

Alois Švec

Déformations projectives des systèmes  $n$ -conjugués dans  $S_{2n-1}$  dont toutes les transformées de Laplace sont dégénérées

*Czechoslovak Mathematical Journal*, Vol. 9 (1959), No. 3, 440–444

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/100367>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1959

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

DÉFORMATIONS PROJECTIVES DES SYSTÈMES  $n$ -CONJUGUÉS  
DANS  $S_{2n-1}$  DONT TOUTES LES TRANSFORMÉES DE LAPLACE  
SONT DÉGÉNÉRÉES

ALOIS ŠVEC, Praha

(Reçu le 29 septembre 1958)

M. B. SEGRE a trouvé, dans son Mémoire [1], une construction géométrique de réseaux  $R$  dans  $S_3$  dont les deux transformées de Laplace dégèrent. J'ai généralisé son résultat dans [2] au cas des surfaces  $R$  dans  $S_{2n+1}$  et des déformations  $C_{n+1}$ ; le présent Mémoire contient une généralisation au cas de variété  $V_n$  dans  $S_{2n-1}$  et de déformation  $C_2$ .

1. Une variété  $x = x(u_1, \dots, u_n)$  du type étudié est déterminée par le système

$$\left. \begin{aligned} x_{ij} &= 0 \quad (i, j = 1, \dots, n; i \neq j), \\ x_{nn} &= ax + \sum_{i=1}^n b^i x_i + \sum_{\alpha=1}^{n-1} c^\alpha x_{\alpha\alpha}, \\ a &= a(u_1, \dots, u_n), \quad b^i = b^i(u_1, \dots, u_n), \quad c^\alpha = c^\alpha(u_1, \dots, u_n). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

J'emploie la notation  $x_r = \frac{\partial x}{\partial u_r}$ ,  $x_{rs} = \frac{\partial^2 x}{\partial u_r \partial u_s}$ ; pour les indices on a  $i, j, \dots = 1, \dots, n$ ;  $\alpha, \beta, \dots = 1, \dots, n-1$ . Les conditions d'intégrabilité du système (1) sont

$$a_{\beta\gamma} - \frac{c_\beta^\gamma}{c_\gamma} a_\gamma - \frac{c_\gamma^\beta}{c_\beta} a_\beta = 0 \quad (\beta \neq \gamma), \quad (2)$$

$$a_\gamma + b_{\beta\gamma}^\beta - \frac{c_\beta^\gamma}{c_\gamma} b_\gamma^\beta - \frac{c_\gamma^\beta}{c_\beta} (a + b_\beta^\beta) = 0 \quad (\beta \neq \gamma), \quad (3)$$

$$b_{\beta\gamma}^i - \frac{c_\beta^\gamma}{c_\gamma} b_\gamma^i - \frac{c_\gamma^\beta}{c_\beta} b_\beta^i = 0 \quad (i \neq \beta \neq \gamma \neq i), \quad (4)$$

$$b_\gamma^\beta + c_{\beta\gamma}^\beta - \frac{c_\beta^\gamma}{c_\gamma} c_\gamma^\beta - \frac{c_\gamma^\beta}{c_\beta} (b_\beta + c_\beta^\beta) = 0 \quad (\beta \neq \gamma), \quad (5)$$

$$c_{\beta\gamma}^\alpha - \frac{c_\beta^\gamma}{c_\gamma} c_\gamma^\alpha - \frac{c_\gamma^\beta}{c_\beta} c_\beta^\alpha = 0 \quad (\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha), \quad (6)$$

$$a_{\beta n} + b_{\beta}^n a - \frac{c_{\beta}^n}{c^{\beta}} a_{\beta} = 0, \quad (7)$$

$$a_n + b_{\beta n}^{\beta} + b_{\beta}^n b^{\beta} - \frac{c_{\beta}^n}{c^{\beta}} (a + b_{\beta}^{\beta}) = 0, \quad (8)$$

