Adolf Haimovici

Sur une certaine correspondance conforme entre deux courbes

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 9 (1959), No. 2, 297–304

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100353

Чехословацкий математический журнал, т. 9 (84) 1959, Прага

SUR UNE CERTAINE CORRESPONDANCE CONFORME ENTRE DEUX COURBES

ADOLF HAIMOVICI, Iaşi

(Reçu le 16 Octobre 1958)

On démontre que, si l'on se donne une courbe C de l'espace conforme à trois dimensions et une famille (γ) de cercles (k) tangents à elle, on peut trouver une courbe $\overline{C}$ en correspondance ponctuelle avec C, et une famille $(\overline{\gamma})$ de cercles $\overline{k}$ tangents à $\overline{C}$ de manière que les sphères qui passent par k soient orthogonales aux sphères qui passent par le cercle correspondant $\overline{k}$. On trouve l'arbitrariété de $\overline{C}$ et $(\overline{\gamma})$, et on traite le cas particulier quand k et $\overline{k}$ sont osculateurs à C et $\overline{C}$.

Un théorème simple de géométrie des sphères afirme que si l'on considère une famille uniparamétrique de sphères, alors l'enveloppe de leurs cercles caractéristiques admet une famille de cercles tangents qui ont pour axes les tangentes à la courbe des centres des sphères. On peut généraliser ce problème de la manière suivante:

Trouver deux courbes (C) et $(\overline{C})$, deux familles (γ) et $(\overline{\gamma})$ de cercles (k) et $(\overline{k})$, tangents à (C) et $(\overline{C})$ respectivement, de manière que le cercle (k) passe par les foyers du cercle $(\overline{k})$ correspondant et réciproquement. Ce problème admet évidemment une solution: C'est le cas par lequel nous avons commencé.

M. E. Čech m'a demandé s'il y a des cas où les cercles (k) et $(\overline{k})$ sont osculateurs à (C) et $(\overline{C})$. La réponse est affirmative; ce problème est résolu au paragraphe 4.

Le problème est traité dans l'espace conforme, à l'aide de la notation et du repère mobile introduits par E. Cartan dans l'espace conforme.[1])

1. Soit (C) une courbe de l'espace conforme à trois dimensions et (γ) une famille de cercles (k), tangents à (C); attachons à un point M de (C) un pentasphère mobile formé par les cinq sphères suivantes:

1. La sphère-point $A_0 \equiv M$.

[1]) E. Cartan, Bull. Soc. Math. France, T. *45* (1957), p. 57–121.

2. Deux sphères A_1 et A_2 tangentes à (C) en M, orthogonales entre elles, passant par le cercle (k) tangent à (C) en M.

3. Une sphère A_3 passant par M, et orthogonale à (C).

4. La sphère-point A_4, deuxième point d'intersection des sphères A_1, A_2, A_3.

Ces sphères satisfont, par suite de nos hypothèses, aux conditions suivantes:

$$A_iA_j = 0\,, \quad i \neq j;\ i, j = 0, 1, \ldots, 4,\ (i, j) \neq (0, 4),\ (i, j) \neq (4, 0)\,. \tag{1}$$

Imposons encore les normalisations suivantes

$$A_i^2 = 1 \quad (i = 1, 2, 3), \quad A_0A_4 = 1\,. \tag{2}$$

La condition que le déplacement du point M soit tangent au cercle (k), c'est-à-dire aux sphères A_1 et A_2, s'écrit sous la forme

$$A_1\,\mathrm{d}A_0 = A_2\,\mathrm{d}A_0 = 0\,. \tag{3}$$

Soit enfin t le paramètre dont dépend le point M de (C).

