^2)^{1/2}$, so daß $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = 0$ ist. Man kann leicht beweisen (siehe [3]), daß $h''h^3 + Ah^4 =$

$= W^2$ gilt. Weil $W \equiv$ Konst ist, können wir $W = 1$ voraussetzen, so daß $hh'' + Ah^2 - \frac{1}{h^2} = 0$ ist und (10) gilt.

Folgerungen. Wenn $A(x) > 0$, $A''(x)$ stetig in J ist, kann man in (10) $h(x) = A^{-1/4}(x)$ wählen und die Voraussetzung (10) reduziert sich auf

$$\int_{x_0}^{\infty} |A^{-1/4}(x)[A^{-1/4}(x)]''| \, \mathrm{d}x < \infty \,. \tag{16}$$

Die Voraussetzung (16) ist gewiß erfüllt, wenn $A(x) \geqq$ Konst > 0 und

$$[A^{-1/4}(x)]'' \geqq 0 \tag{17}$$

für $x \in J$ gilt [6, S. 84] und die asymptotischen Formeln (11) reduzieren sich auf (3). Die Voraussetzung (17) kann man durch eine allgemeinere ersetzen: $A^{-1/4}(x)$ konvex in J.

Wenn $A(x) \geqq a^2 > 0$ gilt, können wir $A(x) = p^2(x)$ bezeichnen und statt der Bedingung (16) bekommen wir

$$\int_{x_0}^{\infty} \left| p^{-1/2}(x)[p^{-1/2}(x)]'' \right| \mathrm{d}x = \int_{x_0}^{\infty} \left| -\frac{1}{2}\left(\frac{p'(x)}{p^2(x)}\right)' - \frac{1}{4}\,\frac{p'^2(x)}{p^3(x)} \right| \mathrm{d}x < \infty \,,$$

was gewiß erfüllt ist, wenn $\int_{x_0}^{\infty} |A''(x)| \, \mathrm{d}x < \infty$ gilt [2, S. 512]. Im speziellen Fall, wenn $A(x) = 1 + f(x)$ ist, bekommen wir das Resultat (III).

Die Bedingung (I) bekommen wir leicht durch die Wahl $h(x) \equiv 1$.

Am Ende wenden wir den Hilfsatz 2 auf die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}s^2} + \frac{p'(x)}{p^2(x)}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} + y = 0 \,,$$

$p(x) > 0$ an, die wir durch Transformation $s = \int_{x_0}^{x} p(t) \, \mathrm{d}t$ aus $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + p^2(x)\, y = 0$ bekommen. Wir erhalten unmittelbar eine Verallgemeinerung von (II):

$$\int_{x_0}^{\infty} \left| \frac{p'(t)}{p(t)} \right| \mathrm{d}t < \infty \,, \quad \int_{x_0}^{\infty} p(t) \, \mathrm{d}t = \infty \Rightarrow y = y_0 \sin\left(\int_{x_0}^{x} p(t) \, \mathrm{d}t + \varphi_0 \right) + o(1) \,,$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y_0 \cos\left(\int_{x_0}^{x} p(t) \, \mathrm{d}t + \varphi_0 \right) + o(1) \,.$$

Bemerkung. Ersetzt man die Differentialgleichung (4) durch

$$(p(x)\, y')' + \left[\frac{1}{p(x)\, h^4(x)} - \frac{(p(x)\, h'(x))'}{h(x)} \right] y = 0 \,,$$

die die allgemeine Lösung

$$y = C_1 h(x) \sin \left\{ \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{p(t) h^2(t)} + C_2 \right\}$$

hat, so kann man aus Hilfsatz 2 folgenden Satz ableiten:

Es sei die Differentialgleichung

$$(p(x) y')' + q(x) y = 0 , \tag{18}$$

$p'(x)$, $q(x)$ stetig in J, gegeben. Es sei $h(x)$ eine Funktion mit einer stetigen zweiten Ableitung, die die Bedingung

$$\int_{x_0}^{\infty} \left| h(x) (p(x) h'(x))' + q(x) h^2(x) - \frac{1}{p(x) h^2(x)} \right| \mathrm{d}x < \infty$$

erfüllt.

Dann hat die Differentialgleichung (18) *die allgemeine Lösung*

$$y = h(x) \left[y_0 \sin \left\{ \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{p(t) h^2(t)} + \varphi_0 \right\} + o(1) \right] ,$$

$$y' = h'(x) \left[y_0 \sin \left\{ \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{p(t) h^2(t)} + \varphi_0 \right\} + o(1) \right] +$$

$$+ \frac{1}{p(x) h(x)} \left[y_0 \cos \left\{ \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{p(t) h^2(t)} + \varphi_0 \right\} + o(1) \right] .$$

LITERATURVERZEICHNISS

[1] *Ascoli G.*: Sul comportamento asintotico degli integrali delle equazioni differenziali del 2° ordine. Atti della R. Accad. Naz. dei Lincei, Rendiconti, ser. 6, vol. *XXII* (1935), 234—243.

[2] *Bellman R.*: Boundedness of the solutions of second order linear differential equations. Duke Math. Journal *22* (1955), 511—513.

[3] *Pinney E.*: The non linear differential equation. Proceedings of the Amer. Math. Soc., *1* (1950), p. 681.

[4] *Wintner A.*: Asymptotic integration of the adiabatic oscillator. Amer. Journ. Math. *69* (1947), 251—272.

[5] *Wintner A.*: Linear variations of constants. Amer. Journ. Math. *68* (1946), 185—213.

[6] *Zlámal M.*: Über asymptotische Eigenschaften der Lösungen der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Чех. мат. Журнал, м. *6* (*81*) 1956, 75—93.

Резюме

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ $y'' + A(x)\,y = 0$

МИЛОШ РАБ (Miloš Ráb), Брно

(Поступило в редакцию 2/I 1958 г.)

В статье доказывается теорема:

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$y'' + A(x)\,y = 0\,, \tag{1}$$

$A(x)$ — непрерывная в интервале $J = \langle x_0, \infty)$ функция.

Пусть $h(x) > 0$ есть функция с непрерывной второй производной в J такая, что

$$\int_{x_0}^{\infty} \left| h(x)\ h''(x) + A(x)\ h^2(x) - \frac{1}{h^2(x)} \right| \mathrm{d}x < \infty\,. \tag{2}$$

Тогда общий интеграл дифференциального уравнения (1) имеет вид

$$y = h(x)\left[y_0 \sin\left(\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{h^2(t)} + \varphi_0\right) + o(1)\right],$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = h'(x)\left[y_0 \sin\left(\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{h^2(t)} + \varphi_0\right) + o(1)\right] + \frac{1}{h(x)}\left[y_0 \cos\left(\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{h^2(t)} + \varphi_0\right) + o(1)\right].$$

Отсюда легко вытекает теорема:

Необходимым и достаточным условием для того, чтобы все решения дифференциального уравнения (1) сходились с возрастающим x к нулю, является существование такой функции $h(x) > 0$ с непрерывной второй производной в J, что $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = 0$ и что имеет место (2).