$$a_{\beta} + b_{\beta n}^n + b_{\beta}^n b^n - \frac{c_{\beta}^n}{c^{\beta}} b_{\beta}^n = 0, \quad (9)$$

$$b_{\beta n}^{\alpha} + b_{\beta}^n b^{\alpha} - \frac{c_{\beta}^n}{c^{\beta}} b_{\beta}^{\alpha} = 0 \quad (\alpha \neq \beta), \quad (10)$$

$$b_n^{\beta} + c_{\beta n}^{\beta} + b_{\beta}^n c^{\beta} - \frac{c_{\beta}^n}{c^{\beta}} (b^{\beta} + c_{\beta}^{\beta}) = 0, \quad (11)$$

$$b_{\beta n}^{\alpha} c^{\alpha} + c_{\beta n}^{\alpha} - \frac{c_{\beta}^n}{c^{\beta}} c_{\beta}^{\alpha} = 0 \quad (\alpha \neq \beta). \quad (12)$$

Soit donné, à côté de la variété (1), une autre variété, déterminée par le système ( $\bar{1}$ ) analogue au système (1); toutes les expressions relatives à cette autre variété seront marquées d'une barre. Entre les deux variétés soit donné une correspondance  $\bar{u}_i = u_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Si les deux variétés sont en déformation projective de second ordre, il existe pour chaque paire de points correspondants une homographie qui est nécessairement de la forme

$$K\bar{x} = x, \quad K\bar{x}_i = x_i + \lambda^i x, \quad K\bar{x}_{\alpha\alpha} = x_{\alpha\alpha} + 2\lambda^{\alpha} x_{\alpha} + \mu^{\alpha} x \quad (13)$$

et pour laquelle

$$K\bar{x} = x, \quad K d\bar{x} = dx + \mu x, \quad K d^2\bar{x} = d^2x + 2\mu dx + \nu x. \quad (14)$$

De (14<sub>2</sub>) il s'ensuit  $\mu = \sum_{i=1}^n \lambda^i du_i$ , par substitution dans (14<sub>3</sub>) nous trouvons

$$\left. \begin{aligned} (b^{\alpha} - \bar{b}^{\alpha} - 2\lambda^{\alpha} \bar{c}^{\alpha}) du_n^2 + 2 \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \alpha}}^n \lambda^i du_{\alpha} du_i &= 0, \\ (b^n - \bar{b}^n + 2\lambda^n) du_n^2 + 2 \sum_{\alpha=1}^{n-1} \lambda^{\alpha} du_{\alpha} du_n &= 0, \\ (c^{\alpha} - \bar{c}^{\alpha}) du_n^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

donc, la condition nécessaire et suffisante pour que les variétés (1) et ( $\bar{1}$ ) soient en déformation projective du second ordre est que

$$b^i = \bar{b}^i, \quad c^{\alpha} = \bar{c}^{\alpha}. \quad (16)$$

Le problème de trouver les variétés (1) projectivement déformables se réduit donc ainsi au problème de trouver un système de fonctions  $a, b^i, c^{\alpha}$ , satisfaisant

aux équations (2)–(12) et pour lequel il existe au moins une fonction  $\bar{a} \neq a$  telle que le système  $\bar{a}, b^i, c^\alpha$  vérifie, lui-aussi, les équations (2)–(12).