Les déplacements du pentasphère sont donnés par des formules de la forme

$$\frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t} = p_{ij}A_j\,, \quad (i, j = 0, 1, 2, 3, 4)\,.$$

Si l'on tient compte de (1), (2) et (3), ces formules deviennent

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}A_0}{\mathrm{d}t} &= \alpha A_0 + \beta A_3\,,\\
\frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}t} &= \xi_1 A_0 + \varrho A_2 + \sigma_1 A_3\,,\\
\frac{\mathrm{d}A_2}{\mathrm{d}t} &= \xi_2 A_0 - \varrho A_1 + \sigma_2 A_3\,,\\
\frac{\mathrm{d}A_3}{\mathrm{d}t} &= \zeta A_0 - \sigma_1 A_1 - \sigma_2 A_2 - \beta A_4\,,\\
\frac{\mathrm{d}A_4}{\mathrm{d}t} &= - \xi_1 A_1 - \xi_2 A_2 - \zeta A_3 - \alpha A_4\,,
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$\alpha, \ldots, \zeta$ étant des fonctions de t, satisfaisant à des conditions de régularité habituelles en géométrie.

Soit maintenant $(\bar{C})$ une seconde courbe du même espace conforme, $(\bar{\gamma})$ une famille de cercles $(\bar{k})$ tangents à $(\bar{C})$, $\bar{A}_i$ $(i = 0, \ldots, 4)$ un pentasphère mobile attaché au point courant $\bar{M}$ de $(\bar{C})$ et qui satisfait à des conditions analogues à (1), (2), (3).

Soit $\bar{t}$ le paramètre dont dépend le point $\bar{M}$ de $(\bar{C})$. Supposons qu'en des points correspondants on a $t = \bar{t}$, ce qui ne restreint pas évidemment la généralité.

Les déplacements du nouveau pentasphère seront donnés par des relations analogues à (4), soit:

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{d\bar{A}_0}{dt} &= \bar{\alpha}\bar{A}_0 + \bar{\beta}\bar{A}_3\,,\\
\frac{d\bar{A}_1}{dt} &= \bar{\xi}_1\bar{A}_0 + \bar{\varrho}\bar{A}_2 + \bar{\sigma}_1 A_3\,,\\
\frac{d\bar{A}_2}{dt} &= \bar{\xi}_2\bar{A}_0 - \varrho\bar{A}_1 + \bar{\sigma}_2 A_3\,,\\
\frac{d\bar{A}_3}{dt} &= \bar{\zeta}A_0 - \bar{\sigma}_1\bar{A}_1 - \bar{\sigma}_2\bar{A}_2 - \bar{\beta}\bar{A}_4\,,\\
\frac{d\bar{A}_4}{dt} &= - \bar{\xi}_1\bar{A}_1 - \bar{\xi}_2\bar{A}_2 - \bar{\zeta}\bar{A}_3 - \bar{\alpha}\bar{A}_4\,,
\end{aligned}\right\} \tag{4'}
$$

$\bar{\alpha}, \ldots, \bar{\zeta}$ étant des nouvelles fonctions des t.

2. Supposons qu'on a établi une correspondance entre (C) et $(\bar{C})$, de manière que toutes les sphères qui passent par le cercle (k) tangent à (C) en M, soient orthogonales à toutes les sphères qui passent par le cercle $(\bar{k})$ qui est tangent à $(\bar{C})$ au point $\bar{M}$, correspondant à M; on peut encore dire qu'on a établi une correspondance entre (C) et $(\bar{C})$ de manière que le cercle (k) passe par les foyers du cercle correspondant $(\bar{k})$, et réciproquement.

Ces conditions s'écrivent analytiquement sous la forme

$$\bar{A}_1 A_1 = \bar{A}_1 A_2 = \bar{A}_2 A_1 = \bar{A}_2 A_2 = 0\,.$$

Chaque repère dépend encore de trois paramètres: a) la normalisation de A_0, b) l'angle fait par A_1 avec une sphère fixe, c) l'angle fait par A_3 avec une sphère fixe.

Pour chacun des deux repères attachés à M et à $\bar{M}$, on peut fixer deux de ces trois paramètres, en imposant

a) que la sphère A_2 passe par $\bar{M}$ et que la sphère $\bar{A}_2$ passe par M,

b) que la sphère A_3 passe par $\bar{M}$ et que la sphère $\bar{A}_3$ passe par M.

On aura donc encore

$$A_2\bar{A}_0 = A_3\bar{A}_0 = \bar{A}_2 A_0 = \bar{A}_3 A_0 = 0\,,$$

de manière qu'on pourra écrire

$$
\begin{aligned}
\bar{A}_0 &= xA_0 + yA_1 + zA_4\,,\\
\bar{A}_1 &= pA_0 + qA_3 + rA_4,\\
\bar{A}_2 &= lA_0 + mA_3\,,\\
\bar{A}_3 &= uA_0 + vA_1 + wA_2 + sA_3\,,\\
\bar{A}_4 &= hA_0 + kA_1 + nA_2 + aA_3 + bA_4\,.
\end{aligned}
$$

Les conditions d'orthogonalité et de normalisation analogues à (1) et (2) conduisent à

$$\begin{gathered} l=0,\ m=1,\ q=s=a=0;\ u=v=0,\ w=1,\ n=0, \\ \begin{aligned} y^2+2xz&=0\,, & pz+xr&=0\,, \\ 2pr&=1\,, & pb+hr&=0\,, \\ k^2+2hb&=0\,, & bx+hz+yk&=1\,. \end{aligned} \end{gathered}$$

Après un léger changement de notation on obtient de ces relations

$$\begin{aligned} \overline{A}_0 &= -\lambda m A_0 + \lambda A_1 + \lambda p A_4\,, \\ \overline{A}_1 &= m A_0 + p A_4\,, \\ \overline{A}_2 &= A_3\,, \\ \overline{A}_3 &= A_2\,, \\ \overline{A}_4 &= -\mu m A_0 - \mu A_1 + \mu p A_4\,, \end{aligned}$$

λ, μ, m, p étant des coefficients qui satisfont aux conditions

$$2\lambda\mu=-1\,,\quad 2mp=1\,.$$

En prenant $\lambda=-1$, $m=1$, on admet une certaine normalisation pour A_0 et $\overline{A}_0$, ce que nous supposerons réalisé dorénavant. On obtient définitivement:

$$\left.\begin{aligned} \overline{A}_0 &= A_0 - A_1 - \tfrac{1}{2}A_4\,, \\ \overline{A}_1 &= A_0 + \tfrac{1}{2}A_4\,, \\ \overline{A}_2 &= A_3\,, \\ \overline{A}_3 &= A_2\,, \\ \overline{A}_4 &= -\tfrac{1}{2}A_0 - \tfrac{1}{2}A_1 + \tfrac{1}{4}A_4\,, \end{aligned}\right\}. \tag{5}$$

et d'ici:

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= \tfrac{1}{4}\overline{A}_0 + \tfrac{1}{2}\overline{A}_1 - \tfrac{1}{2}\overline{A}_4\,, \\ A_1 &= -\tfrac{1}{2}\overline{A}_0 - \overline{A}_4\,, \\ A_2 &= \overline{A}_3\,, \\ A_3 &= \overline{A}_2\,, \\ A_4 &= -\tfrac{1}{2}\overline{A}_0 + \overline{A}_1 + \overline{A}_4\,. \end{aligned}\right\} \tag{5'}$$

En dérivant (5) par rapport à t, en tenant compte de (5), (4) et (4') on trouve

$$\left.\begin{aligned} &\overline{\alpha}=-\tfrac{1}{2}\xi_1\,;\quad \overline{\beta}=-\varrho+\tfrac{1}{2}\xi_2\,;\quad \overline{\xi}_1=\alpha\,,\quad \overline{\xi}_2=\sigma_1\,; \\ &\overline{\sigma}_1=-\tfrac{1}{2}\xi_2\,;\quad \overline{\sigma}_2=-\sigma_2\,;\quad \overline{\varrho}=\beta-\tfrac{1}{2}\zeta\,;\quad \overline{\zeta}=\tfrac{1}{2}\varrho+\tfrac{1}{4}\xi_2 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

et les conditions:

$$2\alpha-\xi_1=0\,,\quad 2\beta-2\sigma_1+\zeta=0 \tag{7}$$

pour la courbe (C) et pour le repère mobile attaché à cette courbe.