En substituant  $a_\gamma$ , calculé à partir de (9), dans les équations (3), nous obtenons une équation linéaire en  $a$ ; comme cette équation doit être vérifiée par  $a$  et par  $\bar{a}$  simultanément, il vient

$$c_\gamma^\beta = 0 \quad (\beta \neq \gamma). \quad (17)$$

Les équations (5) se réduisent à

$$b_\gamma^\beta = 0 \quad (\beta \neq \gamma), \quad (18)$$

les équations (3) deviennent

$$a_\beta = 0 \quad (19)$$

et (pour  $a \neq 0$ ) il vient de (7)

$$b_\beta^n = 0. \quad (20)$$

On a donc  $a = f(u_n)$ . Après transformation de variables  $\bar{u}_n = g(u_n)$ , (1<sub>2</sub>) devient (à la notation manifeste)

$$g'^2 x_{nn} + g'' x_n = fx + \sum_{\alpha=1}^{n-1} b^\alpha x_\alpha + b^n g' x_n + \sum_{\alpha=1}^{n-1} c^\alpha x_{\alpha\alpha}.$$

Si l'on choisit  $g$  de manière à avoir  $g'^2 = k^{-1}f$  ( $k = \text{const} \neq 0$ ) il sera possible d'écrire les équations des variétés considérées de telle façon que l'on ait

$$a = k \quad (= \text{const}). \quad (21)$$

En procédant de la manière décrite ci-dessus on obtient d'après (21) à partir de (8) l'égalité

$$c_n^\beta = 0 \quad (22)$$

et à partir de (11), (22) et (20)

$$b_n^\beta = 0. \quad (23)$$

On a donc en vertu de (18), (20), (23), soit respectivement (17), (22)

$$b^i = b^i(u_i), \quad c^\alpha = c^\alpha(u_\alpha). \quad (24)$$

Le lecteur verra aisément lui-même en appliquant des transformations convenables  $\bar{u}_\alpha = \bar{u}_\alpha(u_\alpha)$  que les variétés projectivement déformables du type considéré sont données par le système totalement intégrable

$$\left. \begin{aligned} x_{ij} = 0, \quad x_{nn} = kx + \sum_{i=1}^n U_i x_i + \sum_{\alpha=1}^{n-1} x_{\alpha\alpha}, \\ k = \text{const}, \quad U_i = U_i(u_i); \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

on obtient les déformations projectives en faisant varier  $k$ .

2. Il nous reste à déterminer la construction géométrique des variétés (25). Par différentiation de (25<sub>2</sub>) en  $u_\alpha$  ou en  $u_n$  nous obtenons

$$x_{\alpha\alpha x} + U_\alpha x_{\alpha\alpha} + (U'_\alpha + k) x_\alpha = 0$$

resp.

$$x_{nnn} - U_n x_{nn} - (U'_n + k) x_n = 0 \quad (26)$$

de sorte que toute courbe du système  $n$ -conjugué de la variété étudiée est plane et chacune de ses transformées de Laplace est une droite. La variété (25) possède l'expression analytique

$$x(u_1, \dots, u_n) = x^1(u_1) + \dots + x^n(u_n). \quad (27)$$

Considérons deux de ses sous-variétés, donnés paramétriquement

$$y(u_1, \dots, u_p) = x^1(u_1) + \dots + x^p(u_p) + x^{p+1}(u'_{p+1}) + x^{p+2}(u'_{p+2}) + \dots + x^n(u'_n), \quad (28)$$

$$z(u_1, \dots, u_p) = x^1(u_1) + \dots + x^p(u_p) + x^{p+1}(u''_{p+1}) + x^{p+2}(u'_{p+2}) + \dots + x^n(u'_n), \quad (29)$$

les  $u'_p, u''_p, \dots, u'_n$  étant constantes. Chacune des deux sous-variétés se trouve visiblement dans un espace à  $2p$  dimensions. Le point

$$z = y(u_1, \dots, u_p) - z(u_1, \dots, u_p) = x^{p+1}(u'_{p+1}) - x^{p+1}(u''_{p+1})$$

est situé sur la transformée de Laplace  $[x_{p+1}, x_{p+1, p+1}]$  de la variété (27). En s'appuyant sur les résultats cités plus haut, le lecteur démontrera lui-même aisément la validité de la construction suivante des variétés (25):