3. En considérant maintenant la courbe (C) et le système de cercles (γ) indépendant de $(\overline{C})$ et $(\overline{\gamma})$, nous allons démontrer que les conditions (7) peuvent être réalisées par un changement de la normalisation de A_0 et par un changement de A_3. On fixera de cette manière A_0 et A_3. Le faisceau de sphères A_1, A_2 qui passent par (k) restera encore indéterminé. Pour chaque système de pentasphères choisis le long de (C), il correspondra d'après (5) une courbe $(\bar{C})$ et un système $(\bar{\gamma})$. Posons maintenant, pour la détermination de A_0 et de A_3:

$$\left.\begin{array}{c} B_0 = xA_0\,, \quad B_1 = A_1\,, \quad B_2 = A_2\,, \\ B_3 = A_3 + yA_0\,, \quad B_4 = mA_0 + nA_3 + pA_4\,, \end{array}\right\} \tag{8}$$

avec les conditions

$$n^2 + 2mp = 0\,, \quad px = 1\,, \quad n + py = 0\,. \tag{8'}$$

Si l'on désigne par un astérisque les coefficients analogues à $\alpha, \ldots, \zeta$ pour le pentasphère $B_0, \ldots, B_4$, on trouve:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha^* = \dfrac{1}{x}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \beta y + \alpha\,, \quad \beta^* = \beta x\,, \quad \sigma_1^* = \sigma_1 \\ \zeta^* = \dfrac{1}{x}\left\{\zeta + \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \alpha y - \dfrac{\beta y^2}{2}\right\}, \\ \xi_1^* = \dfrac{1}{x}\,(\xi_1 - \sigma_1 y) \end{array}\right\} \tag{9}$$

et les conditions (7) deviennent

$$\left.\begin{array}{l} 2\,\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - 2\beta xy + 2\alpha x - \xi_1 + \sigma_1 y = 0\,, \\ 2\,\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2\alpha y - \beta y^2 + 4\beta x^2 - 4\sigma_1 x + 2\zeta = 0\,. \end{array}\right\} \tag{10}$$

Soient

$$x = x(t, C_1, C_2)\,, \quad y = y(t, C_1, C_2)$$

les intégrales de ce système. Elles dépendent de deux paramètres. D'autre part le faisceau de sphères A_1, A_2 dépend encore le long de (C), d'une fonction arbitraire, vu qu'on peut le remplacer par

$$A_1 \cos\varphi - A_2 \sin\varphi\,, \quad A_1 \sin\varphi + A_2 \cos\varphi,\ \varphi = \varphi(t)\,.$$

Il résulte alors que si l'on se donne la courbe (C) et la famille (γ) de cercles (k), le repère qui satisfait (7) dépend encore d'une fonction arbitraire $\varphi(t)$, et — cette fonction fixée — il restent deux constantes arbitraires dont dépend ce repère.

La détermination du repère fixe la courbe $(\bar{C})$ et le système $(\bar{\gamma})$. Il résulte alors que les courbes $(\bar{C})$ et $(\bar{\gamma})$ correspondantes à une courbe (C) et à une famille (γ), dépendent de la fonction arbitraire $\varphi(t)$, et — cette fonction fixée — de deux constantes arbitraires.

4. Étudions le cas particulier où les deux familles de cercles (γ) et $(\bar{\gamma})$ sont des cercles osculateurs de (C) et $(\bar{C})$ respectivement.

Pour que le cercle (k) soit osculateur à (C), il faut que chaque sphère qui passe par lui, ait un contact du second ordre avec (C), c'est-à-dire, il faut que $A_i \, d^2\bar{A}_0 = 0$ $(i = 1, 2)$. Ces conditions se réduisent à $\sigma_1\beta = \sigma_2\beta = 0$, et comme β ne peut pas s'annuler, parce que alors A_0 serait immobile, il s'ensuit $\sigma_1 = = \sigma_2 = 0$. La même chose résulte pour $(\bar{C})$, $(\bar{\gamma})$ et le pentasphère associé à eux, c'est-à-dire $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_2 = 0$. En tenant compte de (6) et (7), les déplacements des deux pentasphères seront