Soit donné dans  $S_{2n-1}$   $n$  droites  $d_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) et un point  $P$ , dans chaque plan  $\alpha_i = [d_i, P]$  soit donné une courbe  $\gamma_i$ , passant par le point  $P$ . Nous allons construire successivement les variétés  $V_1 = \gamma_1, V_2, \dots, V_n$  ( $V_i$  étant à  $i$  dimensions). Supposons que la variété  $V_r$  ait été déjà construite, elle passe par le point  $P$  et se trouve dans l'espace  $[d_1, d_2, \dots, d_r, P]$ ; la variété  $V_{r+1}$  sera construite de la façon suivante: Soit  $Q$  le point de la courbe  $\gamma_{r+1}$ , soit  $S_Q$  le point d'intersection de  $d_{r+1}$  avec  $PQ$ ,  $\sigma_Q = [d_1, d_2, \dots, d_r, Q]$ , soit  $V_r^Q$  la projection de la variété  $V_r$  dans  $\sigma_Q$  le point  $S_Q$  étant pris pour centre de projection; la variété  $V_{r+1}$  sera l'ensemble des variétés  $V_r^Q, Q \in \gamma_{r+1}$ . Cette variété  $V_{r+1}$  se trouve manifestement dans l'espace  $[d_1, \dots, d_{r+1}, P]$ .  $V_n$  est une variété du type cherché et ses transformées de Laplace sont justement les droites  $d_i$ .

#### LITTÉRATURE

- [1] B. Segre: *Intorno alla teoria delle superficie proiettivamente deformabili...*, Mem. della Acc. Italia, Vol. II, No 3, 1931.  
 [2] A. Švec: *Les surfaces  $R$  dans les espaces projectifs de dimension impaire*, Чех. мат. ж. 9 (84), 1959, 243—264.

## Резюме

### ПРОЕКТИВНОЕ ИЗГИБАНИЕ $n$ -СОПРЯЖЕННЫХ СИСТЕМ В $S_{2n-1}$ , ВСЕ ЛАПЛАСОВСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КОТОРЫХ ВЫРОЖДЕНЫ

АЛОИС ШВЕЦ (Alois Švec), Прага

(Поступило в редакцию 29/IX 1958 г.)

Многообразия  $x = x(u_1, \dots, u_n)$  в  $S_{2n-1}$ , удовлетворяющие системе (1) и проективно изгибаемые, даны системой (25); их проективные изгибания получаются путем изменения числа  $k$ . Их геометрическое построение имеет следующий вид:

Пусть в  $S_{2n-1}$  дано  $n$  прямых  $d_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) и точка  $P$ , пусть в каждой плоскости  $\alpha_i = [d_i, P]$  дана кривая  $\gamma_i$ , проходящая через точку  $P$ . Построим постепенно последовательность многообразий  $V_1 = \gamma_1, V_2, \dots, V_n$  ( $V_i$  имеет размерность  $i$ ). Предположим, что мы уже построили многообразие  $V_r$ , проходящее через точку  $P$  и лежащее в пространстве  $[d_1, d_2, \dots, \dots, d_r, P]$ ; построим многообразие  $V_{r+1}$  следующим образом:

Пусть  $Q$  — произвольная точка кривой  $\gamma_{r+1}$ ,  $S_Q$  — пересечение  $d_{r+1}$  с  $PQ$ ,  $\sigma_Q = [d_1, d_2, \dots, d_r, Q]$ ,  $V_r^Q$  — проекция многообразия  $V_r$  в пространство  $\sigma_Q$  из точки  $S_Q$ ; многообразие  $V_{r+1}$  является совокупностью многообразий  $V_r^Q$   $Q \in \gamma_{r+1}$ ;  $V_{r+1}$  лежит, очевидно, в пространстве  $[d_1, \dots, d_{r+1}, P]$ . Многообразие  $V_n$  является многообразием искомого типа и ее преобразованиями Лапласа являются как раз прямые  $d_i$ .