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dA_0}{dt} = \alpha A_0 + \beta A_3 , \quad \frac{dA_1}{dt} = 2\alpha A_0 + \varrho A_2 , \\ &\frac{dA_2}{dt} = -\varrho A_1 , \qquad\quad \frac{dA_3}{dt} = -2\beta A_0 - \beta A_4 , \\ &\frac{dA_4}{dt} = -2\alpha A_1 + 2\beta A_3 - \alpha A_4 , \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\bar{A}_0}{dt} = -\alpha\bar{A}_0 - \varrho\bar{A}_3 , \quad \frac{d\bar{A}_1}{dt} = \alpha\bar{A}_0 + 2\beta\bar{A}_2 , \\ &\frac{d\bar{A}_2}{dt} = -2\beta\bar{A}_1 , \qquad\qquad \frac{d\bar{A}_3}{dt} = \frac{1}{2}\varrho\bar{A}_0 + \varrho\bar{A}_4 , \\ &\frac{d\bar{A}_4}{dt} = -\alpha\bar{A}_1 - \frac{1}{2}\varrho\bar{A}_3 + \alpha\bar{A}_4 . \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

On constate de ces formules que la sphère A_2 est osculatrice à (C), parce que $A_2 \, d^3A_0 = 0$. Comme $\bar{A}_0 A_2 = 0$, il résulte que $\bar{M}$ se trouve sur la sphère osculatrice au point correspondant sur (C), et, d'une manière analogue, M se trouve sur la sphère osculatrice à $(\bar{C})$ au point correspondant $\bar{M}$.

D'ailleurs les conditions a) que (k) soit osculateur à (C), b) que la sphère A_2 soit osculatrice à (C) et c) les conditions (6) et (7), déterminent la courbe $(\bar{C})$ et la famille $(\bar{\gamma})$. En effet, si (k) est osculateur à (C) on a

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0 , \tag{13}$$

et si A_2 est osculatrice à (C) on a encore

$$\xi_2 = 0 . \tag{14}$$

Il résulte de (6)

$$\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_2 = \bar{\xi}_2 = 0 , \tag{15}$$

c'est-à-dire le cercle $(\bar{k})$ est osculateur à $(\bar{C})$ et $\bar{A}_2$ est osculatrice à $(\bar{C})$.

Les conditions (13) sont réalisées si l'on prend la famille (γ) formée de cercles osculateurs à (C), en laissant cette courbe arbitraire. La condition (14) est réalisée si l'on prend pour A_2 la sphère osculatrice à (C). Cette condition détermine le faisceau des sphères (A_1, A_2) qui restait jusqu'ici indéterminé. En utilisant alors le résultat du paragraphe précédent, il résulte que si l'on se donne arbitrairement la courbe (C), on peut trouver une famille à deux paramètres de courbes $(\bar{C})$ et une correspondance entre les points M de (C) et les points $\bar{M}$ de $(\bar{C})$, de manière que les cercles osculateurs à (C) passent par les foyers des cercles osculateurs à $(\bar{C})$ en des points correspondants.

5. Un second cas particulier intéressant est celui où le point $\bar{A}_4$ est fixe. Cela conduit à

$$\bar{\zeta} = \bar{\xi}_1 = \bar{\xi}_2 = 0 \tag{16}$$

et, par suite de (6) et de (7)

$$\left.\begin{aligned} \alpha = \bar{\alpha} = \sigma_1 = \xi_1 = 0\,, \quad \zeta = -2\beta\,, \quad \xi_2 = -2\varrho\,, \\ \bar{\beta} = -2\varrho\,, \quad \bar{\sigma}_1 = \varrho\,, \quad \bar{\sigma}_2 = \sigma_2\,, \quad \bar{\varrho} = 2\beta\,. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Les déplacements des deux pentasphères correspondants sont alors

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}A_0}{\mathrm{d}t} = \beta A_3\,, \quad \frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}t} = \varrho A_2\,, \\ \frac{\mathrm{d}A_2}{\mathrm{d}t} = -2\varrho A_0 - \varrho A_1 + \sigma_2 A_3\,, \\ \frac{\mathrm{d}A_3}{\mathrm{d}t} = -2\beta A_0 - \sigma_2 A_2 - \beta A_4\,, \quad \frac{\mathrm{d}A_4}{\mathrm{d}t} = -2\varrho A_2 + 2\beta A_3 \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

et

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\bar{A}_0}{\mathrm{d}t} = -2\varrho\bar{A}_3\,, \quad \frac{\mathrm{d}\bar{A}_1}{\mathrm{d}t} = 2\beta\bar{A}_2 + \varrho\bar{A}_3\,, \\ \frac{\mathrm{d}\bar{A}_2}{\mathrm{d}t} = -2\beta\bar{A}_1 - \sigma_2\bar{A}_3\,, \\ \frac{\mathrm{d}\bar{A}_3}{\mathrm{d}t} = -\varrho\bar{A}_1 + \sigma_2\bar{A}_2 + 2\varrho\bar{A}_4\,, \quad \frac{\mathrm{d}\bar{A}_4}{\mathrm{d}t} = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

On constate de (18) que la sphère A_1 a un contact du second ordre avec (C), parce que $A_1\,\mathrm{d}^2A_0 = 0$. Il suit donc que le point $\bar{M}$ étant sur A_2, se trouve sur une sphère orthogonale à la sphère A, de plus haut, et qui passe par le cercle (k) tangent à (C) en M.

Ce cas est particulièrement important parceque si l'on fait une inversion de centre $\bar{A}_4$, les cercles tangents $(\bar{k})$ se transforment en des droites tangentes à la transformée de (C) et on arrive au cas banal de l'introduction. Ces droites sont alors les axes des cercles (k) tangent à (C). Cette dernière courbe s'obtient, comme on s'en assure aisément par des considérations géométriques, comme l'enveloppe des cercles caractéristiques d'une famille de sphères ayant le centre en $\bar{M}$, le rayon étant une fonction arbitraire de t.

Резюме

ОБ ОДНОМ КОНФОРМНОМ СООТВЕТСТВИИ МЕЖДУ ДВУМЯ КРИВЫМИ

АДОЛЬФ ХАЙМОВИЧ (Adolf Haimovici), Яссы

(Поступило в редакцию 16/X 1958 г.)

Рассмотрим две кривые C и $\overline{C}$ конформного пространства, систему (γ) окружностей k, касающихся C, и систему $(\overline{\gamma})$ окружностей $\overline{k}$, касающихся $\overline{C}$. Мы будем исследовать условия, при которых можно установить соответствие между кривыми C и $\overline{C}$ так, чтобы сферы, проходящие через соответствующие друг другу окружности k и $\overline{k}$, были взаимно ортогональными. По методу подвижного репера (репером в данном случае является пентасфера) мы обнаружим, что пентасфера, сопоставленная кривой $\overline{C}$, и ее перемещение (4′) определяются посредством соотношений (5) и (6) пентасферой, сопоставленной кривой C, и ее перемещением (4), причем это перемещение должно удовлетворять соотношениям (7), которым, впрочем, можно удовлетворить и не меняя C и (k). Сопоставленный кривой C репер зависит еще от произвольной функции одного переменного и — при фиксированном выборе такой функции — еще от двух произвольных постоянных. Тот же произвол имеет место и для $\overline{C}$ и $(\overline{\gamma})$.

Если окружности k и $\overline{k}$ являются соприкасающимися окружностями соответственно кривых C и $\overline{C}$, то оказывается, что M $(\overline{M})$ лежит на соприкасающейся сфере кривой $\overline{C}$ (C) в $\overline{M}$ (M). Если дана кривая C, то существует ∞^2 кривых $\overline{C}$, удовлетворяющих нашим условиям.

В статье еще исследуется случай, когда $\overline{A}_4$ фиксировано; при помощи инверсии относительно центра $\overline{A}_4$ этот случай можно свести к случаю евклидова пространства.